Abgeliefert am 8. Januar 1876.

Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra.

Herausgegeben

von

Dr. Joseph Salomon,

corresp. Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, wirkl. Mitgliede des Doktoren-Collegiums der philosophischen Fakultät der Wiener Universität, ö. o. Professor der Elementar- und höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute, General-Sekretär der allgemeinen wechselseitigen Capitalien- und Renten-Versicherungsanstalt in Wien ꝛc.

Fünfte durchaus vermehrte und verbesserte Auflage.

Wien.

Verlag von Carl Gerold.

1852.

Druck von Carl Gerold und Sohn.

Vorwort

(zur fünften Auflage).

Das vorliegende Lehrbuch, welches bei meinen öffentlichen Vorlesungen als Leitfaden dient, soll meinen Zuhörern nicht blos das dem Techniker nöthige Materiale aus der allgemeinen Größenlehre darbieten, sondern auch ihre formale Geistesbildung fördern und ihnen selbst dann, wenn sie längst in das praktische Leben getreten sind, noch als ein treuer Rathgeber dienen. Den Gebrauch dieses Buches will ich nicht auf den engen Kreis der Schule beschränkt wissen, ich wünsche ihm vielmehr einen ausgedehnteren Wirkungskreis angewiesen: es soll nämlich überhaupt jedem jungen Manne, der Neigung und Talent für die Mathematik besitzt, als Führer dienen, seine Lust und Liebe zu diesem ernsten Studium wo möglich steigern und ihn befähigen, die höhern Theile der Wissenschaft mit Erfolg studiren zu können. Das Streben nach diesem Ziele hatte zur natürlichen Folge, daß der Umfang dieser Schrift jenen eines gewöhnlichen Lehrbuches überschreitet und daß dieselbe beim Selbstunterrichte eine gesteigerte geistige Anstrengung in Anspruch nimmt. Bei der Benützung dieses Buches zum öffentlichen Unterrichte wird der sachkundige Lehrer nicht nur die ihm zu Gebote stehende Zeit, sondern auch den Bildungsgrad seiner Schüler gehörig berücksichtigen und hiernach mit der nöthigen Umsicht entscheiden, welche Materien übergangen werden können, ohne den innern Zusammenhang der übrigen Theile zu stören.

Da meine öffentlichen Vorlesungen über die Elementar-Mathematik außerordentlich zahlreich, gewöhnlich von einigen Hunderten von Zuhörern besucht werden, so ist wohl begreiflich, daß

ein solches Auditorium alle Abstufungen der geistigen Fähigkeiten darbiete, und daß es eine höchst schwierige Aufgabe sei, den Unterricht fruchtbringend zu ertheilen und ihn so einzurichten, daß der talentvolle Zuhörer die nöthige geistige Nahrung finde und zugleich auch der minder begabte Schüler wenigstens die für das praktische Leben unumgänglich nöthigen Kenntnisse mit zureichender Gründlichkeit sich aneigne. Das vorliegende Lehrbuch und mein mündlicher Vortrag mußten sich bei diesen Umständen oder vielmehr Uebelständen gegenseitig unterstützen, und die durch eine lange Reihe von Jahren erzielten glücklichen Erfolge verschafften mir die Ueberzeugung, daß der von mir verfolgte Weg sicher zum erwünschten Ziele führe, weßhalb ich auch bei der gegenwärtigen neuen Ausgabe die früher betretene Bahn nicht verlassen und außer einigen Verbesserungen nur noch einige Zusätze aufgenommen habe, die in wissenschaftlicher Beziehung ein wahrhaftes Interesse darbieten dürften.

Bei der Ueberarbeitung dieses Lehrbuches benützte ich die schätzbaren Arbeiten der ausgezeichnetsten neuern Schriftsteller, insbesondere jene der Herren Cirodde, von Ettingshausen, Gentil, Grunert, C. F. A. Jacobi, Liouville, Poinsot, van Swinden u. a. m. Meine eigenthümliche Arbeit wird dem sachkundigen Leser nicht entgehen.

Wien im November 1851.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Die verschiedenen Rechnungsoperazionen mit besondern und allgemeinen Größen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzelgrößen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, mit ihrer Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Siebenter Abschnitt.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Achter Abschnitt.

Einleitung.

§. 1.

1. Wenn zwei oder mehrere Dinge mit einander verglichen werden, und es zeigt sich, daß sie sich durch kein Merkmal — außer der Verschiedenheit des Orts — von einander unterscheiden, so nennt man sie einerlei, oder man sagt, es sind die nämlichen Dinge. Ist aber in dem einen Dinge etwas, was nicht in dem andern ist, so heißen die Dinge verschieden.

2. Dinge heißen homogen, gleichartig, in wiefern man auf das sieht, was sie gemein haben; ungleichartig oder heterogen, wenn man das, wodurch sie sich von einander unterscheiden, berücksichtigt. Es können also zwei Dinge in einer Rücksicht homogen, in der andern aber heterogen sein; z. B. zwei Kugeln, deren eine von Holz, die andere von Eisen ist, sind gleichartig, in wiefern man ihre Form berücksichtigt; heterogen aber, wenn man auf die Materie sieht, aus der sie bestehen.

3. Die Bestimmung des Verschiedenen in einem Objekte, und die Art und Weise, wie dasselbe im Objekte verbunden gedacht wird, ist des Gegenstandes Beschaffenheit — Qualität. Die Menge der zu einem Ganzen verbundenen homogenen Theile bestimmt dessen Größe — Quantität. Das Objekt selbst, dem eine Quantität zukommt, heißt Quantum.

Man könnte also auch sagen, Größe ist alles das, was vermehrt oder vermindert werden kann.

4. Das, woraus man die Quantität eines Dinges entsprungen denkt, heißt das Maß oder die Einheit. Sage ich z. B. eine fünfpfündige Kugel, so ist die Kugel das Quantum, fünfpfündig bestimmt deren Quantität, und Pfund die Einheit oder das Maß, welches fünfmal gesetzt die Quantität der Kugel erzeugt.

Die Bestimmung der Quantität durch die Einheit, heißt Messen oder Zählen, und die bestimmte Quantität eine Zahl, welche man

sich also aus der Wiederholung derselben Einheit entsprungen denkt, und welche eine relative Größe ist, weil sie sich ändert, sobald eine andere, von der ersten verschiedene Einheit zu Grunde gelegt wird. Das Quantum, an dem die relative Größe haftet, wird eine gezählte Größe genannt, obgleich man gezählte Größen selbst Zahlen zu nennen pflegt. Daß übrigens Größen nur durch andere, ihnen gleichartige, gemessen werden können, ist wohl für sich klar.

5. Größen von einerlei Quantität heißen gleich; Dinge von einerlei Qualität heißen ähnlich; Dinge endlich, von einerlei Quantität und Qualität heißen kongruent.

Also sind Größen (Quanta), welche durch dieselbe Einheit gemessen sind, gleich oder ungleich, je nachdem die Zahlen, durch welche ihre Quantitäten bezeichnet werden, gleich oder ungleich sind, und man kann über die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Größen derselben Art, wenn sie auf verschiedene Einheiten bezogen werden, mit Bestimmtheit früher nichts sagen, als bis man sie auf einerlei Einheit gebracht hat.

6. Eine Größe heißt stätig, wenn das Aufhören des einen Theils zugleich der Anfang des andern ist; dieser entgegengesetzt ist die diskrete Größe als bloßes Adgregat mehrerer gleichartigen Einheiten. So z. B. sind Zeit, Raum, Linien u. s. w. stetige Größen, aber ein Stein-, Sand- oder Kornhaufen sind diskrete Größen.

7. Die Wissenschaft, d. i. die systematische Erkenntniß der Größen, heißt Mathematik. Diese Erkenntniß bezieht sich übrigens bloß auf die Eigenschaften der Größen (Quantorum), welche ihnen rücksichtlich ihrer Quantität zukommen, denn alle übrigen Eigenschaften der Größen liegen außer der Sphäre der Mathematik.

§. 2.

1. Die Mathematik wird rücksichtlich ihres Gegenstandes in zwei Theile getheilt, nämlich a) in die Arithmetik, b) in die Geometrie.

Die Arithmetik — allgemeine Größenlehre — auch Analysis genannt, handelt von den Größen überhaupt, in wiefern sie dieselben als Adgregate gleichartiger Theile betrachtet, und von aller Beschaffenheit dieser zu einem Ganzen wie immer vereinigten Theile abstrahirt. Die Arithmetik berücksichtigt also bloß das quantitative Verhältniß der Quanta.

Die Geometrie betrachtet die Größen im Raume, und sieht auf die Art der Verbindung der gleichartigen Theile, ohne jedoch die Quanta, an welchen die Quantität als Prädikat haftet, zu berücksich-

tigen, weßhalb sie auch besondere oder spezielle Größenlehre genannt wird.

2. Die Mathematik theilt sich in Rücksicht der Sphäre ihrer Untersuchungen in die niedere und höhere.

Die niedere oder Elementar-Mathematik ist vermöge des ihr eigenthümlichen Ganges in gewisse Grenzen eingeschränkt, welche jedoch noch schwankend sind.

Die höhere Mathematik fährt da fort, wo jene stehen bleibt, und bedient sich gewisser Kunstgriffe, wodurch sie die Grenzen ihrer Untersuchungen ins Unendliche ausdehnt.

Die Unbestimmtheit der Grenzen zwischen der höhern und niedern Mathematik bezieht sich nur auf die Arithmetik, denn in der Geometrie ist jene Grenze genau bestimmt.

3. In der Absicht auf Theorie und Anwendung oder Praxis theilt sich die Mathematik auch in die reine und angewandte, oder in die theoretische und praktische.

Die reine Mathematik betrachtet die Größen für sich im Allgemeinen, ohne die Qualität der Objekte, an denen die Größe (Quantität) haftet, zu berücksichtigen, und zerfällt α) in die allgemeine Größenlehre, Arithmetik im weitern Sinne des Wortes, und β) in die besondere Größenlehre. — Geometrie —, welche die erstere zum Fundamente hat. Das Produkt der Arithmetik und Geometrie ist γ) die Trigonometrie, oder die Wissenschaft, aus drei gegebenen Stükken, welche ein Dreieck bestimmen, die übrigen durch Rechnung zu finden. Die Trigonometrie theilt sich in die ebene und sphärische.

Die angewandte Mathematik begreift in sich:

a) die praktische Arithmetik — praktische Rechenkunst,
b) die praktische Geometrie, Geodäsie oder Feldmeßkunst, und
c) die physisch mathematischen Wissenschaften.

4. In Absicht auf Methode theilt man die Mathematik in die synthetische und analytische.

Die Synthesis geht von dem Einfachen auf das Zusammengesetzte über; sie zeigt nicht, wie die Sätze erfunden worden sind, sondern beweist deren Giltigkeit aus andern schon bekannten Wahrheiten. Die Analysis geht von dem Zusammengesetzten auf das Einfache über, und zeigt den Weg der Erfindung deutlich nach. — Die letzte Methode ist in der höhern Mathematik allgemein, weßwegen diese auch vorzugsweise Analysis genannt wird.

§. 3.

Einer Wissenschaft, wie die Mathematik ist, eine Lobrede zu halten, ist wohl überflüssig, da einerseits schon aus der im vorigen Paragraphe gegebenen Uebersicht von selbst einleuchtet, wie tief sie in alle Verhältnisse des bürgerlichen Lebens eingreife, und wie sehr sie daher die Achtung und sorgfältigste Pflege einer jeden gebildeten Nation verdiene; und weil andererseits der Anfänger, für den ich hier allein schreibe, erst in der Folge darüber ein gegründetes Urtheil sprechen kann.

Dem Jünglinge, der mit Lust und Liebe sich dieser vortrefflichen Wissenschaft zu weihen entschlossen ist, will ich nur die Versicherung geben, daß er sich bei gehörigem Fleiße und nöthiger Ausdauer durch das Studium der Mathematik nicht allein die größten Vortheile in Bezug auf formale Geistesbildung sowohl, als in politischer Rücksicht verschaffen könne, sondern daß er sich durch dasselbe auch eine unerschöpfliche Quelle des reinsten Vergnügens öffne.

§. 4.

Ueber die Kunstwörter und Methode der Mathematik.

1. Eine Erklärung — Definition — ist die präcise und deutliche Bestimmung eines vollständigen Begriffes, d. h. die Definition muß einen Begriff oder eine Idee so bestimmen, daß sie weder zu viel, noch zu wenig Merkmale angibt, die für sich deutlich sind.

Die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die lauter richtige Definitionen aufzuweisen hat. In den übrigen Wissenschaften, z. B. in der Naturgeschichte und Naturlehre, wo wir es mit Gegenständen der bloßen Erfahrung zu thun haben, können keine vollständigen Definitionen, sondern nur Beschreibungen gegeben werden.

Die Definition heißt Realdefinition, Sacherklärung, wenn sie die wesentlichen Merkmale und innern Beschaffenheiten angibt, woraus man alles, was der Sache zukommt, verstehen und erklären kann; z. B. der Kreis ist eine Figur, welche beschrieben wird, wenn sich eine gerade Linie in einer Ebene um einen fixen Punkt bewegt. Diese Erklärung zeigt die Entstehung der Sache, und heißt deßhalb genetisch. Zeigt sie dieses nicht, so wird sie theoretisch genannt. Z. B. der Kreis ist eine ebene Figur, in welcher alle Punkte des Umfanges von einem gewissen Punkte innerhalb desselben gleichweit abstehen.

Gibt endlich die Definition einen deutlichen Begriff von einer Sache durch äußere Merkmale, wodurch man sie von andern Dingen unterscheiden kann, so heißt sie Worterklärung — Nominal-

Definition — denn sie begreift dann das Wesen der Sache nicht. Z. B. Wasser ist eine durchsichtige Flüssigkeit ohne Farbe und Geschmack.

2. Ein Satz — Proposition — ist der Ausspruch über die Verbindung eines Merkmales mit einem Gegenstande, also die Verbindung zweier Begriffe, deren einer Subjekt, der andere Prädikat heißt. Subjekt und Prädikat sind entweder zugleich einfache Begriffe, oder sie sind selbst wieder Sätze, wie dieß der Fall bei den hypothetischen Sätzen ist. In diesem Falle heißt jener Satz, welcher das Subjekt vorstellt, Bedingung — Annahme — Voraussetzung oder Hypothesis; der Satz aber, der das Prädikat ausdrückt, wird Folge — Konklusion — Thesis genannt.

Merkmale (Prädikate), welche in demselben Subjekte (Gegenstande) nicht zugleich vereiniget gedacht werden können, nennt man einander entgegengesetzt. Wenn daher in zwei Sätzen demselben Subjekte entgegengesetzte Merkmale beigelegt werden, so nennt man auch diese Sätze einander entgegengesetzt. Wird in einem Satze ein Merkmal mit einem Subjekte verbunden, diese Verbindung aber in einem andern Satze geradezu geläugnet, ohne daß etwas anderes darüber gesagt wird, so heißen diese beiden Sätze kontradiktorisch entgegengesetzt; wird aber in dem letzteren Satze überdieß ein anderes, entgegengesetztes Prädikat mit jenem Subjekte verknüpft, so heißen die beiden Sätze konträr entgegengesetzt. Von zwei kontradiktorisch entgegengesetzten Sätzen muß der eine nothwendig wahr sein; konträr entgegengesetzte Sätze aber können auch beide zugleich falsch sein.

Ein Satz heißt theoretisch oder ein Behauptungssatz, wenn er aussagt, daß etwas sei oder geschehe; bestimmt er aber, daß etwas sein oder geschehen soll, so heißt er ein praktischer oder Forderungssatz. Beim theoretischen Satze wird die Verbindung des Prädikates mit dem Subjekte schon als wirklich vorhanden gedacht, der praktische Satz fordert aber erst die wirkliche Ausführung jener Verknüpfung unter der Voraussetzung, daß sie möglich sei.

Die theoretischen Sätze sind entweder Grundsätze (Axiome), oder Lehrsätze — Theoreme.

Der Satz, dessen Wahrheit schon einleuchtet, sobald man den Sinn desselben gefaßt hat, der also schon evident ist, ohne einer besondern Bestätigung zu bedürfen, heißt Grundsatz — Axiom; z. B. das Ganze ist so groß, wie seine Theile zusammengenommen. Wird aber die Wahrheit des Satzes nicht unmittelbar erkannt, sondern muß diese erst aus andern Sätzen erwiesen werden, so heißt der Satz

Lehrsatz — Theorem. Z. B. in jedem Dreiecke steht der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Die praktischen Sätze sind entweder Postulate (Forderungssätze im strengen Sinne), oder Aufgaben, Probleme. Postulat heißt der Satz dann, wenn die Möglichkeit der Ausführung ohne Beweis erkannt wird; z. B. von einem Punkte zum andern eine gerade Linie zu ziehen — Man nennt einen Satz Problem oder Aufgabe, wenn die Art und Weise der Ausführung nicht für sich einleuchtet, und die Gültigkeit des Verfahrens erst erwiesen werden muß; z. B. eine gegebene Linie zu halbiren, oder einen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen. Bei jeder Aufgabe hat man demnach auf drei Stücke zu sehen: a) auf den Satz, der die Forderung ausspricht; b) auf die Art, dieser Genüge zu leisten, und c) auf den Beweis der Giltigkeit der Auflösung, d. i. auf den Beweis, daß durch das vorgeschriebene Verfahren das erhalten worden ist, was verlangt wurde.

Eine Aufgabe, vermöge welcher eine oder mehrere Zahlen gefunden werden sollen, heißt eine arithmetische, und die Eigenschaften, welche die Aufgabe den gesuchten Zahlen oder Größen beigelegt wissen will, nennt man die Bedingungen der Aufgabe. Die Bedingungen einer arithmetischen Aufgabe müssen demnach so beschaffen sein, daß sich aus ihnen erkennen läßt, auf welche Art die gegebenen Größen mit den gesuchten zu verbinden seien, um den verlangten Zweck zu erreichen.

3. Sätze, welche unmittelbare Folgen aus vorhergehenden Sätzen enthalten, heißen Folgesätze — Zusätze — Korollaria.

In einer Wissenschaft legt man oft einen Satz, der in einer andern Wissenschaft schon erwiesen worden ist, zu Grunde. Ein solcher Satz heißt Lehnsatz — Lemma. So beruft man sich z. B. in der Physik auf Grundsätze der reinen Mathematik, und in der Optik, Mechanik u. s. w. auf solche Sätze, die in der Naturlehre dargethan werden.

Nach den Definitionen, Lehrsätzen, Problemen oder Korollarien werden öfters kurze Noten oder Anmerkungen - Scholien — beigefügt, welche dazu dienen, die Sätze genauer zu erklären, auf das Hauptmoment eines Beweises aufmerksam zu machen, oder vor Irrthümern und falschen Auslegungen zu bewahren, oder sie zeigen den Nutzen und die Anwendung des vorstehenden Satzes, oder sie enthalten historische Bemerkungen.

4. Beweisen heißt, die Wahrheit eines Satzes durch Schlüsse, also durch Gründe darthun. Ein Beweis erfordert daher Beweisgründe, und aus diesen muß beurtheilt werden, ob der Beweis selbst

streng und zuverläßig ist. Sind die Beweisgründe bloß Vernunftgründe, so sagt man, der Beweis ist a priori geführt; sind aber die Beweisgründe aus der Erfahrung genommen, so ist es ein Beweis a posteriori.

Die Beweise sind ferner entweder synthetisch oder analytisch. Der synthetische Beweis geht von den Gründen aus, und leitet auf die Folgen, man nennt ihn deßhalb auch einen progressiven Beweis. Der analytische oder regressive Beweis aber geht von der Konklusion aus, und führt zu den Gründen zurück.

Geht das zu Erweisende unmittelbar aus den angeführten Gründen hervor, so heißt der Beweis direkt; nimmt man aber das Gegentheil des zu Beweisenden an, und zeigt, daß diese Annahme auf eine offenbare Unwahrheit oder Ungereimtheit führe, so wird der Beweis ein indirekter (apagogischer) Beweis, oder Beweis ex absurdo genannt.

Beweist man einen Satz für mehrere einzelne Fälle, und schließt dann auf seine Allgemeinheit, so heißt der Beweis Induktion. Kommen zwei oder mehrere Dinge einer Art in verschiedenen Merkmalen überein, und man schließt dann auch auf die Uebereinstimmung der übrigen Merkmale, so sagt man, es sei ein Schluß aus der Analogie.

Analogie und Induktion gewähren nur Wahrscheinlichkeit, aber keine Gewißheit, weil man vom Besonderen und Einzelnen auf das Allgemeine schließt, und also leicht irren kann. Uebrigens hat die Induktion mehr Beweiskraft, als die Analogie; und da wir uns in der Folge öfters der Beweise durch Induktion bedienen werden, so wird es nicht überflüssig sein, anzugeben, auf welche Art die Mathematiker einem strengen Beweise die sogenannte Induktion zu substituiren pflegen. Man ordnet a) alle Fälle nach einem gewissen, meistens aus der Natur der Sache hervorgehenden Gesetze so, daß man durch stufenweises Fortschreiten auf jeden möglichen Fall kommen muß. Man beweist b) die Richtigkeit des aufgestellten Satzes in dem ersten, oder in einigen der ersten auf einander folgenden Fällen. Endlich zeigt man c) aus der Natur des Gegenstandes, daß der zu beweisende Satz, wenn er für irgend einen bestimmten Fall als richtig angenommen wird, nothwendig auch für den unmittelbar darauf folgenden Fall gelten müsse. Hat man diesen drei Forderungen entsprochen, so hat man den aufgestellten Satz strenge und allgemein bewiesen; denn nach b gilt der Satz für den ersten Fall, also muß er vermöge c auch für den zweiten Fall wahr sein. Auf gleiche Weise folgt aus der Gültigkeit des Satzes im zweiten Falle nach c die Richtigkeit desselben im dritten Falle; und dieser Schluß läßt sich immer von Fall zu Fall anwenden. Da man aber auf solche Art nach a auf jeden möglichen Fall kommen muß, so folgt hieraus, daß der zu erweisende Satz ebenfalls in jedem möglichen Falle, also allgemein giltig sein müsse.

Der Philosoph kann durch seine Begriffe bloß Schlüsse bilden; ehe aber der

Mathematiker von seinen Begriffen auf Schlußfolgen übergeht, muß er seine Begriffe konstruiren, d. h. er muß die Objekte derselben a priori darstellen, und sie anschaulich machen. Dadurch wird er in den Stand gesetzt, die Objektivität seiner Begriffe, d. i. die Möglichkeit des Objektes, welchem sein Begriff entspricht, deutlich zu machen, indem er diese der Anschauung unmittelbar vorlegt, und also versinnlicht. Auf diese Weise stellt er uns die nothwendige Verbindung des Prädikats mit dem Subjekte in concreto dar, und da er dieses in jedem Schlusse, sowohl in den Vordersätzen als in der Schlußfolge thut, so sind seine Beweise gleichsam Vorzeigungen des bewiesenen Satzes, also wahre Demonstrationen. Hierauf gründet sich jener hohe Grad von Evidenz, wodurch sich die Mathematik vor allen andern Wissenschaften so sehr auszeichnet, und weßhalb die Griechen die Größenlehre vorzugsweise Wissenschaft (μαϑησις κατ᾽ ἐξοχην) nannten.

Jedes Theorem besteht aus zwei Theilen, nämlich aus einer Hypothesis und einer Konklusion; z. B. wenn die Winkel an der Grundseite des Dreiecks einander gleich sind (Hypothesis), so ist das Dreieck gleichschenklich (Konklusion). Einen Satz umkehren, heißt die Konklusion zur Hypothesis, und diese zur Konklusion machen. So würde der vorige Satz umgekehrt also heißen: Ist ein Dreieck gleichschenklich, so sind die Winkel an der Grundseite einander gleich. Alle Sätze können nicht umgekehrt werden. So z. B. ist folgender Satz richtig: Im rechtwinklichen Dreiecke sind zwei Winkel spitz: aber der umgekehrte Satz: Sind in einem Dreiecke zwei spitze Winkel, so ist das Dreieck rechtwinklich: ist nicht allgemein wahr, weil der dritte Winkel auch spitz oder stumpf sein kann.

Anfänger thun wohl, sich in der Umkehrung vorkommender Sätze, und in der Untersuchung, ob diese auch umgekehrt wahr seien, zu üben.

5. Probe ist die Prüfung, ob man in besondern Fällen genau nach den allgemein deduzirten Regeln verfahren sei, und das verlangte Resultat richtig gefunden habe. Die Probe unterscheidet sich vom Beweise dadurch, daß sie uns nur Wahrscheinlichkeit, dieser aber Gewißheit gibt.

§. 5.

Allgemeine Zeichen und Benennungen, welche der Mathematiker der Kürze wegen gebraucht.

1. Zur Bezeichnung der Gleichheit zweier Größen bedient man sich des Zeichens (=), z. B. $A = B$, heißt, A ist gleich B.

Zwei solche, mit dem Zeichen der Gleichheit verbundene Ausdrücke nennt man eine Gleichung, und jeder der beiden Ausdrücke heißt ein Theil der Gleichung.

2. Die Ungleichheit wird durch das Zeichen (<) so ausgedrückt, daß die Spitze auf die kleinere Größe hinzeigt, die Oeffnung aber auf die größere. Z. B. $A < B$ heißt: A ist kleiner als B, oder B ist größer als A, welches man auch so schreiben kann: $B > A$. Ist noch nicht bestimmt, welche Größe die größere oder kleinere sei, so setze man das

doppelte Zeichen $\gtrless$ oder $\gtrless$ zwischen beide, und lese z. B. $A \gtrless B$ auf folgende Art: A ist größer oder kleiner als B.

Um auszudrücken, daß eine Größe A gleich oder größer, mithin nicht kleiner als eine andere Größe B sei, schreiben wir in der Folge kurz $A \not< B$ statt $A \geqq B$, und um auszudrücken, daß A höchstens gleich oder kleiner, also in keinem Falle größer als B sei, setzen wir kurz $A \not> B$.

3. Um auszudrücken, daß die Größen A und B mit einander zu einer einzigen zu verbinden oder zu addiren seien, setzt man zwischen beide das Zeichen +, welches plus oder mehr gelesen wird. Also $A + B$ heißt: A mehr B, oder A und B zusammengenommen. Eben so bedeutet der Ausdruck $A + B + C + D$ nichts anderes, als daß die vier Größen A, B, C, D zu einer einzigen verbunden oder zusammenaddirt gedacht werden sollen.

4. Trennt man die Größen A und B durch das Zeichen —, welches weniger oder minus gelesen wird, schreibt man nämlich $A - B$, so heißt dieß, man soll die Größe A um die Größe B vermindern, oder B von A abziehen, und spricht kurz, A weniger B. Soll die Größe A um die Größe $B + C$ oder $M - N$ vermindert werden, so schreibt man im erstern Falle $A - (B + C)$, und im letztern $A - (M - N)$, nämlich die abzuziehende Größe wird dann in Klammern eingeschlossen. Ist noch nicht bestimmt, ob die Größe B zur Größe A hinzuzufügen oder von ihr wegzunehmen sei, oder soll sowohl das eine als auch das andere nach und nach geschehen, so schreibt man $A \pm B$, und liest: A mehr oder weniger B.

5. Solche Ausdrücke, in welchen mehrere Größen durch die Zeichen + und — verbunden erscheinen, nennt man zusammengesetzte, mehrnamige, komplexe Größen oder vielgliedrige Ausdrücke — Polynome —, und die einzelnen Größen, aus welchen diese Ausdrücke zusammengesetzt sind, die Glieder oder Theile derselben. Diese einzelnen Glieder heißen, für sich betrachtet, einnamige oder inkomplexe Größen, oder Monome. — Komplexe Größen, die nur aus zwei durch + oder — verbundenen oder getrennten Theilen zusammengesetzt sind, heißen zweitheilige Größen oder Binome, und eben so nennt man die aus drei Theilen bestehenden Ausdrücke dreitheilige Größen oder Trinome.

6. Diejenigen Theile eines zusammengesetzten Ausdruckes, welche das Zeichen + vor sich haben, heißen additive (zu addirende) Theile

oder Größen, und diejenigen Theile, welchen das Zeichen — vorgesetzt ist, heißen **subtraktive** (abzuziehende) Theile — Glieder — oder **subtraktive Größen**. Hat eine Größe kein Zeichen vor sich, so wird sie immer im additiven Sinne genommen. In dem Ausdrucke $a - b + c + d - e$ sind also a, $+ c$ und $+ d$ die additiven, $- b$ und $- e$ aber die subtraktiven Theile.

7. Unter den hier vorkommenden Buchstaben kann man sich was immer für gleichartige Größen vorstellen.

§. 6.

Allgemeine Grundsätze oder Axiome der Mathematik.

1. Jede Größe ist sich selbst gleich, oder $A = A$.

2. Größen, die einander gleich sind, lassen sich für einander setzen oder substituiren. Wenn also $A = B$, so kann man A für B setzen und umgekehrt.

3. Ist die Größe A aus den Größen B, C und D zusammengesetzt, so ist $A = B + C + D$, d. h. das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich, und daher ist das Ganze größer als ein oder nur einige seiner Theile, nämlich $A > B$, und $A > B + C$.

4. Nimmt man von einer Größe alle ihre Theile hinweg, so verschwindet sie.

5. Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich, d. i. wenn $A = B$ und $A = C$, so ist auch $B = C$.

6. Ist $A = B$ und $A > C$, so ist auch $B > C$, und ist $A > B$ und $B > C$, so ist um so mehr $A > C$.

7. Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches. Ist also $A = B$, so ist, weil $C = C$, auch $A + C = B + C$.

8. Gleiches von Gleichem abgezogen, läßt Gleiches. Ist daher $A = B$, so ist auch $A - C = B - C$.

Also allgemein, ist $A = B$ und $C = D$; so ist auch $A \pm C = B \pm D$.

9. Gleiches zu Ungleichem addirt, gibt Ungleiches, und zwar kommt da wieder das Größere zum Vorschein, wo zuvor das Größere war. Ist nämlich $A > B$, so ist auch $A + C > B + C$. Eben so, wenn $A > B$ und $C = D$ ist, so ist auch $A + C > B + D$.

10. Ist $A > B$ und $C > D$, so ist auch $A + C > B + D$; addirt man aber das Kleinere zum Größern, und umgekehrt, so kann man im Allgemeinen weder auf die Gleichheit noch auf die Ungleichheit der Resultate schließen, nämlich es kann $A + D \gtreqless B + C$ sein,

d. h. das erstere Resultat kann gleich, größer oder kleiner als das letztere sein.

11. Gleiches von Ungleichem abgezogen, läßt Ungleiches. Ist $A > B$, so ist auch $A - C > B - C$; oder ist $A > B$ und $C = D$, so ist auch $A - C > B - D$.

12. Ungleiches von Gleichem abgezogen, gibt ungleiche Resultate, und zwar wird dort das Kleinere erscheinen, wo das Größere abgezogen wurde. Ist nämlich $B > C$, so ist, weil $A = A$ ist, $A - B < A - C$.

13. Zieht man aber Ungleiches von Ungleichem ab, so kann man im Allgemeinen wieder nicht auf die Beschaffenheit der Resultate schließen, wenn man von dem Größern das Größere, und vom Kleinern das Kleinere abzieht, wohl aber im entgegengesetzten Falle. Ist nämlich $A > B$ und $C > D$, so kann $A - C \overset{=}{\gtrless} B - D$ sein; dagegen ist $A - D > B - D$ und $B - D > B - C$, um so mehr ist also $A - D > B - C$.

14. Gleiches auf gleiche Art verändert, gibt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Art, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, gibt Ungleiches.

15. Congruente Dinge sind vollkommen einerlei, und lassen sich daher für einander substituiren.

Erster Abschnitt.

Die verschiedenen Rechnungsoperationen mit besonderen und allgemeinen Größen.

Erstes Kapitel.

Vom dekadischen Systeme und den vier Rechnungsarten mit ganzen besonderen Zahlen.

§. 7.

Der Mathematiker bedient sich zur Bezeichnung der Größen gewisser Zeichen, die entweder Größen im Allgemeinen, oder bestimmte Größen (Zahlen) bedeuten. Dergleichen willkürlich angenommene Zeichen für die Zahlen sind die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, durch deren Zusammensetzung jede, auch noch so große, angebbare Zahl bezeichnet werden kann; völlig unbestimmte Größen, d. i. Größen im Allgemeinen, aber pflegen die Mathematiker durch Buchstaben zu bezeichnen, und zwar die bekannten, oder gegebenen Größen durch die ersten Buchstaben des großen oder kleinen, deutschen, lateinischen oder griechischen Alphabets, die unbekannten Größen aber, d. i. jene, welche aus den bekannten erst gefunden werden sollen, durch die letzten Buchstaben desselben. Die durch Buchstaben ausgedrückte Zahl gibt die Menge der zu einem Ganzen verbundenen gleichartigen Einheiten nicht bestimmt an, und ist daher allgemeiner, als die durch Ziffern ausgedrückte Zahl, welche die Quantität genau bestimmt. Jene heißt daher a l l g e m e i n e, diese aber b e s o n d e r e (s p e z i e l l e) Zahlengröße.

§. 8.

Die Wissenschaft der Zahlen heißt Arithmetik — Rechenkunst. Das Auffinden einer Zahl aus andern gegebenen nennt man Rechnen, Kalkuliren, und die gefundene Zahl heißt das Resultat der Rechnung. — Die Rechnung mittelst der Ziffern heißt die Ziffernrechnung, gemeine Rechenkunst, oder Arithmetik im engern Sinne; die Rechnung mittelst der Buchstaben aber heißt die Buchstabenrechnung, oder der Buchstabenkalkül, der jedoch zweckmäßiger die allgemeine Arithmetik genannt wird; und die Wissenschaft, mit Hilfe beider arithmetische Aufgaben auf eine allgemeine Art aufzulösen, nennt man die Algebra, oder auch die Analysis. Diese lehrt nämlich, die Natur einer Aufgabe mit den aus ihr genommenen Beweisen für die Giltigkeit ihrer Operationen in ihrer Anschaulichkeit — Evidenz — und Allgemeinheit durch arithmetische Ausdrücke, Formeln genannt, darzustellen. Diese Formeln sind also allgemeine, anschauliche Ausdrücke irgend einer mathematischen Wahrheit, und dienen dem Mathematiker als sichere und bleibende Normen, unter welche sich alle einzelnen Fälle derselben Art subsumiren, und mittelst bloßer Substitution behandeln lassen, da sie genau alle Operationen angeben, die gemacht werden müssen, um das Resultat irgend einer Aufgabe zu erhalten. Hiedurch erlangt also der Buchstabenkalkül einen bedeutenden Vorzug vor der Ziffernrechnung, und sichert diese erst in ihrer vollständigen Anwendung, weßhalb wir im Vortrage beide mit einander vereinigen wollen.

§. 9.

Der Inbegriff einer Menge von Dingen derselben Art heißt Zahl, und jedes einzelne Ding für sich betrachtet ist die Einheit. Die Einheiten sind entweder relative, oder absolute (primitive). Unter relativer Einheit versteht man diejenige, welche man sich wieder aus einer andern entsprungen denkt, mithin als Inbegriff niedrigerer Einheiten betrachtet. Ist aber eine Einheit nicht aus einer andern niedrigern entstanden, so heißt sie absolute Einheit. So z. B. ist von 6 Gulden die relative Einheit 1 Gulden, und 1 Kreuzer ist die absolute Einheit eines Gulden, wenn man sich den Kreuzer als niedrigste Münzsorte denkt.

Wenn die Eigenschaft oder Qualität der Einheit oder des Maßes, durch deren Wiederholung eine Zahl entsprungen gedacht wird, bestimmt ist, so heißt die Zahl benannt; z. B. 5 Gulden, 7 Klafter, 9 Eimer u. s. w. . . . . Im entgegengesetzten Falle aber heißt

die Zahl unbenannt. Die benannten Zahlen sind entweder gleichbenannt oder ungleichbenannt, je nachdem sie Dinge der nämlichen Gattung und Art, oder Dinge von verschiedener Art, aber von derselben Gattung bezeichnen. Sind aber Zahlengrößen der Gattung und Art nach verschieden, so heißen sie ungleichartig.

§. 10.

Eine Größe als Inbegriff mehrerer Einheiten, also als ein Ganzes betrachtet, heißt eine ganze Zahl. Eine ganze Zahl kann also aus lauter Einsern bestehend oder zusammengesetzt gedacht, und demnach auch durch wiederholte Hinwegnahme von Eins wieder aufgehoben werden. Enthält aber eine Größe nur einen, oder mehrere Theile einer andern Größe, so heißt jene in Bezug auf diese (das Ganze) eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. So ist z. B. ein Zoll in Bezug auf den Schuh eine gebrochene Zahl, und der Schuh das Ganze; der Schuh aber, auf die Klafter bezogen, ist selbst wieder eine gebrochene Zahl, und die Klafter das Ganze. Hieraus sieht man auch, daß relative Einheiten rücksichtlich der niedrigern Einheiten ganze Zahlen, in Beziehung auf höhere Einheiten aber gebrochene Zahlen seien.

A. Vom dekadischen Systeme.

§. 11.

Läßt man immer eine bestimmte Anzahl niedrigerer Einheiten eine Einheit höherer Ordnung bedeuten, so heißt diese nach einer bestimmten Regel festgesetzte Ordnung der Zahlen ein Zahlensystem, welches nach der bestimmten Anzahl Einheiten, die zusammen genommen eine Einheit der nächst höheren Ordnung bilden, seine Benennung erhält. In unserm Zahlensysteme bilden zehn Einheiten irgend einer Ordnung eine Einheit der nächst höhern, und deßwegen heißt dieses Zahlengebäude auch das Decimalsystem (von decem — zehn —, oder das dekadische System, oder kurz die Dekadik (vom griechischen Worte δέκα — zehn —).

Die Anweisung, jede genannte Zahl durch Ziffern richtig zu bezeichnen, und jede durch Ziffern schon bezeichnete Zahl richtig auszusprechen, heißt Numeration, die natürlich so verschieden sein muß, als die Zahlensysteme selbst.

§. 12.

Im dekadischen Systeme hat man zur Bezeichnung der Zahlen die schon oben angeführten zehn Zeichen oder Ziffern:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, Null; deren neun erste bedeutende oder Zahlziffern heißen, die letzte nennt man auch unbedeutende Ziffer. Jene bezeichnen eine bestimmte Vielheit gleichartiger Einheiten, diese aber den Mangel der Vielheit, oder den Mangel der Einheit überhaupt.

§. 13.

Da die bedeutenden Ziffern für sich nur die Einheit, oder eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken, so mußte man auf ein Mittel sinnen, durch Zusammenstellung der Ziffern eine jede beliebige Menge oder Vielheit von Einheiten darstellen zu können, und man verfiel auf Folgendes:

Man läßt jede Ziffer einen zehn-, hundert-, tausendfach größern Zahlenwerth bezeichnen, als die Ziffer an und für sich ausdrückt, indem man sie um eine, zwei, drei . . . Stellen mehr gegen die Linke fortrückt. Dieses Fortrücken gegen die Linke geschieht durch Nullen, welche der bedeutenden Ziffer rechts angehängt werden. So bedeuten z. B. 10, 20, 30 . . . einen zehnfach höhern Werth, als die Ziffern 1, 2, 3, und 100, 200, 300 . . . einen zehnfach höhern Zahlenwerth als 10, 20, 30 . . ., also einen hundertfach höhern als 1, 2, 3 . . . für sich bezeichnen. Steht eine Ziffer in der ersten Stelle, so bedeutet sie Einheiten schlechtweg (primitive Einheiten oder Einser); steht sie in der zweiten Stelle, so nennt man sie Einheiten der ersten Ordnung oder Zehner, z. B. 10, 20, 30, . . . und liest ein, zwei, drei . . . Zehner, oder zehn, zwanzig, dreißig . . .

Die Ziffern in der dritten Stelle nennt man Einheiten der zweiten Ordnung oder Hunderte, die in der vierten Stelle Einheiten der dritten Ordnung oder Tausende u. s. f. Die Einheiten der höhern Ordnungen erhalten in der Reihe, wie sie folgen, die Benennungen: Zehntausende, Hunderttausende, Tausendmal Tausende oder Millionen, Zehnmillionen, hundert-, tausend-, zehntausend-, hunderttausend Millionen; die nächste Stelle erhält die Benennung Billion u. s. w., Trillion, zehn Trillionen u. s. w.

Hieraus sieht man, daß jede Ziffer einen doppelten Werth habe, und zwar:

a) einen natürlichen, d. i. die Anzahl der Einheiten, welche die Ziffer an und für sich, oder vermöge ihrer Figur, ausdrückt; und

b) einen Lokalwerth, welcher von der Stelle abhängt, den die Ziffer einnimmt, und daher auch Stellenwerth genannt wird.

Schreibt man z. B. 400, so ist vier der natürliche Werth der Ziffer 4, aber hundert der Lokalwerth derselben.

§. 14.

Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl richtig zu lesen oder auszusprechen.

Dieses wollen wir vorerst an Beispielen versuchen, und dann eine allgemeine Regel ableiten.

1. Die Zahl $47 = 40 + 7$, kann man lesen: 4 Zehner und 7 Einheiten (§. 13), oder vierzig und sieben, oder sieben und vierzig (Einser).

2. Die Zahl $639 = 600 + 30 + 9$, liest man: 6 Hunderte, 3 Zehner und 9 Einheiten, oder sechshundert neun und dreißig (1).

3. Die Zahl $4728 = 4000 + 728$, wird gelesen: 4 Tausende und siebenhundert acht und zwanzig (2), oder viertausend, sieben hundert acht und zwanzig.

Man sieht aus diesen Beispielen, daß der Werth einer jeden Zahl abhängt:

α) von den Ziffern, mit welchen sie geschrieben, und

β) von den Stellen, die diese Ziffern einnehmen,

und daß das Aussprechen oder Lesen der Zahlen durch die richtige Kenntniß des Lokalwerthes jeder Ziffer aus ihrer Stelle bedingt sei. Um sich übrigens das Aussprechen mehrzifferiger Zahlen zu erleichtern, beobachte man folgende Regeln:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von sechs zu sechs Ziffern ein, setze über die erste Ziffer der zweiten Klasse (die siebente von der Rechten gegen die Linke) einen Accent oder einen Punkt, der Millionen bedeutet; über die erste Ziffer der dritten Klasse zwei Accente oder Punkte, die Billionen bedeuten u. s. w.

2. Jede dieser Klassen theile man wieder unterhalb der Reihe nach drei Ziffern durch ein Komma oder einen Punkt ab, welches Tausend gelesen wird.

3. Dann lese man die Ziffern jeder Klasse so, als wenn sie für sich eine Zahl bezeichneten, und spreche den bei der letzten Ziffer, durch die (in 1. und 2.) angegebenen Zeichen, ausgedrückten Werth dazu aus.

1. Beispiel.

Man lese die Zahl

8,247‴635,729″802,362′843,725.

Hat man nach der Vorschrift die Zahl in Klassen abgetheilt, und den Werth der letzten Ziffer einer jeden Abtheilung gehörig bezeichnet, so spricht man: 8 tausend, 247 Trillionen; 635 tausend, 729 Billionen; 802 tausend, 362 Millionen; 843 tausend, 725 Einser.

Beispiel 2.

Eben so wird die Zahl 8,000′700,049 gelesen: 8 Tausend Millionen, Siebenhunderttausend und 49.

§. 15.

Eine gegebene Zahl durch Ziffern richtig auszudrücken oder anzuschreiben.

Man schreibe jede Klasse, wie sie ausgesprochen wird, ergänze die fehlenden Stellen durch Nullen, und erinnere sich dabei der im vorigen Paragraphe gegebenen Regeln. Um z. B. die Zahl vier tausend, fünf und zwanzig Millionen, drei und sechzig Tausend und zwölf, durch Ziffern richtig darzustellen, schreibe man: 4,025′063,012.

§. 16.

So wie der Werth einer Ziffer um das Zehn-, Hundert-, Tausendfache gesteigert wird, wenn sie um eine, zwei, drei Stellen weiter links rückt, eben so muß umgekehrt der Werth einer jeden Ziffer um das Zehn-, Hundert-, Tausendfache vermindert werden, wenn sie um eine, zwei, drei Stellen weiter rechts gerückt wird. So wie ferner das Steigern des Lokalwerthes einer Ziffer gegen die Linke ohne Ende fortgesetzt werden kann, eben so kann das Vermindern desselben gegen die Rechte ohne Ende fortgesetzt werden, wobei aber dann die Stelle der primitiven oder absoluten Einheiten (§. 9) genau bezeichnet werden muß. Diese Bezeichnung geschieht durch ein zwischen den Einsern und der nächsten Stelle rechts gesetztes Komma, oder durch einen Punkt rechts ober der Ziffer, die in der Stelle der Einser steht. Dieses letztere Absonderungszeichen werden wir in der Folge immer gebrauchen.

Aus dem Gesagten folgt also, daß z. B. in 3·3 die 3 linker Hand die primitiven Einheiten bedeute, die 3 rechts aber nur der zehnte Theil der erstern sei. Man liest jene Zahl: drei Einheiten oder drei Ganze, und drei Zehntel. Will man bloß drei Zehntel anschreiben, so setze man 0·3 oder ·3. Eben so ist ·04 nur der zehnte Theil von 4.

und also der hunderte Theil von 4, weßwegen man auch vier Hundertel liest. Die dritte Stelle rechts vom Absonderungszeichen hat die Benennung Tausendtel, die vierte Zehntausendtel, die fünfte Hunderttausendtel, die sechste Milliontel, u. s. w.

Die auf die Einser rechts folgenden Ziffern heißen **Decimalen** und die Stellen, welche sie einnehmen, heißen **Decimalstellen**. Zugleich erhellt hieraus, daß die Decimalen Brüche bezeichnen. (§. 10.)

Es ist also

die Einh.	Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Milliontel u. s. w.
1=	10=	100=	1000=	10,000=	100,000=	1'000,000
	1=	10=	100=	1000=	10,000=	100,000
		1=	10=	100 =	1000=	10,000
			1=	10=	100=	1000
				1=	10=	100
					1=	10

u. s. w.

Also betragen immer zehn Theile unter einer Benennung rechter Hand einen Theil unter der links unmittelbar darauf folgenden Benennung; z. B. 10 Tausendtel = 1 Hunderttel, so wie in ganzen Zahlen. Da sich nun die Werthe der Decimalziffern gegen einander verhalten wie ganze Zahlen, so gelten auch für sie die Regeln der Numeration ganzer Zahlen (§. 14 und 15.)

Man liest also z. B. die Zahl 7345·2789 auf folgende Art: 7345 Ganze, 2 Zehntel, 7 Hunderttel, 8 Tausendtel und 9 Zehntausendtel, oder 7345 Ganze und 2789 (als ganze Zahl betrachtet) Zehntausendtel, oder endlich 73'452,789 Zehntausendtel, d. i. man liest die ganze Reihe Ziffern, als wenn sie eine ganze Zahl bildeten, und spricht am Ende die Benennung der letzten Ziffer rechts dazu aus.

§. 17.

Nachfolgendes Schema enthält demnach das allgemeine Gesetz der Numeration in Ganzen und Decimalen:

	Millionen																	Milliontel						
	Tausend						Tausend								Tausendtel						Tausend			
u. s. w.	H,	Z,	E,	H,	Z,	E,	H,	Z,	E,	H,	Z,	E,	Ztl,	Htl,	E,	Z,	H,	E,	Z,	H,	E,	Z,	H,	u. s. w.
	11te	10te	9te	8te	7te	6te	5te	4te	3te	2te	1ste	0te	1ste	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te	10te	11te	Stelle.

Aus diesem Schema sieht man sogleich, daß Zehner und Zehntel, Hunderte und Hunderttel, Tausende und Tausendtel, u. s. w., Millionen und Milliontel, u. s. w., Billionen und Billiontel, u. s. f. gleichweit von der Ziffer der Einser abstehen, wie aus den darunter stehenden Zahlen (Anzeiger oder Indices genannt) ersichtlich ist.

§. 18.

Es ist für sich klar, daß eine ganze Zahl nicht geändert wird, wenn man ihr links noch so viele Nullen anhängt. So z. B. ist 8 = 08 = 008 und 375 = 000375. Der Werth der Decimalen aber bleibt ungeändert, wenn man denselben rechts noch so viele Nullen anhängt, z. B.:

$$8·6 = 8·60 = 8·600 = 0008·60000 \text{ und } 0·7 = 0·70 = 0·700 = 0·7000,$$

wie aus dem im §. 16 beigefügten Schema erhellt. Es ist also auch umgekehrt ·3500 = ·350 = ·35 = 0·35, d. h. der Werth der Decimalen wird nicht geändert, wenn man die rechts angehängten Nullen wegläßt. — Durch das Anhängen von 1, 2, 3, ... Nullen nimmt zwar die Menge der Theile um das 10, 100, 1000fache ꝛc. zu, aber die Menge der Theile werden auch 10, 100, 1000mal kleiner, wie aus §. 16 deutlich hervorgeht. Umgekehrt verhält es sich, wenn man die Nullen rechts wegläßt.

Durch das Anhängen und Weglassen der Nullen wird daher bloß die Benennung der Decimalen geändert.

§. 19.

Größen lassen sich vermehren oder vermindern, je nachdem man zu dem, die Quantität konstituirenden Mannigfaltigen gleichartige Theile hinzufügt, oder davon hinwegnimmt, wodurch zwei verschiedene Rechnungsarten oder Species, nämlich die Addition und Subtraktion, bestimmt werden. Hat man dieselbe Größe mehrmals zu sich selbst zu addiren, oder hat man zu untersuchen, wie oft sich eine bestimmte Größe von einer andern gegebenen abziehen lasse, so gibt die Arithmetik besondere Vorschriften, um schneller zum gesuchten Resultate zu gelangen, durch welche sie noch zwei andere Rechnungsarten, nämlich die Multiplikation und Division begründet, die also nur Abkürzungen der beiden ersten sind. Es gibt demnach vier Rechnungsarten oder Species, die auch Stammrechnungsarten genannt werden, weil alle arithmetischen Operationen am Ende darauf zurückgeführt werden können.

B. Die vier Species in ganzen unbenannten Zahlen.

I. Die Addition.

§. 20.

Erklärung.

Addiren heißt eine Zahl finden, die zweien oder mehreren gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist. Die gegebenen Zahlen heißen Summanden oder Additionsposten, die zu findende Zahl aber heißt Summe.

Die Summe ist also gleichsam das Ganze, und die Summanden sind die Theile desselben. Also lassen sich nur gleichartige Größen addiren, d. i. nur gleichartige Theile können zu einem Ganzen verbunden werden.

§. 21.

Aufgabe.

Was immer für ganze Zahlen zu addiren.

Auflösung.

1. Man setze die Summanden nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit, d. i. so unter einander, daß Einser unter Einser, Zehner

unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. w. zu stehen kommen, und mache unter die so angesetzten Summanden einen Strich, um diese von der Summe abzusondern.

2. Dann addire man die Columne der Einser, und setze die Summe derselben, wenn sie einzifferig ist, unter dem Striche an die Stelle der Einser; ist aber diese Summe zweizifferig, so setze man bloß die Einser derselben an die genannte Stelle, und die darin enthaltenen Zehner addire man zur Columne der Zehner. Die Einser der Summe der Zehner setze man unter dem Striche an die zweite Stelle, die Zehner jener Summe aber zähle man zu den Einheiten der nächst höhern Ordnung, und setze auf diese Art die Operation fort, um die verlangte Summe zu erhalten.

3. Sind sehr viele Zahlen zu addiren, so erleichtert man sich die Arbeit dadurch, daß man die Summanden in zwei oder mehrere Abtheilungen bringt, jede Abtheilung für sich summirt, und die erhaltenen Partialsummen dann für sich addirt, um die verlangte Hauptsumme zu erhalten.

B e i s p i e l e.

I. Man soll die Zahlen 506, 71 und 3012 addiren. Man setze

506	
71	Summanden,
3012	
3589	Summe.

II. Man addire die Zahlen 7328, 4018, 736, 48392 und 3816. Man setze

		oder auch		
7328		7328		
4018		4018		
736	Summanden,	736		
48392		48392		
3816		3816		
64290	Summe.	30	Einser	
		16_0	Zehner	
		21_{00}	Hunderte	Summe,
		22_{000}	Tausende	
		4_{0000}	Zehntausende	
		64290	Totalsumme.	

Da diese Summe alle Einser, Zehner, Hunderte, u. s. w. der gegebenen Summanden enthält, so muß sie nothwendig die wahre Summe sein.

Um sich über die Richtigkeit der gefundenen Summe zu beruhigen, wiederhole man die Addition noch ein Mal, so zwar, daß man das zweite Mal von oben herab addirt, wenn man das erste Mal von unten hinauf addirt hat, und umgekehrt. Erhält man in beiden Fällen dieselbe Summe, so ist die Addition wahrscheinlich richtig verrichtet worden.

Anmerkung. Der Anfänger muß sich in der Summation zweier Zahlen, die entweder beide einzifferig sind, oder deren eine zweizifferig, die andere aber nur einzifferig ist, fleißig üben, um sich die nöthige Fertigkeit zu erwerben. Es gibt viele Kunstgriffe hierbei, die sich aber am besten durch Uebung erlernen lassen.

II. Die Subtraktion.

§. 22.

Erklärung.

Zwei gegebene Zahlen von einander subtrahiren oder abziehen, heißt eine neue Zahl finden, die zu der abzuziehenden Zahl addirt, die andere gegebene Zahl hervorbringt. Die letztere Zahl, die also die Summe der beiden andern ist, heißt Minuend, die andere gegebene Zahl aber heißt Subtrahend, und die gesuchte Zahl wird Rest oder Unterschied, Differenz, genannt, weil sie die Verschiedenheit der gegebenen Zahlen ihrer Quantität nach ausdrückt; z. B. $8 - 5 = 3$, weil $8 = 5 + 3$.

§. 23.

Aufgabe.

Zwei gegebene Zahlen von einander abzuziehen.

Auflösung.

1. Man setze unter den Minuend den Subtrahend nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit, d. h. so, daß Einser unter Einser, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe einen Querstrich darunter.

2. Dann ziehe man von der Rechten gegen die Linke die einzelnen Ziffern des Subtrahends von denen des Minuends der Ordnung nach ab, und setze den jedesmaligen Rest in gerader Linie unter die entsprechenden Zifferstellen.

3. Ist eine oder die andere Ziffer des Subtrahends größer als die entsprechende Ziffer im Minuend, so borge man von der Ziffer der nächst höhern Ordnung im Minuend eine Einheit, und bezeichne diese Ziffer mit einem Punkte, zum Zeichen, daß sie nun um eine Einheit kleiner sei; diese geborgte Einheit enthält zehn Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung; man vermehre daher die Ziffer, von welcher abgezogen werden soll, um zehn Einheiten, und subtrahire dann von dieser Summe die darunter stehende Ziffer des Subtrahends.

4. Wenn auf die Ziffer, von welcher nicht abgezogen werden kann, eine oder mehrere Nullen folgen, so gehe man bis zu der nächsten bedeutenden Ziffer, von welcher eine Einheit geborgt, und in zehn Einheiten der nächst niedrigern Ordnung aufgelöst wird. Nimmt man nun von diesen wieder eine Einheit hinweg, so bleiben an der vorigen Stelle nur noch neun, und die folgende Zifferstelle wird zehn, wovon aber wieder eine Einheit in Einheiten der nächst niedrigern Ordnung aufgelöst wird. Daher verwandelt sich auch diese Stelle in eine 9, und so werden aus allen Nullen lauter Neuner, bis auf die letzte Nulle rechts, die zehn wird, wenn von der vorhergehenden Ziffer die entsprechende Ziffer des Subtrahends abgezogen werden kann; im entgegengesetzten Falle aber wird auch aus jener Nulle eine 9.

Beispiele.

I. 7854679 Minuend,
831243 Subtrahend,

7023436 Differenz.

Man spricht hier: 3 von 9 bleiben 6, 4 von 7 bleiben 3, 2 von 6 bleiben 4, u. s. w.

. . . . .
II. 9213457 Minuend,
2856839 Subtrahend,

6356618 Rest.

Hier sagt man: 9 von 17 bleiben 8, 3 von 4 bleibt 1, 8 von 14 bleiben 6, 6 von 12 bleiben 6, 5 von 10 bleiben 5 (denn da die fünfte Stelle nur eine Einheit enthält, diese aber zur vierten Stelle geborgt wurde, so blieb in der fünften Stelle eine Null, u. s. w.

. . .
III. 7006 Minuend,
3689 Subtrahend,

3317 Unterschied.

Es ist nämlich.

7006 = 7000 + 6 = 6000 + 1000 + 6 = 6000 + 900 + 90 + 10 + 6 =

Minuend	6000 +	900 +	90 +	16	und 3689 =
Subtrahend	3000 +	600 +	80 +	9	
Rest	3000 +	300 +	10 +	7	= 3317.

. . . .

IV. 830400071002 Minuend,
95789428765 Subtrahend,

734610642237 Differenz.

Anmerkung. Es ist in der Ausübung immer vortheilhaft, die Subtraktion durch die Addition zu verrichten, indem man auf folgende Art verfährt. Man addire zu jeder Ziffer des Subtrahends so viele Einheiten, daß man eine Zahl erhält, die der entsprechenden Ziffer des Minuends entweder gleich ist, oder die in der Stelle der Einser eine Ziffer hat, welche derselben gleich ist. Das erstere ist der Fall, wenn die Ziffer des Subtrahends kleiner ist, als die entsprechende des Minuends, letzteres aber, wenn jene größer ist als diese. Die zu addirende Ziffer setze man unter den Querstrich als Rest. Ist die Summe dieses Restes und der entsprechenden Ziffer des Subtrahends zweizifferig, so vermehre man die nächst höhere Stelle des Subtrahends um eine Einheit, und verfahre wie vorhin. Diese Operation wird durch folgendes Beispiel deutlich werden:

7630825 Minuend,
— 2876452 Subtrahend,

4754373 Rest.

Man spricht nämlich: 2 und 3 ist 5 (die 3 schreibe man gleich an); 5 und 7 ist 12; 1 und 4 ist 5, und 3 ist 8; 6 und 4 ist 10; 1 und 7 ist 8, und 5 ist 13; 1 und 8 ist 9, und 7 ist 16; 1 und 2 ist 3, und 4 ist 7.

Diese Methode ist vorzüglich bei der Division und dann vortheilhaft, wenn von einer Zahl mehrere gegebene Zahlen abzuziehen sind. Wenn z. B. von der Zahl 875227 die Zahlen 234528, 85374, 26112, 8729 und 4514 abzuziehen wären, so setze man:

875227 Minuend,
234528
85374
26112 } Subtrahende,
8729
4514

515970 Rest.

Man addirt nämlich die gleichnamigen Einheiten der Subtrahende, zählt gleich so viele Einheiten hinzu, daß man eine Zahl erhält, die in der Stelle der Einser die entsprechende Ziffer des Minuends hat, und setzt die hinzugezählten Einheiten als Rest unter den Strich. Die Zehner der genannten Summe werden zu den Einheiten der nächst höheren Ordnung addirt, und dann verfährt man wie vorhin.

Man könnte, wie es gewöhnlich geschieht, auch so verfahren, daß man die Subtrahende addirt, und die erhaltene Summe vom gegebenen Minuend abzieht; nämlich:

875227 Minuend,
— 359257 Summe der Subtrahende,

515970 Rest.

Um zu prüfen, ob man richtig subtrahirt habe, addire man die gefundene Differenz zum Subtrahend, so muß die Summe dem Minuende gleich sein. (§. 22.)

§. 24.

Proben für die Addition.

1. Zieht man von der gefundenen Summe jede einzelne Summande ab, und bleibt kein Rest, so ist wahrscheinlich richtig addirt worden (§. 6, 4).

2. Eine andere Probe ist (§. 21) schon angegeben worden.

3. Man addire von der Linken gegen die Rechte, subtrahire die jedesmalige Summe der übereinander stehenden Ziffern von den gleichnamigen Ziffern der gefundenen Summe, und bemerke unterhalb jeder Stelle den Rest, welcher als Ziffer der Zehner zur nächsten rechts folgenden Ziffer gedacht wird. Bleibt am Ende kein Rest, so ist wahrscheinlich richtig addirt worden.

7825
23432
58346 } Summanden,
4527

94130 Summe.
22120

4. Die sogenannte Neunerprobe besteht darin, daß man alle Ziffern der Summanden, ohne Rücksicht auf ihren Lokalwerth, addirt, aus der Summe alle Neuner wegwirft, und den Rest bemerkt. Eben so verfahre man mit den Ziffern der Summe, wo man, wenn diese Summe die wahre ist, denselben Rest finden muß. Denn, da

$10 = 9 + 1$, $20 = 18 + 2 = 9 + 9 + 2$,
$30 = 27 + 3 = 9 + 9 + 9 + 3$, u. s. w.; ferner da
$100 = 99 + 1 = 90 + 9 + 1$,
$200 = 100 + 100 = 90 + 9 + 1 + 90 + 9 + 1 =$
$90 + 90 + 9 + 9 + 1$, u. s. w., eben so
$1000 = 999 + 1 = 900 + 90 + 9 + 1$, u. s. f.;

so sieht man deutlich, daß die Ziffern der Summanden wie Ziffern der Einser betrachten, d. i. den Stellenwerth der Ziffern nicht berücksichtigen, nichts anderes sei, als alle Neuner aus den durch sie bezeichneten Zahlen wegwerfen. Läßt man demnach auch noch aus der Summe der Ziffern, als lauter Einser betrachtet, alle enthaltenen Neuner hinweg, so wirft man sowohl aus den Summanden, als auch aus ihrer Summe alle in ihnen enthaltenen Neuner weg, d. h. man nimmt, wenn die Hauptsumme wirklich den gegebenen Summanden zusammengenommen, gleich ist, von Gleichem Gleiches hinweg, und folglich müssen die beiden Reste gleich sein (§. 6, Grunds. 8).

Soll aber die Neunerprobe zuverläßig sein, so muß man ausdrücklich bemerken, wie oft man in den Summanden einen Neuner weggeworfen habe. Hat man denn aus der Summe eben so viele Neuner weggelassen, und die gefundenen Reste sind gleich, so ist die Summe sicher die wahre. So z. B. ist $74 + 85 = 159$.

Nun ist $7 + 4 = 11 = 9 + 2$
$8 + 5 = 13 = 9 + 4$

Nach Wegwerfung der Neuner ist der Rest $= 4 + 2 = 6$. In der Summe ist $1 + 5 + 9 = 6 + 9$, und nach Weglassung der 9 ist der Rest ebenfalls 6. Denselben Rest 6 findet man aber auch, wenn man die falsche Summe 195, oder 168, oder 249 u. s. w. annehmen würde. Bemerkt man aber, daß man in der Summande 74, eigentlich 8 Neuner, und in der andern Summande 9 Neuner, also in beiden $8 + 9 = 17$ Neuner hinweggeworfen habe, so ist die Summe nur die wahre, in welcher nach Hinweglassung von 17 Neunern der Rest 6 bleibt, und diese ist 159; denn

$159 = 100 + 50 + 9 = 99 + 1 + 45 + 5 + 9 =$
$(99 + 45 + 9) + 1 + 5 =$ 11 Neunern + 5 Neunern + 1 Neuner + 6 =
17 Neunern + 6.

Hätte man 195 als Summe angenommen, so würde sich's zeigen, daß man aus ihr 21 Neuner wegwerfen könne, und daß sie also zu groß sei. Nimmt man auf die gemachte Bemerkung keine Rücksicht,

so ist die Neunerprobe trüglich, thut man es aber, so ist sie zuverläßig; allein dann ist sie, so wie die erste angegebene Probe, zu zeitraubend, und ich rathe dem Anfänger daher die in Nr. 3 angegebene Probe, als die zweckmäßigste an.

Viele Schriftsteller lehren auch noch eine Fünfer-, Siebner- und Eilferprobe, die ich aber hier mit Stillschweigen übergehe.

III. Die Multiplikation.

§. 25.

Erklärung.

Gegebene Zahlen mit einander multipliciren, heißt eine neue Zahl finden, die aus einer der gegebenen eben so entsteht, wie die andere gegebene Zahl aus der Einheit. Z. B. 5 mit 4 multipliciren heißt nichts anders, als eine Zahl aus 5 eben so entstehen lassen, wie 4 aus der Einheit entsteht, d. i. die gesuchte Zahl wird erhalten, wenn man 5 so oft als Summande setzt, wie oft die Einheit als Summande genommen werden muß, um 4 zu erhalten. Da nun $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, so ist nothwendig die gesuchte Zahl $= 5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Umgekehrt, da $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ist, so muß die gesuchte Zahl auch $= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ sein.

Die Multiplikation ist also eine abgekürzte Addition.

Die gegebenen Zahlen heißen Faktoren, und zwar die eine (gewöhnlich die größere) Multiplikand, die andere aber Multiplikator, und das durch die Multiplikation gefundene Resultat heißt Produkt oder Faktum.

Das Produkt ist demnach das Sovielfache vom Multiplikand, das Wievielfache von der Einheit der Multiplikator ist.

Das Zeichen der Multiplikation ist ein liegendes Kreuz ($\times$) oder ein Punkt; z. B. $4 . 5 = 4 \times 5 = 20$, und wird gelesen: 4 multiplicirt mit 5, oder 4 mal 5 ist 20. Hier sind 4 und 5 die Faktoren, und 20 das Produkt.

§. 26.

Eine ganze Zahl wird durch 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt, wenn man ihr zur Rechten 1, 2, 3, ... Nullen anhängt; denn dadurch rücken alle Ziffern um 1, 2, 3, ... Stellen mehr links, und erhalten einen 10, 100, 1000fach 2c. höhern Werth (§. 13); z. B:

$8 \times 10 = 80$, $8 \times 100 = 800$, $8 \times 1000 = 8000$, u. s. w

Eben so

$24 \times 10 = 240$, $24 \times 100 = 2400$, $24 \times 1000 = 24000$, u. s. f.

Eine Zahl durch 1 multipliciren, heißt sie einmal durch Addition setzen, welches durch jede Zahl schon an und für sich ausgedrückt wird, und man kann daher jede Zahl als durch 1 multiplicirt betrachten; z. B. 7 = 1 . 7.

Aus dem Begriffe der Multiplikation folgt, daß ein Produkt = 0 sei, wenn einer der Faktoren = 0 ist.

§. 27.

Man könnte zwar jede Multiplikation ganzer Zahlen in eine wiederholte Addition des einen Faktors auflösen, aber die Operation selbst würde sehr mühsam sein, und viele Zeit fordern. Zur Erleichterung und Beschleunigung der Multiplikation dient das sogenannte Einmal-Eins, oder der Pythagoräische Rechentisch (vom Erfinder Pythagoras so genannt), wo bekanntlich das Produkt aus was immer für zwei einzifferigen Zahlen enthalten ist.

Das Einmal-Eins, welches wir als bekannt voraussetzen, muß man dem Gedächtnisse wohl einprägen, um mit Fertigkeit multipliciren zu können.

§. 28.

Aufgabe.

Eine gegebene Zahl durch eine einzifferige Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire von der Rechten gegen die Linke alle Ziffern des Multiplikands, und setze das Produkt, wenn es einzifferig ist, genau unter die Stelle, von der es herrührt. Besteht aber das erhaltene Produkt aus zwei Ziffern, so setze man nur die Einser desselben, wie bei der Addition, an dieselbe Stelle, und addire die Zehner jenes Produkts zum folgenden Faktum. Ist dieses 10, 20, 30, . . . oder 0, so kommen die vom vorigen Produkte gebliebenen Zehner an die Stelle der Nulle.

Beispiele.

I. 3124 Multiplikand,	II. 7245 Multiplikand,
2 Multiplikator,	6 Multiplikator,
6248 Produkt.	43470 Produkt.

III. 4208106
7
―――――
29456742.

Das Beispiel I. ist für sich klar; beim zweiten sagt man: 6 mal 5 ist 30 (Einser), nämlich 3 Zehner und keine Einser; man setze deßhalb die Null an die gehörige Stelle, und behalte die drei Zehner in Gedanken; dann sagt man: 6 mal 4 ist 24, und die vorigen drei Zehner dazu geben 27 Zehner, nämlich 2 Hunderte und 7 Zehner, welche letztere wieder angeschrieben werden, die 2 Hunderte aber merkt man sich wieder, und addirt sie zu 6 mal 2, d. i. zu 12 Hunderten, wodurch man 14 Hunderte, oder 1 Tausend und 4 Hunderte erhält, und endlich sagt man: 6 mal 7 ist 42 und 1 macht 43 Tausende, welche ganz angeschrieben werden, weil im Multiplikand keine Ziffer mehr nachfolgt. Das Hauptprodukt ist also 43470.

Es ist nämlich $7245 = 7000 + 200 + 40 + 5$

$$\times\ 6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

$$\text{Produkt} = 42000 + 1200 + 240 + 30$$
$$= 43470.$$

Auf dieselbe Art verfährt man auch mit dem dritten Beispiele.

Da auf diese Art alle Theile des Multiplikands nach dem Gesetze des Multiplikators genommen werden, so ist klar, daß man den ganzen Multiplikand nach dem Gesetze des Multiplikators erhalten muß, d. i. man erhält den einen Faktor so oftmal, wie oft die Einheit in dem andern Faktor enthalten ist.

§. 29.

Aufgabe.

Was immer für zwei ganze Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung.

1. Man multiplicire alle Ziffern des einen Faktors durch jede einzelne Ziffer des andern Faktors, nach §. 28. Das Produkt aus jeder Ziffer des einen Faktors in den ganzen andern Faktor heißt Partialprodukt, oder Theilprodukt.

2. Die erhaltenen Partialprodukte setze man nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit unter einander, indem man den Lokalwerth des Multiplikators immer berücksichtigt.

Die Summe der erhaltenen Partialprodukte ist das verlangte Hauptprodukt. Es ist also einerlei, mit welcher Ziffer des Multiplikators man zuerst multiplicirt, und in welcher Ordnung man die Partialprodukte erzeugen will, sobald man nur den Stellenwerth der ersten Ziffer berücksichtigt.

4. Kommen im Multiplikator Nullen vor, so überspringt man sie (§. 26), und multiplicirt also bloß mit den bedeutenden Ziffern. — Hat der eine oder der andere Faktor, oder haben beide zugleich rechts Nullen, so multiplicire man so, als wenn die Nullen gar nicht vorhanden wären, und hänge dem gefundenen Produkte rechts so viele Nullen an, als in beiden Faktoren zugleich vorhanden sind. Z. B.:

$$230 \times 300 = 69000;$$ denn es ist

$$230 \times 300 = 23 . 10 \times 3 . 100 = 23 . 3 . 1000 = 69 . 1000 = 69000.$$

Beispiele.

I. Man multipicire 37284 mit 426.

Rechnung.
```
 37284 )
   426 ) Faktoren,
--------
 223704
  74568
149136
--------
15882984 Produkt.
```

Hier wurde zuerst mit 6, dann mit 2, und endlich mit 4 multiplicirt. Man kann aber auch umgekehrt verfahren, wie folgt:

```
   37284 )
     426 ) Faktoren,
----------
149136..
  74568
  223704
----------
15882984 dasselbe Produkt, wie oben.
```

Man könnte auch zuerst mit 2, dann mit 6, und endlich mit 4 multipliciren; nämlich:

```
   37284 )
     426 ) Faktoren,
----------
  74568.
 223704
149136
----------
15882984 das nämliche Produkt.
```

Ich habe absichtlich dieses Beispiel auf verschiedene Art behandelt, weil ich in der Folge zur Abkürzung der Rechnung mich nicht an die Ordnung der Ziffern des Multiplikators binden werde.

II.	4607008	Faktoren,
	2407	
	32249056	
	18428032	
	9214016	
	11089068256	Produkt.
III.	43072000	Faktoren,
	84060	
	258432	
	172288	
	344576	
	3620632320000.	

§. 30.

Sind mehrere Faktoren mit einander zu multipliciren, so suche man zuerst das Produkt von zweien, und multiplicire dieses mit dem dritten Faktor, das erhaltene Resultat mit dem vierten, u. s. w.; z. B. $4 \times 7 \times 3 \times 10 = 28 \times 3 \times 10 = 84 \times 10 = 840$. Es ist einerlei, in welcher Ordnung die Faktoren mit einander multiplicirt werden, wie in der Folge noch erhellen wird.

§. 31.

Probe für die Richtigkeit der Multiplikation.

Man addire, wie bei der Addition schon gezeigt wurde, alle Ziffern des Multiplikands sowohl, als des Multiplikators, ohne Rücksicht auf ihren Lokalwerth zu nehmen, werfe alle in diesen Summen enthaltenen Neuner weg, multiplicire die in den Faktoren gebliebenen Reste mit einander, und lasse die in diesem Produkte enthaltenen Neuner ebenfalls weg, den neuen Rest aber bemerke man sich. Ist nun das gefundene Produkt das wahre, so muß der Rest, den man erhält, wenn in demselben auf dieselbe Art alle Neuner weggeworfen werden, dem vorigen Reste gleich sein. Von der Gleichheit dieser Reste aber läßt sich nicht allgemein auf die Richtigkeit des Resultates schließen, wovon man sich leicht auf dieselbe Art überzeugen kann, wie §. 24, 4.

Anmerkung. Es ist für sich klar, daß das Produkt von den Faktoren abhänge, d. i. daß das Produkt um so größer werde, je größer die Faktoren sind, und umgekehrt. Aendert sich einer der Faktoren, während der andere Faktor beständig bleibt, so ändert sich auch das

Produkt, und zwar dergestalt, daß dieses mit jenem zugleich wächst oder abnimmt. Man wird aber auch einsehen, daß, wenn das Produkt dasselbe bleiben soll, der eine Faktor 2, 3, 4 . . . mal kleiner werden müsse, wenn der andere Faktor 2, 3, 4 . . . mal größer genommen werden soll, und umgekehrt. Z. B. $48 = 6 \times 8$. Soll nun der eine Faktor (6) doppelt so groß genommen werden, soll nämlich der eine Faktor $2 . 6 = 12$ sein, das Produkt aber ungeändert bleiben, so muß der andere Faktor (8) halbmal so groß genommen werden, d. i. er muß in 4 übergehen, und dann erhält man $12 \times 4 = 48$, also dasselbe Produkt. Will man aber ein Produkt (z. B. $48 = 6 . 8$) 2, 3, 4 . . . mal größer haben, so braucht man nur das 2, 3, 4 . . . fache des einen Faktors zu nehmen, und dann bleibt der andere Faktor ungeändert. Will man also das 3fache von $48 = 6 . 8$, so nehme man z. B. von 6 das 3fache, und lasse den andern Faktor (8) ungeändert, denn $3 . 6 = 18$ und $18 . 8 = 144 = 3 . 48$.

IV. Die Division.

§. 32.

Erklärung.

1. Eine Zahl durch eine andere dividiren oder theilen, heißt eine neue Zahl finden, welche anzeigt, wie oft die zweite Zahl in der ersten enthalten ist.

Die erste Zahl, welche getheilt werden soll, heißt der Dividend; die zweite aber, mit welcher man dividirt, heißt der Theiler oder Divisor, und die gesuchte dritte Zahl der Quotus oder Quotient.

2. Da nun eine Zahl in der andern so oft enthalten ist, wie oft jene von dieser abgezogen werden kann, so erhellt, daß man die Division auch eine abgekürzte Subtraktion nennen könne. Der Quotient enthält daher immer so viele Einheiten, wie oft der Divisor vom Divi end abgezogen werden kann. So z. B. kann man 2 von 6 dreimal wegnehmen, oder 6 getheilt durch 2 gibt 3 als Quotienten.

3. Hieraus sieht man deutlich, daß die Division und Multiplikation gerade entgegengesetzte Rechnungsoperationen seien, so wie es die Subtraktion und Addition sind. Man kann demnach den Dividend als ein Produkt aus zwei Faktoren ansehen, von welchen einer bekannt ist (der Divisor) und der andere gesucht wird (der Quotient), und die Division allgemeiner auf folgende Art definiren: Eine Zahl durch eine andere dividiren, heißt eine neue Zahl (den Quo-

tienten) finden, die aus jener (dem Dividend) eben so entsteht, wie die Einheit aus dieser (dem Divisor).

4. Die Multiplikation und Division dienen sich also wechselseitig zur Probe. Man prüft nämlich die Multiplikation dadurch, daß man das gefundene Produkt durch einen der Faktoren dividirt, wo dann der andere Faktor als Quotient erscheinen muß. Von der Richtigkeit des durch Division gefundenen Resultates aber überzeugt man sich dadurch, daß man den gefundenen Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, wo das erhaltene Produkt genau dem Dividende gleich sein muß.

5. Das Zeichen der Division sind zwei über einander gesetzte Punkte (:), welches Zeichen so zwischen den Dividend und Divisor gesetzt wird, daß jener links, dieser aber rechts zu stehen kommt. Um also anzuzeigen, daß z. B. 12 durch 3 dividirt werden soll, schreibe man 12 : 3.

Man pflegt auch die Division durch einen horizontalen Strich, über welchen der Dividend, und unter welchen der Divisor gesetzt wird, anzudeuten. Z. B. $\frac{12}{3}$ wird gelesen, 12 getheilt durch 3.

Der praktische Rechner schreibt das vorige Beispiel öfters auch so an: $12 \Big| \frac{4}{\text{Quot.}}$, oder auch 4 |12| Quotus.

§. 33.

1. Da der Dividend als ein Produkt aus dem Divisor in den Quotienten betrachtet werden kann (§. 32, 3), so folgt von selbst, daß bei ungeändertem Dividende der Quotient um so größer werde, je kleiner der Divisor ist, und daß er um so kleiner werde, je größer der Divisor ist; d. h. wenn der Dividend derselbe bleibt, so muß der Quotient 2, 3, 4 . . . mal größer werden, wenn der Divisor 2, 3, 4 . . . mal kleiner wird, und der Quotus muß 2, 3, 4 . . . mal kleiner werden, wenn der Divisor 2, 3, 4 . . . mal größer wird (§. 31, Anm.).

2. Nimmt man den Dividend 2, 3, 4 . . . mal größer, d. i. multiplicirt man den Dividend mit 2, 3, 4, . . . und läßt den Divisor ungeändert, so wird auch der Quotient 2, 3, 4 . . . mal größer, und umgekehrt (§. 31, Anm.).

3. Wenn man also den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Quotient ungeändert, wie aus (1) und (2) erhellt.

§. 34.

Sind die Faktoren des Dividends, als Produkt betrachtet, ganze Zahlen, so ist diejenige ganze Zahl, welche mit dem gegebenen Divisor

multiplicirt, genau den Dividend gibt, der gesuchte Quotient. In diesem Falle ist die Division ein Messen, der Divisor heißt das Maß des Dividends, und den Divisor sowohl, als den Quotienten nennt man genaue oder aliquote Theile des Dividends, und diesen ein Vielfaches von jenen. Da z. B. $6:2=3$, weil $6=2.3$, so sind 2 und 3 aliquote Theile von 6; denn

$$2+2+2=2.3=6 \text{ und } 3+3=3.2=6.$$

Im Falle aber der Dividend aus zwei Faktoren besteht, von welchen nur der eine (der Divisor) eine ganze Zahl ist, so ist dieser kein aliquoter, sondern ein nicht genauer oder aliquanter Theil des Dividends, d. i. ein solcher Theil, durch dessen wiederholte Addition der Dividend nicht genau erhalten werden kann. Uebrigens sieht man ein, daß durch die wiederholte Addition des Divisors endlich doch eine solche Zahl erhalten werden müsse, daß der Unterschied zwischen dem Dividende und dieser Zahl kleiner ist als der Divisor. Jene Zahl nennt man dann das nächst kleinere Produkt, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor als Summande gesetzt werden müsse, um dieses letztgenannte Produkt zu erhalten, wird als Quotient betrachtet. Dividiren heißt also in diesem Falle nichts anderes, als eine solche ganze Zahl als Quotienten finden, die mit dem Divisor multiplicirt ein Produkt gibt, welches vom Dividend nicht um den ganzen Divisor verschieden ist. So z. B. ist $12=5.2+2$, und daher gibt 12, durch 5 getheilt, den Quotienten 2 als eine ganze Zahl, wo der Unterschied $12-2.5=12-10=2$ kleiner ist als der Divisor 5, welcher ein aliquanter Theil des Dividends 12 ist.

Hieraus geht nun hervor, daß die Regeln der Division allgemein dahin nur abzielen, eine ganze Zahl als Quotienten zu finden, die mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend entweder genau, oder doch zunächst gibt, in welchem Falle dann der Quotient immer der wahre ist. Der Unterschied zwischen dem Dividend und jenem nächst kleineren Produkte heißt der Rest der Division. — Das hier Gesagte enthält zugleich die Vorschrift, die Richtigkeit einer gemachten Division zu prüfen.

§. 35.

Da jede Zahl als ein Produkt aus sich selbst in die Einheit betrachtet werden kann (§. 26), so muß jede Zahl durch sich selbst dividirt, die Einheit als Quotienten geben, durch die Einheit dividirt aber sich selbst. So z. B. ist $4=1\times4$, also $4:4=1$ und $4:1=4$ (§. 32, 3).

§. 36.

Eine ganze Zahl wird durch 10, 100, 1000, u. s. w. dividirt, wenn man von der Rechten gegen die Linke 1, 2, 3, ... Ziffern abschneidet. Die links stehenden Ziffern bilden den Quotienten, und die abgeschnittenen den Rest, der durch den gegebenen Divisor noch zu theilen ist. Z. B. $4728 : 10 = 472\cdot8 = 472 + \frac{8}{10}$, denn

$$4728 = 472\cdot8 \times 10 = 472 \times 10 + 8.$$

Eben so

$$4728 : 100 = 47\cdot28 = 47 + \frac{28}{100}, \text{ denn}$$

$$4728 = 47\cdot28 \times 100 = 47 \times 100 + 28 \text{ (§. 34)}.$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellt schon aus §. 16.

§. 37.

Aufgabe.

Eine gegebene Zahl durch eine einzifferige Zahl zu dividiren.

Auflösung.

1. Ist der Dividend nur ein- oder zweizifferig, so ist der Quotient schon aus dem Einmal-Eins bekannt (§. 27 und §. 34).

2. Besteht aber der Dividend aus mehreren Ziffern, so verfahre man auf folgende Art:

a) Man untersuche, wie oft der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividends, oder wenn diese kleiner als der Divisor ist, in den zwei höchsten Ziffern desselben enthalten sei. Die Zahl, die dieses anzeigt, ist die erste (höchste) Ziffer des Quotienten. Mit diesem gefundenen Partialquotienten multiplicire man den Divisor, und ziehe das Produkt von jener Ziffer (oder jenen zwei Ziffern) des Dividends ab.

b) Zum gefundenen Reste setze man die nächst niedrigere Ziffer des Dividends herab, und dividire diese Zahl wieder durch den gegebenen Divisor, so erhält man die zweite Ziffer des Quotienten. Das Produkt aus dieser in den Divisor ziehe man wieder von der Zahl ab, welche man dividirt hat, und füge dem gefundenen Reste ebenfalls die nächst folgende Ziffer des Dividends zur Rechten bei, wodurch man den neuen Dividend erhält.

Auf diese Art setze man das Verfahren fort, bis alle Ziffern des Dividends nach und nach heruntergesetzt worden sind.

c) Sollte irgendwo das Produkt aus dem gefundenen Partialquotienten in den Divisor dem gebrauchten Dividend gleich sein, und also ein Rest = 0 gefunden werden, so setzt man die nächst niedrigere

Ziffer des Dividends allein herab, und dividirt, wie vorhin gesagt wurde. Wäre aber diese Ziffer des Dividends kleiner als der Divisor, so ist der Partialquotient Null, welche im Quotienten angesetzt werden muß, und dann schreibt man noch die nächste Ziffer des Dividends herab, und dividirt diese zweizifferige Zahl nach der vorgeschriebenen Art.

d) Bleibt bei der Subtraktion, wenn die letzte Ziffer des Dividends schon herabgesetzt worden ist, kein Rest, so ist dieß ein Zeichen, daß der Divisor genau im Dividende enthalten, daß also die Division ein Messen sei (§. 34). Bleibt aber ein Rest, der, wie sichs von selbst versteht, immer kleiner sein muß, als der Divisor, *so gibt der gefundene Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, ein Produkt, welches, um den genannten Rest vermehrt, dem Dividende gleich wird.* Es muß also der gefundene Quotient noch um etwas vermehrt werden, welches aber keine ganze Einheit mehr betragen kann, und daher eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch ist (§. 10). Dieser wird dadurch bezeichnet, daß man unter jenen Rest den Divisor setzt und durch einen Strich absondert.

Beispiele.

I. $23 : 5 = 4 + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}$ = Quotus.
— 20
3 Rest.

II. $8754 : 6 = 1\,459.$
— 6
27
— 24
35
— 30
54
— 54
0.

III. $743248 : 8 = 92906.$
— 72
— „23
— 16
„72
— 72
„„48
— 48
0.

IV. $280594 : 7 = 40084\frac{6}{7}.$
— 28
„„059
— 56
„34
— 28
6 Rest.

Man muß sich daran gewöhnen, die Produkte aus den gefundenen Partialquotienten in den Divisor gleich in Gedanken abzuziehen, um das viele Schreiben zu ersparen. Die Reste bemerkt man sich oberhalb oder unterhalb der entsprechenden Ziffern des Dividends. Z. B.:

468342 : 9 = 52038 und

1 0   7

745689 : 6 = $124281\frac{3}{6}$.

1 2 1 4 0 3

Da durch dieses Verfahren alle Ziffern des Dividends, mit Rücksicht auf ihren Lokalwerth, durch den Divisor getheilt werden, so ist leicht einzusehen, daß man auf diese Art den richtigen Quotienten erhalte.

§. 38.

Aufgabe.

Eine gegebene mehrzifferige ganze Zahl durch eine andere mehrzifferige ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung.

1. Man schneide im Dividende von der Linken gegen die Rechte so viele Ziffern ab als nöthig sind, daß der Divisor wenigstens einmal in denselben enthalten sei. Zuerst schneidet man im Dividende eben so viele Ziffern ab, als der Divisor Stellen hat, wo sich dann durch bloße Vergleichung ergibt, ob der Divisor in der abgeschnittenen Zahl enthalten sei oder nicht. Im letzten Falle schneidet man noch eine Ziffer mehr im Dividende ab.

Nun untersuche man, wie oft der Divisor in der links abgeschnittenen Zahl enthalten sei, wobei man sich die Arbeit dadurch erleichtert, daß man versucht, wie oft die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten, oder in den zwei höchsten Ziffern des Dividends enthalten sei. Die Ziffer, welche dieses anzeigt, ist die erste (höchste) Stelle des Quotienten. Diese erste Ziffer des Quotienten hat denselben Lokalwerth, welchen die niedrigste abgeschnittene Stelle des Dividends hat.

2. Das Produkt aus der ersten gefundenen Ziffer des Quotienten in den ganzen Divisor ziehe man dann von der im Dividende abgeschnittenen Zahl ab, und setze zum Reste die nächste Ziffer des Dividends herab, so erhält man den zweiten Partialdividend.

3. Nun untersuche man, wie oft dieser neue Dividend den Divisor enthalte, und bemerke sich die Zahl, welche dieses anzeigt, als zweite Ziffer des Quotienten. Das Produkt aus dieser Ziffer des Quotus in den ganzen Divisor ziehe man vom letzten Dividend ab, so bildet der Rest mit der nächsten Stelle des Dividends den neuen Partialdividend.

4. Die nämliche Operation wiederhole man so lange, bis man alle Ziffern des Dividends nach und nach herabgesetzt hat.

5. Wenn der Partialdividend einmal kleiner sein sollte als der Divisor, so notire man im Quotienten eine Null, und setze gleich die nächste Stelle des Dividends zum vorigen Partialdividend herab.

6. Ist der Divisor genau im Dividend enthalten, so darf am Ende kein Rest bleiben; im entgegengesetzten Falle aber bleibt eine Differenz, die aber immer kleiner sein muß als der Divisor, wenn der Quotient möglichst groß genommen wurde.

7. Zeigt sich irgendwo in der Operation, daß das Produkt aus der gefundenen Ziffer des Quotienten in den Divisor größer sei, als der Partialdividend, und daß es also von diesem nicht abgezogen werden könne, so ist dieß ein Zeichen, daß man den Quotienten zu groß genommen habe, daß man ihn also kleiner nehmen müsse. Bleibt aber nach der Subtraktion jenes Produktes ein Rest, der noch größer als der Divisor ist, so ist es ein Zeichen, daß man den Quotienten zu klein genommen habe, und daß man ihn daher größer nehmen müsse.

8. Aus der Benennung, d. i. aus dem Lokalwerthe der höchsten Stelle des Quotienten erkennt man immer, aus wie vielen Ziffern der ganze Quotient bestehe. Kommt z. B. bei der ersten Division die Stelle der Einser des Divisors unter die Stelle der Tausende des Dividends, so fängt auch der Quotient mit Tausenden an, oder der Quotient besteht aus vier Ziffern.

9. Haben Dividend und Divisor am Ende Nullen, so schneide man von beiden gleichviele Nullen ab, und dividire dann nach der gegebenen Vorschrift, denn dadurch wird der Quotient nicht geändert (§. 33, 3 und §. 36).

10. Hat bloß der Divisor am Ende eine oder mehrere Nullen, so lasse man diese hinweg, und dividire durch diesen abgekürzten Divisor den Dividend, nachdem man in demselben rechts so viele Ziffern abgeschnitten hat, als der Divisor Nullen hatte; denn hierdurch wird der Dividend zehn-, hundert-, tausendmal kleiner, aber auch der Divisor wird durch das Hinweglassen der Nullen 10, 100, 1000 . . . mal kleiner, und folglich bleibt der Quotient ungeändert (§. 33, 3).

Die abgeschnittenen Ziffern aber müssen zum letzten Reste herabgesetzt werden, um den ganzen Rest zu erhalten, der durch den ganzen ungeänderten Divisor noch zu theilen ist.

Beispiele.

I. 1030,216 : 253 = 4072 (Quotient).
— 1012
„„1821
— 1771
„506
— 506
0.

Hier mußten gleich bei der ersten Division vier Stellen im Dividend abgeschnitten werden, obgleich der Divisor nur drei hat, weil $103 < 253$ ist. Eigentlich ist 2 in 10 fünf Mal enthalten, aber man sieht sogleich, daß dieser Quotient zu groß ist, denn 25 in 103 ist nur 4 Mal enthalten. Zum ersten Reste 18 wurde die nächste Stelle 2 herabgesetzt; weil aber dann der Partialdividend $182 < 253$ war, so wurde im Quotienten eine Null angesetzt, und gleich die folgende Ziffer des Dividends herabgesetzt, wodurch der Partialdividend 1821 wurde. Spricht man nun, 2 in 18 ist 9 mal enthalten, so zeigt sich, daß dieser Quotient viel zu groß sei; man sage also lieber, 25 in 182 ist 7 mal enthalten, u. s. w.

II. 60798600 : 72900 = 6079,86 : 729 = 834.
— 5832
„2478
— 2187
„2916
— 2916
0.

III. 8745,6,74 : 908,00 = $96\frac{28874}{90800}$ (Quotient).
— 8172
„5736
— 5448
„288 74.

Anfänger müssen sich auch hier wieder fleißig üben, die Produkte aus den gefundenen Ziffern des Quotienten in den Divisor gleich bei der Multiplikation von dem entsprechenden Dividende in Gedanken abzuziehen, und bloß die Reste zu notiren. Z. B.:

Divisor.	Dividend.	Quotient.
7208	9823,467	$1362\frac{6171}{7208}$
	26154	
	45306	
	20587	
	6171	

Dieser Ansatz ist in der Division der gewöhnlichste.

In der Ausübung ereignet es sich nicht selten, daß sehr viele Zahlen durch denselben Divisor zu theilen sind. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, sich eine kleine Tafel der Vielfachen des Divisors bis zum Neunfachen desselben zu verfertigen, wodurch man in den Stand gesetzt wird, den gehörigen Quotienten immer richtig zu bestimmen, und man erspart überdieß jedesmal die Multiplikation, weil man das entsprechende Produkt nur aus der Tafel nehmen darf. Sind z. B. viele Zahlen durch 712 zu dividiren, so verfertige man sich nachstehende Tafel:

Vielfache des Divisors.

1faches	712
2 „	1424
3 „	2136
4 „	2848
5 „	3560
6 „	4272
7 „	4984
8 „	5696
9 „	6408

Man theile mit Benützung dieser Tafel die Zahlen 7856, 598456, 2078347, 48369, 1060084, . . . durch 712. Der Gebrauch der Tafel erhellt von selbst.

§. 39.

Proben für die Division.

1. Die eigentliche vollkommen richtige Probe ist schon im §. 32 und §. 34 angegeben worden.

2. Wenn man vom Dividende den etwa gebliebenen Rest abzieht, so kann man die im §. 31 angegebene Neunerprobe gebrauchen, wie auch §. 32 von selbst erhellt.

§. 40.

Rechnungsvortheile bei der Multiplikation ganzer Zahlen.

1. Hat der eine Faktor eine Stelle mit einem Einser besetzt, so läßt man den andern Faktor gleich als erstes Partialprodukt stehen, multiplicirt mit den übrigen bedeutenden Ziffern, und setzt die Partialprodukte nach ihrem Lokalwerthe unter einander. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 74368 \times 148 \\ 297472 \\ 594944 \\ \hline 11006464\ \text{Produkt.} \end{array}$$

Die Multiplikation kann man sich hier noch dadurch erleichtern, daß man das zweite Partialprodukt, welches das Vierfache des Multiplikands ist, bloß mit 2 multiplicirt, um das Achtfache des Multiplikands zu erhalten.

2. Auch ist es überflüssig, das letzte Partialprodukt wirklich anzusetzen, weil man die Summe der übrigen Partialprodukte gleich dazu addiren kann, und auf diese Art das Hauptprodukt erhält. Z. B.:

$$\begin{array}{l} 49853 \times 1356 \\ 149559 \\ 249265 \\ \hline 67600668 \text{ Produkt.} \end{array}$$

Man läßt nämlich hier den Multiplikand gleich als erstes Partialprodukt stehen, multiplicirt dann mit der 3 des Multiplikators, und rückt das Produkt um eine Stelle rechts heraus, weil die 3 in Bezug auf die 1 um eine Stelle rechts steht; ferner multiplicirt man mit der 5 des Multiplikators, und rückt das Produkt aus demselben Grunde wieder um eine Stelle weiter rechts; endlich multiplicirt man den Multiplikand mit der 6 des Multiplikators, und rückt abermals das Produkt um eine Stelle gegen die Rechte hinaus, addirt aber, nachdem man die Querlinie gezogen hat, zu den einzelnen Ziffern dieses Produktes jedesmal die gleichnamigen Ziffern der ersten Partialprodukte, indem man spricht: 6 mal 3 gibt 18, bleibt 1 — nachdem man die 8 an die Stelle der Einser gesetzt hat —; 6 mal 5 gibt 30 und 1 sind 31, und 5 sind 36, bleiben 3 (die 6 wird an die Stelle der Zehner geschrieben); 6 mal 8 sind 48 und 3 sind 51, und 6 sind 57 und 9 sind 66, bleiben 6; 6 mal 9 sind 54 und 6 sind 60, und 2 sind 62 und 5 sind 67, und 3 sind 70, bleiben 7; 6 mal 4 sind 24 und 7 sind 31 und 9 sind 40, und 5 sind 45 und 5 sind 50, bleiben 5; 5 und 4 sind 9 und 9 sind 18 und 8 sind 26, bleiben 2 u. s. f. Daß man bei der Addition die Summe zweier oder mehrerer Ziffern in Gedanken auf einmal zusammen nehmen könne, versteht sich von selbst. — Dieses Vortheiles werden wir uns künftig immer bedienen.

3. Wenn man mit einer Zahl zu multipliciren hat, die sich in Faktoren zerlegen läßt, so multiplicire man mit diesen, weil dadurch die Addition der Partialprodukte erspart, und also eine Gelegenheit zu fehlen, vermieden wird. Statt z. B. durch 45 zu multipliciren, multiplicire man durch 9, und das erhaltene Produkt dann durch 5, oder umgekehrt; denn das Neunfache des Multiplikands fünfmal, oder das Fünffache neunmal genommen gibt das 45fache. Z. B.

$$\begin{array}{l} 73462 \times 45 \\ \hline 661158 \quad 9 \\ \hline \qquad\qquad \times 5 \\ 3305790 \text{ Produkt.} \end{array}$$

4. Anstatt durch 25 oder 125 zu multipliciren, denke man dem Multiplikand 2 oder 3 Nullen angehängt, und dividire dann durch 4 oder 8, so ist der Quotient das verlangte Produkt; denn durch das Anhängen von 2 Nullen multiplicirt man den Multiplikand durch 100, und erhält also, weil $100 = 4.25$ ist, ein viermal zu großes Produkt, welches durch die Division mit 4 in das verlangte Produkt verwandelt wird. Eben so sieht man die Richtigkeit des Verfahrens bei dem zweiten Falle ein, weil $1000 = 8.125$, also $125 = \frac{1000}{8}$ ist. Z. B.

$$\begin{array}{l} 7436_{00} \times 25 \\ \hline \quad : 4 \\ 185900 \text{ Produkt,} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} 64327_{000} \times 125 \\ \hline \quad : 8 \\ 8040875 \text{ Produkt.} \end{array}$$

5. Die Multiplikation mit 11 läßt sich durch eine bloße Addition der Ziffern des Multiplikands von der Rechten gegen die Linke verrichten, wie aus folgendem Beispiele erhellt:

$$\begin{array}{l} 728469 \times 11 \\ 728469 \\ \hline 8013159 \text{ Produkt,} \end{array}$$

oder kürzer

$$\begin{array}{l} 728469 \times 11 \\ \hline 8013159 \end{array}$$

Man spricht nämlich: 9 ist 9, $9 + 6$ ist 15, $1 + 6 + 4 = 11$, $1 + 4 + 8 = 13$, $1 + 8 + 2 = 11$, $1 + 2 + 7 = 10$, $1 + 7 = 8$, wo, wie man sieht, immer nur die Einser der Summen im Produkte angesetzt, die Zehner aber zur nächsten Ziffer addirt werden. Uebrigens erhellt die Verfahrungsart aus Nro. 2 von selbst.

Beispiele zur Uebung.

I.

$$\begin{array}{l} 68230897 \times 11 \\ \hline 750539867 \text{ Produkt.} \end{array}$$

II. 4730286 × 44 (nach Nro. 3)

$$\begin{array}{l} 4730286 \times 44 \\ \hline \quad \times 11;\ 44 = 11 \,.\, 4 \\ 52033146 \\ \hline \quad \times 4 \\ 208132584 \text{ Produkt.} \end{array}$$

6. Sind die Ziffern des einen Faktors lauter Neuner (in der Stelle der Einser kann was immer für eine Ziffer sein), so hänge man dem andern Faktor rechts so viele Nullen an, als der erste Stellen hat,

multiplicire den Multiplikand mit der Zahl, welche zum Multiplikator noch addirt werden muß, um die nächst höhere dekadische Einheit zu erhalten, und ziehe das Produkt von dem mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirten Faktor ab, so ist die Differenz das verlangte Produkt. Z. B.:

437286.. × 98
—874572   100—2
42854028 Produkt.

Da nämlich 98 = 100 — 2 ist, so denke man sich dem Multiplikand 2 Nullen angehängt, wodurch das 100fache desselben erhalten wird; multiplicire nun den ungeänderten Multiplikand durch 2, und ziehe das Produkt vom 100fachen Multiplikand ab, so erhält man das 98fache desselben als richtiges Produkt.

Man kann noch kürzer verfahren, wenn man das Produkt aus jener Ergänzungszahl in den ungeänderten Multiplikand gleich in Gedanken abzieht; nämlich:

437286.. × 98
42854028   100—2

Beispiele zur Uebung.

I. 26548... × 99700
—79644   997 × 100 (Nro. 3)
Produkt = 2646835600   (1000—3) 100

II. 48072... × 9990
480239280   (1000 — 1) 10

III. 65028... × 989
—715308   1000 — 11
64312692 Produkt.

7. Sind alle Ziffern des Multiplikators, die höchste Stelle ausgenommen, lauter Neuner, so nehme man den Multiplikator um eine Einheit größer, verrichte mit diesem geänderten Faktor die Multiplikation, und ziehe von dem so erhaltenen Produkte den gegebenen Multiplikand ab. Z. B.:

47396 × 3999 = 47396 × (4000 — 1)
189584000
Produkt = 189536604.

Ist der Multiplikator mehrzifferig, und weicht seine Form von der vorhin erwähnten darin ab, daß seine niedrigste Stelle mit einer von 9 verschiedenen Ziffer besetzt ist, so verfährt man dennoch kürzer auf ähnliche Art, wie vorhin. Z. B.:

743650834 × 599997
4461905004000000 600000 − 3
4461882694474498 Produkt.

Ich habe hier den Multiplikand mit 600000 multiplicirt, und von diesem Produkte das Dreifache des Multiplikands gleich abgezogen. Auf diese Art haben wir nur zwei Reihen Ziffern zu schreiben, während man bei der gewöhnlichen Verfahrungsart sieben Reihen von Ziffern hätte schreiben müssen.

8. Die Multiplikation wird auch schneller verrichtet, wenn der Multiplikator eine vielzifferige Zahl ist, und zwei neben einander stehende Ziffern, als Zahl betrachtet, ein Vielfaches einer andern Ziffer bilden, indem man das aus dieser letzrern in den Multiplikand gefundene Partialprodukt mit der Zahl zu multipliciren hat, welche anzeigt, das Wievielfache jene zweizifferige Zahl von dieser andern Ziffer des Multiplikators sei. Bei Anschreibung des Produktes aber muß man genau den Lokalwerth der ersten Ziffer rechts berücksichtigen. Wäre z. B. eine Zahl durch 824 zu multipliciren, so multiplicire man zuerst durch 8, dann das erhaltene Produkt mit 3, und setze dieses neue Produkt dem ersten so unter, daß man mit der ersten Ziffer um zwei Stellen rechts hinausrückt, weil die Ziffer 4 von der 8 um zwei Stellen rechts steht.

Beispiele.

I. 7236 × 824
57888.. (nach Nro. 2)
5962464

II. 907423 × 6154
54,44538... (nach Nro. 2)
55 84281142 Produkt.

Es wurde hier nämlich gesagt: für 1 steht das Produkt schon da, dann wurde mit 6 multiplicirt, und das erhaltene Produkt mit 9, weil $54 = 6 . 9$ ist, die erste Ziffer aber um drei Stellen rechts von der 8 des vorigen Produktes angesetzt, weil die 5 des Multiplikators um drei Stellen rechts von der 8 desselben steht, und die Summe der beiden ersten Partialprodukte gleich eingezählt.

III. 360749.. × $\overset{b}{7}\overset{a}{\widehat{98}}\overset{c}{\widehat{42}}$
35353402
2525243.... (Nro. 2)
28802921658 Produkt.

Hier wurde zuerst nach Nro. 6 mit 98, dann mit 7 multiplicirt, und dann letzteres Produkt mit 6, weil 42 = 7 . 6.

Ich werde in den folgenden Beispielen, wie im letzten, die Ordnung, in welcher multiplicirt wird, durch Buchstaben bezeichnen, welche über die Ziffern des Multiplikators gesetzt werden.

$$\text{IV.}\qquad 9206483 \times \overset{a}{1}\overset{b}{\overbrace{18}}\overset{c}{\overbrace{121}}\overset{d}{\overbrace{32}}$$

```
 101271313
  73651864...
   1113984443..
 108748192451756
```

108748192451756 Produkt; denn es ist

121 = 11 × 11 und 32 = 8 × 4.

V. Welches Produkt geben die Faktoren

$$476530892 \times \overset{a}{\overbrace{97}}\overset{b}{\overbrace{25}}\overset{c}{\overbrace{125}}\overset{d}{\overbrace{75}}\overset{e}{\overbrace{194}}?$$

Es ist hier c = 5 . b; d = 3 . b; e = 2 . a.

Es gibt noch viele Rechnungsvortheile bei der Multiplikation, die sich aber am besten durch Uebung erlernen lassen.

§. 41.

Abgekürzte Multiplikation.

a) Nicht selten ist es bloß nothwendig, das Produkt zweier Zahlen, von einer bestimmten Stelle angefangen, zu wissen. In einem solchen Falle wäre es überflüssig und Zeitverlust, das ganze Produkt zu suchen; man verfahre daher auf folgende Art:

1. Man setze die Ziffer der Einser des Multiplikators unter diejenige Stelle des Multiplikands, welche im Produkte noch vorkommen soll, oder von welcher angefangen man das Produkt wissen will, und lasse die übrigen Ziffern des Multiplikators in umgekehrter Ordnung folgen.

2. Die Multiplikation wird jedesmal mit den zwei Ziffern angefangen, die gerade über einander stehen, und die erhaltenen Partialprodukte werden so unter einander gesetzt, als wären es bloße Additionsposten.

3. Damit das abgekürzte Produkt in der letzten Ziffer rechts nicht zu unrichtig werde, multiplicire man auch die Ziffer des Multiplikands, welche der gerade über dem entsprechenden Multiplikator stehenden Ziffer rechts vorhergeht, schreibe aber das Produkt nicht an, sondern zähle in Gedanken bis zu der nächst größern Zahl, die in der Stelle der Einser eine 4 hat, und addire die Zehner, welche diese Zahl bei

sich führt, zum ersten wirklich anzusetzenden Produkte. Diese hinzu addirten Zehner nennt man die **Korrektur**.

4. Wenn der Multiplikator, nachdem er dem Multiplikand, wie vorhin gesagt wurde, untergesetzt worden ist, rechts oder links leere Stellen über sich hat, so denke man sich dieselben mit Nullen besetzt; links ist eine Nulle hinreichend.

5. Will man die letzte Ziffer rechts genau haben, so sucht man im Produkte eine Stelle mehr, als verlangt wurde. Uebrigens wird das auf diese Art gefundene Produkt selten mehr als um eine Einheit von dem wahren Produkte in der letzten Ziffer rechts differiren.

Die Ziffern der Faktoren, welche unter einander stehen müssen, und mit denen die Multiplikation jedesmal begonnen wird, sollen in den folgenden Beispielen mit einerlei Buchstaben bezeichnet werden.

Beispiele.

```
       dcba    abcd
I.    73584 × 6759.
       9576
     ------
     441504
      51509
       3679
        662
     ------
     497354 Tausende.
```

Das Produkt wird von der Stelle der Tausende aufwärts verlangt.

Man sagt hier bei der Multiplikation mit 7 : 7 . 4 = 28, die nächst größere Zahl, die an der Stelle der Einser eine 4 hat, ist 34, gibt also 3 zur Korrektur; 7 mal 8 ist 56 und 3 zur Korrektur gibt 59; schreibt die 9 an, und multiplicirt dann auf gewöhnliche Art weiter. Bei der Multiplication mit 9 spricht man: 9 mal 5 ist 45, die nächste mit 4 anfangende Zahl ist 54, also 5 zur Korrektur; 9 mal 3 ist 27, und 5 gibt 32, u. s. w.

Man sieht in diesem Beispiele, daß die Einser des Multiplikators zuerst mit den Tausenden des Multiplikands, die Zehner des Multiplikators mit den Hunderten des Multiplikands, die Hunderte des Multiplikators mit den Zehnern des Multiplikands, und endlich die Tausende des Multiplikators mit den Einsern des Multiplikands multiplicirt wurden, und daß also die erste Ziffer jedes erhaltenen Partialproduktes den Lokalwerth Tausend habe. Hieraus leuchtet ein, warum diese Partialprodukte wie bloße Additionsposten unter einander gesetzt werden müssen.

```
            abcd     dcba
II.        35640 × 7045.  Das Produkt soll mit Hunderten
            5407                  abbrechen.
          ------
          249480
            1426
             178
          ------
          251084 Hunderte.
```

Hier wurden die Tausende (7) des Multialikators zuerst mit den Zehnteln des Multiplikands (welche hier 0 sind) multiplicirt; der zehnte Theil von Tausenden aber sind Hunderte, also, u. s. w. Die weitere Operation erhellt aus dem im ersten Beispiele Gesagten.

```
          abcde f     f edcba
III.     0067832 × 354769.  Man will das Produkt von den
          967453               Millionen aufwärts wissen.
         -------
           20350
            3392
             271
              47
               4
         -------
           24064 Millionen.
```

Die 9 gibt im Produkte nichts mehr. Warum? — Auf gewöhnliche Art multiplicirt, würde das Beispiel so stehen:

67832 × 354769

20349	6
3391	60
271	328
47	4824
4	06992
	610488
24064	690808

Was rechts von der vertikalen Linie steht, ist für unsere Aufgabe überflüssig.

b) Bei manchen Arbeiten wünscht man bisweilen nur die höchsten Ziffern eines Produktes zu wissen, wo es wieder Zeitverlust wäre, das ganze Produkt zu suchen. Man verfahre demnach auf folgende Art:

1. Man untersuche, ob das Produkt aus der höchsten Ziffer des Multiplikators in die höchste Ziffer des Multiplikands einzifferig oder zweizifferig sei. Im ersten Falle schneide man im Multiplikand von der Linken gegen die Rechte so viele Ziffern ab, als im Produkte verlangt werden, im andern Falle aber Eine Stelle weniger.

2. Dann setze man unter die niedrigste abgeschnittene Zifferstelle des Multiplikands die höchste Ziffer des Multiplikators, lasse die übri-

gen Ziffern in umgekehrter Ordnung folgen, und multiplicire dann abgekürzt, wie in Nro. a gelehrt wurde.

Beispiele.

```
     dcba       abcd
I.   13587 × 5893.
     3985
     ----
     6794
     1087
      122
        4
     ----
     8007
```

Man verlangt nur die vier höchsten Stellen des Produktes.

8007 Zehntausende; denn da die höchste Ziffer des Multiplikands den Lokalwerth Zehntausend, die höchste Ziffer des Multiplikators aber den Stellenwerth Tausend hat, und das Produkt 1 × 5 = 5 nur einzifferig ist, so hat die höchste Ziffer des Produktes den Lokalwerth Zehnmillionen (denn 10000 × 1000 = 10,000000), oder das Produkt besteht aus 8 Ziffern; also hat die 7 im Hauptprodukte die Benennung Zehntausend, da rechts noch vier Stellen folgen müßten. Einfacher findet man den Lokalwerth der letzten beibehaltenen Ziffer 7 durch die Vergleichung der Stellenwerthe je zweier über einander stehenden Ziffern der beiden Faktoren.

Auf gewöhnliche Art würde die Rechnung so aussehen:

```
13587 × 5893
------------
 6793|5
 1086|96
  122|283
    4|0761
------------
 8006|8191.
```

```
     edcba       abcde
II.  07596.83 × 93574.
     47539
     -----
     68371
      2279
       380
        53
         3
     -----
     71086 Millionen.
```

Man verlangt im Produkte die fünf höchsten Stellen.

Hier wurden im Multiplikand nur vier Stellen abgeschnitten, weil 7 × 9 ein zweizifferiges Produkt gibt.

III. Man verlangt die vier höchsten Ziffern des Produktes

3659 × 753 × 1829 × 259 × 3567.

§. 42.

Rechnungsvortheile bei der Division ganzer Zahlen.

1. Anstatt eine Zahl durch 25 oder 125 zu dividiren, theile man sie durch 100 oder 1000 nach §. 36, und multiplicire den Quotienten mit 4 oder 8, je nachdem durch 25 oder 125 zu dividiren war, weil $25 = \frac{100}{4}$, und $125 = \frac{1000}{8}$. Die Richtigkeit des Verfahrens erhellt aus §. 33.

Beispiele.

I. $340275 : 25 = 3402{\cdot}75 \times 4$

$ .13611.^{00}$ Quotus.

II. $3745250 : 125 = 3745{\cdot}250 \times 8$

$29962{\cdot}^{000}$ Quotus.

Das Weitere hiervon wird unten in der Lehre von den Decimalbrüchen vorkommen.

2. Läßt sich der Divisor in ein Produkt zweier oder mehrerer Faktoren auflösen, so wird die Division sehr oft dadurch erleichtert, daß man durch die Faktoren des Divisors auf folgende Art dividirt:

a) Man dividire den Dividend durch einen Faktor des Divisors, und bemerke sich den Rest, wenn einer bleiben sollte, zur Seite.

b) Den gefundenen Quotienten dividire man durch den zweiten Faktor des Divisors, und notire sich ebenfalls zur Seite den Rest.

c) Den letzten gefundenen Quotienten theile man durch den dritten Faktor des Divisors, schreibe den etwaigen Rest auf der Seite wieder an, und fahre auf diese Art fort, bis man durch alle Faktoren des Divisors getheilt hat, so ist der letzte Quotient der gesuchte.

d) Um endlich den ganzen Rest zu finden, multiplicire man den letzten Rest mit dem vorhergehenden Divisor, und addire zum Produkte den vorletzten Rest. Diese Summe multiplicire man mit dem zweiten vorhergehenden Divisor, und addire zum Produkte wieder den nächst vorhergehenden Rest, und fahre auf diese Art fort, bis zum Produkte aus einer solchen Summe in den ersten Divisor der erste gebliebene Rest addirt worden ist; dann ist diese letzte Summe der wahre Rest.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird weiter unten, in der Lehre von den Brüchen bewiesen werden.

Beispiele.

I. $953784 : 48 = 19870\tfrac{24}{48}$

$: 6$ ——— (0 ———

158964 $\quad 48 = 6 \,.\, 8$

$: 8$ ——— (4

19870 Quotient; Rest $= 4 \,.\, 6 + 0 = 24$.

II. 44371278 : 63
: 9 ——— (0 ———
4930142   63 = 7 . 9
: 7 ——— (0
704306 Quotus; der Rest = 0.

III. 8457025 : 462 = $18305\frac{115}{462}$
: 6 ——— (1 ———
1409504   462 = 6 . 7 . 11
: 7 ——— (5
201357
: 11 ——— (2
18305 Quotus; der Rest = 115, denn
2 . 7 + 5 = 19 und 19 . 6 + 1 = 115.

3. Besteht der Divisor aus lauter Neunern, die Stelle der Einser aber mag mit was immer für einer Ziffer besetzt sein, so verfahre man auf folgende Art: Man suche den Unterschied zwischen der nächst höhern dekadischen Einheit und dem Divisor, schneide im Dividende, von der Rechten gegen die Linke, so viele Stellen, als der Divisor Ziffern hat, durch eine Vertikallinie ab, wodurch der Dividend in zwei Theile getrennt wird. Den Theil links multiplicire man durch das dekadische Complement, d. i. durch die Zahl, welche, zum Divisor addirt, die nächst höhere dekadische Einheit gibt, und setze das Produkt dem ungeänderten Dividende unter. Kommen wieder Ziffern links von der Vertikallinie zu stehen, so multiplicire man jene wieder durch das dekadische Complement, und setze das Produkt, wie vorhin, dem Dividend unter; und so fahre man fort, bis keine Ziffer mehr links zu stehen kommt. Dann addire man alle rechts stehenden Zahlen; kommt eine Ziffer der Summe links, so multiplicire man diese, wie oben, durch die arithmetische Ergänzung, addire von Neuem, und wiederhole diese Operation so lange, bis keine Ziffer der Summe mehr links kommt. Dann ist die Summe der links stehenden Zahlen der gesuchte Quotient, die rechts stehende Summe aber der Rest, wenn diese kleiner als der Divisor ist. Ist aber jene Summe größer als der Divisor, so ist die Differenz zwischen jener Summe und dem Divisor der wahre Rest, der aber in diesem Falle nie größer sein wird, als die dekadische Ergänzung, und die Summe links um eine Einheit vermehrt, ist der gesuchte Quotient.

Beispiele.

I.

```
         6
      7583|91  :    94       = 8067 93/94
       454|98    ----------
        27|24    100 - 6 = 94
         1|62
          | 6
          |---
         2|81
          |12
  ---------------
Quotus = 8067|93 Rest.
```

II.

```
         6
      7583|  96  :    94     = 8068 4/94
       454|  98     ------
        27|  24     100-6
         1|  62
          |   6
          |----
         2|  86
          |  12
      ---------
      8067|  98
      + 1 |- 94
Quotus = 8068|  4 Rest.
```

III.

```
         7
      6329|934 :   993       = 6374 382/993
        44|303   --------
          |308   1000-7
          |----
         1|545
          |  7
  ---------------
Quotus = 6374|552 Rest
```

IV.

```
         3
     73596|482,73  :   997,00
       220|788       ---------------
          |660       (1000-3) 100
          |----
         1|930
          |  3
  ---------------
Quotus = 73817|93373 = dem Reste.
```

Den Beweis für die Gültigkeit dieses Verfahrens werden wir weiter unten kennen lernen.

§. 43.
Abgekürzte Division.

Nicht selten ist es bloß nöthig, einige Stellen des Quotienten zu wissen, oder zwar alle, ohne jedoch sich um den Rest zu kümmern. In diesen Fällen verfahre man kurz auf folgende Art:

1. Nach §. 38, 8, weiß man im Voraus die Anzahl der Zifferstellen des Quotienten zu bestimmen, welches immer zu wissen nöthig ist, wenn verlangt wird, den Quotienten bis auf diese oder jene Stelle zu finden.

2. Man schneide im Divisor von der Linken gegen die Rechte so viele Ziffern ab, als der Quotient haben soll; diese bilden den abgekürzten Divisor. Ist nun der erste Partialquotient gefunden, so wird zu dem gebliebenen Reste keine neue Ziffer aus dem Dividende herabgesetzt, sondern man kürzt den Divisor rechts um eine Stelle ab, dann wird neuerdings dividirt, um die nächst niedrigere Stelle des Quotienten zu bestimmen, und setzt auf diese Art die Division bis zu Ende fort.

3. Damit aber der Quotient in der letzten Ziffer nicht zu unrichtig werde, so multiplicire man die jedesmal hinweggelassene Ziffer des Divisors mit dem gefundenen Partialquotienten, um das erste wirkliche Produkt zu korrigiren, wie §. 41, a, 3 gelehrt worden ist.

4. Hat der Divisor nicht so viele Stellen, als im Quotienten verlangt werden, so dividire man so lange auf die gewöhnliche Art, bis die gefundenen Ziffern des Quotienten mit denen des Divisors zusammengenommen Eine Stelle mehr ausmachen, als der Quotient haben soll, und dann kürze man erst den Divisor Ziffer für Ziffer ab.

5. Will man die letzte der im Quotienten verlangten Ziffern genau erhalten, so suche man eine Stelle mehr, als der Quotient haben soll.

Beispiele.

I. 735‚9637 : 5‚3‚4‚89 = 137
200
40
3

Man will den Quotienten als ganze Zahl wissen, der hier nur drei Ziffern haben kann (§. 38, 8).

Es wurde hier zuerst mit 534 dividirt, und dann sagte man: $1 \times 8 = 8$, die nächste mit 4 anfangende Zahl ist 14, also 1 zur Korrektur; 1 mal $4 + 1$ ist 5 und 0 ist 5 (wenn man gleich in Gedanken subtrahirt), u. s. w.; dann wurde die letzte Ziffer rechts im vorigen Divisor weggelassen, und mit 53 in den ersten Rest dividirt. Die weitere Operation ist nun für sich klar.

Auf gewöhnliche Art würde die Rechnung so stehen:

735 | 96 37 : 53489 = 137
201 | 073
40 | 6067
3 | 1644 letzter Rest.

Das, was rechts von der vertikalen Linie steht, ist also überflüssig, weil in der Aufgabe nicht nach dem Reste gefragt wurde.

II. 8659‚3729 : 9‚6‚8‚73
909 = 894
38
0

Im Quotienten werden bloß die drei höchsten Ziffern verlangt.
Hier wurde der Quotient um eine Einheit zu groß erhalten.

III. 74086‚329 : 9‚0‚8
1446 = 8159
538
84
3

Man verlangt die vier höchsten Stellen des Quotienten.
Da vier Stellen im Quotienten verlangt wurden, der Divisor aber nur drei Ziffern hat, so wurde zweimal auf gewöhnliche Art dividirt, ehe der Divisor abgekürzt wurde. Weil der Quotient (§. 38, 8) eigentlich fünfzifferig sein muß, so hat die erste gefundene Stelle die Benennung Zehntausend, oder es ist rechts noch eine Nulle anzuhängen, um den Lokalwerth einer jeden Ziffer gehörig zu bezeichnen.

Zweites Kapitel.

Von den vier Rechnungsarten mit Buchstabengrößen.

A. Vorbegriffe.

§. 44.

1. Der Werth einer Größe ist nicht selten von der Differenz zweier anderen Größen abhängig, und die Bestimmung desselben wird häufig durch andere Umstände bedingt, als die bei einer Rechnung absichtlich zu Grunde gelegten.

Eine Größe, die von der Differenz zweier gleichartigen Größen abhängt, kann auf verschiedene Art bestimmt werden, je nachdem die eine oder die andere größer ist, oder je nachdem die eine oder die an-

dere als Minuend oder Subtrahend angenommen wird. Wenn z. B. jemand A Gulden Vermögen und B Gulden Schulden hat, so besitzt er (A — B) Gulden Vermögen, wenn $A > B$, und (B — A) Gulden Schulden, wenn $A < B$ ist. Eben so, wenn ein Kaufmann eine gewisse Waare um A Thaler eingekauft und um B Thaler verkauft hat, so bezeichnet (B — A) den Gewinn, wenn $B > A$, und (A — B) den erlittenen Verlust, wenn $A > B$ ist. — Wir sehen hieraus, daß die Benennung des gefundenen Unterschiedes sich ändert, je nachdem die eine oder die andere der gegebenen Größen größer oder kleiner angenommen wird, wo wir dann jedes Mal die größere Zahl als den Minuend angenommen haben. Allein bei allgemeineren Untersuchungen werden wir in der Folge der Kürze wegen beide Fälle nicht unterscheiden, sondern der Rechnung den einen oder den andern Fall zu Grunde legen, und ereignet es sich dann bei der Anwendung auf besondere Fälle, oder bei den nähern Bestimmungen einer Aufgabe, daß man auf eine Differenz stößt, deren Minuend kleiner als der Subtrahend ist, so läßt sich die Bedeutung derselben ohne Schwierigkeit aus den Bedingungen der Aufgabe erklären. So haben wir oben gesehen, daß (B—A) Thaler Gewinn und (A—B) Thaler Verlust gleichbedeutend seien; es muß also eine Differenz, deren Minuend kleiner ist, als der Subtrahend, jedes Mal durch die umgekehrte Differenz erklärt werden.

2. Der Werth einer Differenz, wo der Minuend größer als der Subtrahend ist, heißt eine positive (bejahende) Größe; ist aber der Minuend kleiner als der Subtrahend, so nennt man den Werth der Differenz eine negative (verneinende) Größe; und Größen, die entweder positiv oder negativ sind, heißen reelle (wirkliche) oder mögliche Größen. So z. B. ist (8 — 3) eine positive, (3 — 8) aber eine negative Größe, beide aber sind reelle Größen.

3. Da eine Größe, für sich allein betrachtet, weder positiv noch negativ ist, indem diese Eigenschaften den Größen nur zukommen, in wie fern sie mit einander verglichen und als Resultate der Subtraktion betrachtet werden; so ist klar, daß es bei einer positiven Größe nur auf den Ueberschuß des Minuends über den Subtrahend, und bei einer negativen Größe nur auf den Ueberschuß des Subtrahends über den Minuend ankomme, und daß daher zwei positive Größen gleich seien, wenn der Ueberschuß des Minuends über den Subtrahend bei der einen gleich ist dem Ueberschusse des Minuends über den Subtrahend bei der andern. Eben so wird man nun einsehen, wann zwei negative Größen einander gleich sein werden.

4. Die negativen Größen bezeichnet der Mathematiker dadurch, daß er dem Überschusse des Subtrahends über den Minuend das Zeichen — vorsetzt. Der positiven Größe, d. i. dem Ueberschusse des Minuends über den Subtrahend, setzt man gar keine Zeichen vor, kann ihr aber das Zeichen + vorgesetzt denken, oder auch wirklich vorsetzen. Also ist $8 - 3 = 5 = +5$ und $3 - 8 = -(8 - 3) = -5$.

Hier sind also + und — nicht Operationszeichen (Zeichen der Addition und Subtraktion), wie früher (§. 5), sondern Qualitätszeichen, d. h. hier drücken diese Zeichen besondere Eigenschaften der Größen aus, und in der Anwendung muß man genau unterscheiden, ob diese Zeichen in dem einen oder in dem andern Sinne zu nehmen sind.

5. Solche Beziehungen, wie Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust, Steigen und Fallen, Entfernung gegen die Rechte und Entfernung gegen die Linke, Entfernung nach oben und Entfernung nach unten, Einnahme und Ausgabe u. s. w., heißen *entgegengesetzte Beziehungen* (Relationen), und eben so nennt man *Bedingungen entgegengesetzte*, wenn sie so beschaffen sind, daß eine Größe oder Zahl unter der einen zu addiren ist, mithin als *additiv* erscheint, während sie unter der andern abzuziehen wäre, mithin *subtraktiv* erscheinen würde. Zahlen oder Größen, welche unter entgegengesetzten Bedingungen erscheinen, oder welche die Quantitäten entgegengesetzter Beziehungen ausdrücken, nennt man selbst *entgegengesetzte* Größen. Eine negative Größe, mit der einen der Beziehungen verbunden, drückt immer so viel von der andern ihr entgegengesetzten aus, als die umgekehrte positive bezeichnet. So z. B. bezeichnen — 3 Thaler Verlust eben so viel als 3 Thaler Gewinn, und umgekehrt — 3 Thaler Gewinn so viel als 3 Thaler Verlust. Wir können demnach zwei gleichartige Größen, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist, als entgegengesetzte Größen betrachten.

6. Der Mathematiker bezeichnet deßhalb die entgegengesetzten Größen ebenfalls durch die Zeichen + und —, und es steht bei der Anlage einer Rechnung ganz in unserer Willkür, welche von den beiden entgegengesetzten Größen wir mit + und welche wir mit — bezeichnen wollen; hat man aber rücksichtlich dieser Bezeichnung einmal die Annahme gemacht, dann ist weiter nichts mehr willkürlich.

7. Entgegengesetzte Größen müssen an und für sich, also außer ihrer gegenseitigen Beziehung betrachtet, gleichartige Größen sein; z. B. Vermögen und Schulden beziehen sich beide auf eine gewisse Summe Geldes, und Steigen und Fallen drücken beide eine Bewegung aus.

8. Aus dem im (5.) aufgestellten Begriffe der entgegengesetzten

Größen geht hervor, daß zwei solche Größen, in Verbindung gedacht, sich nicht vermehren, sondern vermindern, oder daß die Addition zweier entgegengesetzten Größen sich in eine Subtraktion verwandele. Es müssen sich demnach zwei gleiche entgegengesetzte Größen ganz aufheben, ungleiche entgegengesetzte Größen aber nur zum Theile, d. h. die kleinere Größe wird ganz aufgehoben und von der größern nur so viel, als die kleinere beträgt. Hat z. B. jemand 100 fl. Vermögen und 80 fl. Schulden, und er will seinen Vermögensstand ausmitteln, so ist einleuchtend, daß er, um seine Schulden zu tilgen, sein Vermögen um 80 fl. vermindern müsse, und daß er also nur $(100-80) = 20$ Gulden wirkliches Vermögen besitze. Hat er eben so viele Schulden als Vermögen, so tilgen sich beide Größen ganz.

So wie $-(+A)$ das Entgegengesetzte von $+A$ nämlich $-A$ bezeichnet, eben so drückt auch $-(-A)$ das Entgegengesetzte von $-A$ also $+A$ aus, oder es ist $-(-A) = +A$.

§. 45.

Durch die Einführung der entgegengesetzten Größen in den Buchstabenkalkül erhält dieser erst seine vollkommene Allgemeinheit. Die gemeine Arithmetik bedarf der entgegengesetzten Größen nicht; denn da, wo sie im bürgerlichen Leben vorkommen, wenn z. B. das Vermögen und die Schulden eines Mannes auf einander bezogen werden, weiß der gemeine Menschenverstand schon von selbst, daß die kleinere Zahl von der größeren abgezogen werden müsse, und der Rest die Natur der größern Zahl erhalte. Für den gemeinen Rechner hat also der Ausdruck $a-b$ nur dann einen Sinn, wenn $a \geqq b$ ist; in der Buchstabenrechnung aber hat $a-b$ immer einen richtigen Sinn, mag $a \gtreqless b$ sein, indem man auf folgende Art raisonnirt: Ist die positive Größe $a > b$, so wird, dem Begriffe der entgegengesetzten Größen zu Folge, die kleinere Größe b ganz aufgehoben; in der größern a aber werden eben so viele Einheiten destruirt, wie viele in b enthalten waren. Da nun von der größern a ein Rest geblieben, a aber als die positive Größe angenommen wurde, so ist klar, daß auch der Rest als positive Größe genommen werden müsse, und daß also, wenn man ihn mit d bezeichnet, $a - b = +a + (-b) = +d$ sei. Ist hingegen $a < b$, so wird die kleinere a ganz getilgt, von der größern b aber nur ein solcher Theil, welcher, numerisch betrachtet, der ihr entgegengesetzten Größe a gleich ist, und demnach muß der Rest δ die der Größe b beigelegte Bestimmung erhalten, d. i. es muß δ negativ genommen, oder

$+ a - b = + a + (- b) = - \delta$ gesetzt werden. Hieraus, und aus §. 44 folgt, daß $- \delta$ so viel sage, als $o - \delta$ oder $o + (- \delta)$. Man kann sich übrigens hiervon auch auf folgende Art überzeugen: Da $b > a$, so wird $b = a + \delta$ sein, und also $- b = - a - \delta$, denn die Theile müssen dieselbe Qualität haben, wie das Ganze. Setzt man diesen Werth für $- b$ in dem Ausdrucke $+ a - b$, so erhält man $+ a - a - \delta = o - \delta = - \delta$.

Aus dem Gesagten sieht man ein, daß hier die Größe $- \delta$ nicht mit einer absoluten Nulle, oder mit einem Nichts überhaupt verglichen werde, sondern mit einem Nichts, dessen bestimmter Werth $+ a - a$ ist, und daß demnach $o - \delta$, oder $- \delta$ eine Größe andeute, die in Bezug auf die ihr entgegengesetzte Größe und die dadurch entstehende Nulle, kleiner als Null, oder weniger als Nichts sei, wo nämlich Null nicht das absolute, sondern irgend ein relatives Nichts bezeichnet. Hat z. B. jemand 5 fl. Schulden, und bekommt 5 fl. Vermögen, so muß er damit die Schulden bezahlen, und dann hat er erst Nichts. Vor dem Erwerbe der 5 fl. Vermögen also hatte der Schuldner weniger als Nichts, weil er jetzt erst Nichts hat, nachdem er 5 fl. Vermögen erhalten. Die Nulle ist demnach die Grenze zwischen dem Positiven und Negativen, oder jede Größe muß durch den Nullpunkt gehen, um eine ihrer ersten Bestimmung entgegengesetzte zu erhalten, wie wir in der Folge auch in der Geometrie sehen werden. Nimmt man z. B. von der Zahl 5 nach und nach immer eine Einheit hinweg, so erhält man dadurch folgende Zahlenreihe:

$+ 5, + 5 - 1, + 5 - 2, + 5 - 3, + 5 - 4,$
$+ 5 - 5, + 5 - 6, + 5 - 7, + 5 - 8,$ u. s. w., oder
$+ 5, + 4, + 3, + 2, + 1, 0, - 1, - 2, - 3, - 4, - 5,$ u. s. f.
wo

$$5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0 > - 1 > - 2 > - 3 > - 4 > - 5$$

u. s. w. ist.

B. Von der Reduktion.

§. 46.

1. Die bestimmte Zahl, welche vor einer Buchstabengröße steht, heißt Koefficient dieser letztern, und zeigt an, wie oft die Buchstabengröße als Summande zu setzen sei. Z. B.:

$$2 a = a + a = 2 . a$$
$$5 a = a + a + a + a + a = 5 . a$$
$$3 a b = a b + a b + a b = 3 . a b, \text{ u. s. w.}$$
$$- 2 a = - a - a$$
$$- 3 a b = - a b - a b - a b, \text{ u. s. w.}$$

Hat eine allgemeine Größe keinen Koefficienten vor sich, so wird immer die Einheit als solcher darunter verstanden; so ist
$a = 1 . a$, $a b = 1 . a b$, $-a = -1 . a$, $-a b = -1 . a b$.

Da die ohne Zeichen neben einander gesetzten Buchstabengrößen ein Produkt ausdrücken, z. B. $a b x = a . b . x$, so sieht man ein, daß man jeden Faktor als Koefficienten der übrigen Faktoren betrachten könne. Man kann also sagen, es ist a der Koefficient von b x, oder b der Koefficient von a x, oder auch a b der Koefficient von x. Es bezeichnet demnach im Allgemeinen n a nichts anders, als daß die Größe a so oft durch Addition gesetzt werden soll, wie oft die Einheit in n enthalten ist, und umgekehrt.

2. Buchstabengrößen heißen gleichartig oder homogen, wenn sie aus denselben Buchstaben bestehen, die Koefficienten und Zeichen mögen dieselben oder verschieden sein; so sind z. B. 3 a, 7 a, —2 a, eben so 5 a b, —3 a b, 12 a b, —a b u. s. w. homogene Größen. — Sind aber die Größen aus verschiedenen Buchstaben zusammengesetzt, so heißen sie, selbst wenn sie gleiche Koefficienten und Zeichen haben, ungleichartige oder heterogene Buchstabengrößen, z. B. 4 a, 4 b, —2 a b, u. s. w.

3. Eine gegebene komplexe Größe auf einen kürzern Ausdruck von gleichem Werthe zurückführen, heißt reduciren.

Reduktion ist demnach das Verfahren, durch arithmetische Operationen getrennte Größen in einem einfachern oder kürzern Ausdrucke darzustellen. Z. B.
$$7a + 5b - 8ab + a - 3b + 2ab = 8a + 2b - 6ab.$$

Die Reduktion findet also lediglich nur bei homogenen Größen Statt, denn ungleichartige Größen können nicht reducirt werden, und wir haben die beiden Reduktionsregeln:

α) Sind die zu reducirenden homogenen Glieder mit demselben Zeichen behaftet, so werden die Koefficienten addirt, die Buchstabengrößen nur Ein Mal gesetzt, und dasselbe Zeichen beibehalten.

β) Haben jene Glieder aber verschiedene Zeichen, oder, was dasselbe ist, sind sie entgegengesetzte Größen, so ziehe man den kleinern Koefficienten vom größern ab, setze die Buchstabengröße nur Einmal, und gebe dieser Differenz das Zeichen des größern Koefficienten (§. 45).

4. Kommt in einem Monome derselbe Buchstabe mehrmals als Faktor vor, so schreibt man diesen nur einmal, und setzt über ihn rechts

eine Zahl, welche so viele Einheiten enthält, wie oft diese Buchstabengröße als Faktor gesetzt werden soll. So ist z. B. $a^2 = a \cdot a$; $3^2 = 3 \cdot 3$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$, u. s. w., $a^2 b^3 = a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$, u. s. f.

Die Zahlen nun, welche anzeigen, wie oft eine Größe als Faktor gesetzt werden soll, nennt man Exponenten. — Man weiß nun, was die Ausdrücke a^m, $a^m\ b^n$ u. s. w. bedeuten; a^m wird gelesen: a mit dem Exponenten m, oder a der m^{ten}.

Hat ein Buchstabe keinen Exponenten über sich stehen, so ist dieser die Einheit; z. B. $a = a^1$, $a b = a^1 b^1$, $3 a b^2 c = 3^1 \cdot a^1 \cdot b^2 \cdot c^1$.

Dieselben Buchstaben mit verschiedenen Exponenten bezeichnen demnach auch verschiedene Größen, z. B. a^3, a^5.

5. Es ist $m a + n a = a \cdot (m + n) = a (m + n)$, denn die Summe ist den Summanden zusammen genommen gleich; es ist folglich auch in Betreff des Produktes kein Unterschied, ob man die einzelnen Summanden m und n mit a multiplicirt, und dann die Partialprodukte addirt, oder ob man die Summe $(m + n)$ mit a multiplicirt. So z. B. ist

$$3 a + 5 a = (3 + 5) \cdot a = 8 a \text{ und}$$
$$7 a - 3 a = (7 - 3) \cdot a = 4 a.$$

C. Von der Addition.

§. 47.

Aufgabe.

Gegebene algebraische Größen zu addiren.

Auflösung.

Der Mathematiker betrachtet die gegebenen Größen als addirt, wenn er dieselben durch das Zeichen + verbunden hat. Hierauf untersucht er, ob homogene (§. 46, 2) Glieder vorhanden seien, oder nicht, und wendet im ersten Falle die (§. 46, 3) angegebenen Reduktionsregeln an. Die Reduktion ist also bei der Addition etwas Zufälliges, und nichts Wesentliches. Soll man z. B. die Größen a, b und c addiren, so schreibe man $a + b + c$. Ist zu $a + b$ die Größe $c - d$ zu addiren, so ist

$$(a + b) + (c - d) = a + b + c - d$$

die gesuchte Summe. Hätte man $a + b + c + d$ geschrieben, so wäre die Größe $(a + b)$ um die Summe $c + d$ vermehrt worden, da doch die Aufgabe fordert, daß man $a + b$ nur um die Differenz $c - d$ vermehren soll. Es werden demnach gegebene Größen addirt, wenn man alle ihre Glieder mit ihren gegebenen Zeichen neben einander schreibt,

oder algebraisch addiren heißt nichts anders, als die Größen mit ihren Zeichen zusammenfügen.

Beispiele.

I. $$\left.\begin{array}{l} 5a + 7ac - 2b + 7 \\ 3a - 5ac + 2b - 13 \end{array}\right\} \text{Summanden,}$$
$$\overline{8a + 2ac + \;0 - 6} \quad \text{Summe.}$$

II. $$\left.\begin{array}{l} 4a^2x - 3ab + c - 2a \\ a^2x - 6ab - 3c \end{array}\right\} \text{Summanden,}$$
$$\overline{5a^2x - 9ab - 2c - 2a} \quad \text{Summe.}$$

III. $$\begin{array}{l} ma^2 + abx^2 - 7bc^3 + 2xy \\ na^2 + 3abx^2 + 6bc^3 - 3x^2 + z \\ \hline (m+n)a^2 + 4abx^2 - bc^3 + 2xy - 3x^2 + z. \end{array}$$

IV. $$\begin{array}{l} 5ab - mx^n + 3a^m b^2 + 5b^{n-1}y^r \\ -4ab - nx^n - 2a^m b^2 + 3b^{n-1}y^r - aq \\ \hline ab - (m+n)x^n + a^m b^2 + 8b^{n-1}y^r - aq. \end{array}$$

Da in solchen allgemeinen Summenausdrücken sowohl additive als subtraktive Glieder erscheinen, so werden wir derlei Ausdrücke in der Folge algebraische Summen nennen.

D. Von der Subtraktion.

§. 48.

Aufgabe.

Gegebene Größen zu subtrahiren.

Auflösung.

Der Mathematiker betrachtet gegebene Größen als subtrahirt, sobald dieselben durch das Zeichen — von einander getrennt sind. Soll man b von a abziehen, so bezeichnet $a - b$ die Differenz. Eben so ist zwischen $a + b + c$ und $d + e$ die Differenz $= (a + b + c) - (d + e)$. Die Reduktion des gefundenen Unterschiedes ist auch hier wieder bloß zufällig.

Nach §. 22 muß der Minuend zum Vorschein kommen, wenn man die gefundene Differenz zum Subtrahende addirt. Auf diesen Grundsatz stützen sich die Regeln, die bei der Subtraktion algebraischer Größen allgemein zu beobachten sind.

I. $\pm a - (+b) = \pm a - b$; denn
$(\pm a - b) + b = \pm a - b + b = \pm a.$

II. $\pm a - (-b) = \pm a + b$; denn
$(\pm a + b) + (-b) = \pm a + b - b = \pm a$ (§. 22).

Faßt man beide Fälle zusammen, so erhält man die allgemeine Formel
$$(\pm a) - (\pm b) = \pm a \mp b = (\pm a) + (\mp b).$$

Hieraus geht nun hervor, daß die Differenz zweier Größen gefunden werde, wenn man zum Minuende den Subtrahend mit verändertem Zeichen addirt. Ist der Subtrahend eine komplexe Größe, so müssen also die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandelt werden, wodurch dann die Subtraktion in eine Addition übergeht. Z. B.:

$a - (b - c) = a + (-b + c) = a - b + c$; denn

$a - b + c + (b - c) = a - b + c + b - c = a$

nach gehöriger Reduktion (§. 46, 3).

Beispiele.

I.	Minuend	$5a + 3ab - 7bc - 8d + 9$
	Subtrahend	$3a - 2ab - 6bc + 6d - 3$
	die Zeichen geändert	$-\quad+\quad+\quad-\quad+$
	Differenz	$2a + 5ab - bc - 14d + 12.$
II.	Minuend	$10a^2b - 3ac^3 + ma^nx^p - 3b^2$
	Subtrahend	$-8a^2b + 4ac^3 - 3a^nx^p - 3b^2$
	Geänderte Zeichen	$+\quad-\quad+\quad+$
	Differenz	$18a^2b - 7ac^3 + (m + 3)a^nx^p.$
III.	Min.	$ab^2 - 8a^2c + 7bx^2$
	Subtr.	$4ab^2 - 4a^2c + 4bx - 3abc$
		$-\quad+\quad-\quad+$
	Differenz	$-3ab^2 - 4a^2c + 7bx^2 - 4bx + 3abc$

§. 49.

Allgemeine Sätze.

a) Bezeichnen wir allgemein den Minuend durch M, den Subtrahend durch S und den Rest durch R, so ist

1) $M - S = R$ also

3) $M = S + R$,

der Erklärung der Subtraktion gemäß.

Substituirt man diesen Werth von M in der Gleichung 1, so erhält man

3) $(R + S) - S = R$,

d. h. **ziehet man von der Summe zweier Größen die eine Summande ab, so findet man die andere als Rest.**

Es ist also auch

$(S + R) - R = S$, oder

4) $M - R = S$,

d. h. der Unterschied zwischen dem Minuende und dem Reste ist dem Subtrahende gleich.

b) Es ist

$$(M \pm X) - (S \pm X) = M \pm X - S \mp X = M - S.$$

also auch umgekehrt

$$M - S = (M \pm X) - (S \pm X),$$

d. h. der Unterschied zwischen zwei Größen M und S wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man Minuend und Subtrahend um dieselbe Größe X vermehrt oder vermindert.

Eben so findet man

$$A + B = (A + C) + (B - C);$$

diese Gleichung sagt: Die Summe zweier Größen bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man die eine Summande um irgend eine Größe vermehrt, und die andere Summande um dieselbe Größe vermindert.

c) Wenn

$$R = M - S \text{ und}$$
$$r = m - s$$

ist, so erhält man nach §. 6, 7:

$$R + r = M + m - S - s = (M + m) - (S + s),$$

oder

$$(M - S) + (m - s) = (M + m) - (S + s),$$

d. h. zwei Differenzen werden addirt, wenn man von der Summe der Minuende die Summe der Subtrahende abzieht.

d) Es sei

α) $A = B + C - D$, so erhält man, weil
$D = \quad + D$ ist, nach §. 6, 7, durch Addition

$A + D = B + C$, und weil
$C = \quad C$, nach §. 6, 8, durch Subtraktion

$A + D - C = B$, oder

β) $A - C + D = B$.

Vergleichen wir diese Gleichung mit der gegebenen α, so sehen wir, daß die Größen C und D aus dem zweiten Theile der Gleichung in den ersten Theil derselben mit veränderten Zeichen gesetzt wurden. Betrachten wir umgekehrt die Gleichung β als gegeben, so läßt sich aus ihr auf dieselbe Art die Gleichung α ableiten. Die Gleichheit

zweier Ausdrücke, oder eine Gleichung bleibt demnach ungestört, wenn man ein beliebiges Glied aus einem Theile der Gleichung in den andern Theil mit entgegengesetztem Zeichen überträgt (transponirt).

Aus der Gleichung β folgt demnach weiter:

$$A - C + D - B = o \text{ oder}$$

$$\delta)\ A - B - C + D = o \ (\S. 6, 4).$$

Von einer solchen Gleichung, bei welcher alle Größen auf einer Seite des Gleichheitszeichens stehen, sagt man, sie sei auf Null reducirt, oder jener Ausdruck verschwinde.

Aus der Gleichung δ) folgt $A + D = B + C$; soll also der Ausdruck $A - B - C + D$ verschwinden; so muß die Summe der negativen Theile der Summe der positiven gleich sein.

e) Wenn $A - B = M - N$ ist, so folgt aus d):

$$A + N = M + B, \text{ ferner}$$

$$+ N = M + B - A, \text{ und}$$

$$- M + N = B - A = - A + B, \text{ also auch}$$

$$- A + B = - M + N \ (\S. 6, 2).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der gegebenen

$$A - B = M - N,$$

so sehen wir, daß sie aus dieser hervorgeht, wenn wir die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandeln. Eine Gleichung bleibt also beständig, wenn man die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandelt.

E. Von der Multiplikation.

§. 50.

Aufgabe.

Eingliederige Buchstabengrößen mit einander zu multipliciren (§. 25).

Auflösung.

Man hat hierbei folgende Regeln zu beobachten:

1. In der Buchstabenrechnung werden die ungleichartigen Faktoren ohne Zeichen neben einander gesetzt, und zwar geschieht dieß gewöhnlich in alphabetischer Ordnung; die aus mehreren Gliedern bestehenden Faktoren werden jedoch in Klammern eingeschlossen. Z. B.

$$a \times b = ab,$$
$$a \times b \times c \times d = abcd,$$
$$a^3 \times b^2 \times c^m = a^3 b^2 c^m.$$

2. Kommt derselbe Faktor mehrmals vor, so schreibt man ihn nur Einmal mit der Summe der Exponenten. Z. B.

$$a^2 \times a = a \,.\, a \times a = a^3 = a^{2+1} \text{ (§. 46, 4)}$$
$$a^2 \times a^3 = a \,.\, a \times a \,.\, a \,.\, a = a^5 = a^{2+3}$$
$$a^2 \times a^4 = a \,.\, a \times a\,a\,a\,a = a^6 = a^{2+4}; \text{ allgemein}$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ und } (a+b)^m \times (a+b)^n = (a+b)^{m+n}.$$

Dieselbe Regel gilt auch für mehrere Faktoren:

$$a^2 \times a^3 \times a^4 = a^{2+3+4} = a^9,$$
$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q = a^{m+n+p+q},$$
$$(a+b)^4 \times (a+b)^2 \times (a+b) = (a+b)^{4+2+1} = (a+b)^7.$$
$$(a-b)^m\,(a-b)^n\,(a-b)^p = (a-b)^{m+n+p}.$$

Ein solches Produkt aus lauter gleichen Faktoren heißt Würde oder Potenz, und zwar die 1, 2, 3, 4, ... mte Potenz, je nachdem der Exponent 1, 2, 3, 4, ... oder m ist, also je nachdem es denselben Faktor 1, 2, 3, ... oder mmal enthält. Die Größe selbst, durch deren wiederholte Multiplikation mit sich selbst die Potenz erzeugt wird, heißt Wurzel oder Stammgröße. Die zweite Potenz heißt vorzugsweise Quadrat, und die dritte Potenz Würfel oder Cubus, aus Gründen, welche wir in der Geometrie kennen lernen werden.

Jede Potenz ist also ein Produkt; aber nicht umgekehrt, nämlich: nicht jedes Produkt ist eine Potenz.

3. Man mag die Faktoren in was immer für einer Ordnung mit einander multipliciren, so erhält man immer dasselbe Produkt, wie für zwei Faktoren schon aus §. 25 erhellt. Es ist nämlich

$$ab = ba;\; 2a = a2.$$

Die Gültigkeit dieses Satzes für mehrere Faktoren werden wir weiter unten allgemein beweisen.

4. Die bestimmten Koefficienten der Faktoren werden, wie in der Zifferrechnung, mit einander multiplicirt. Z. B.:

$$2a \times 3b = 2 \,.\, 3\; a \,.\, b = 6ab \text{ (Nr. 3)};$$
$$5a^2b \times 7ab = 35a^3b^2;$$
$$4a^3b^2 \times (a-b)^m \times 7a^2b^4 \times 2(a-b)^3 = 56a^5b^6\,(a-b)^{m+3}.$$

5. Aus §. 35 ist klar, daß

$$\pm a \times 2 = \pm a \pm a = \pm 2a,$$
$$\pm a \times 3 = \pm a \pm a \pm a = \pm 3a, \text{ u. s. w.},$$

und allgemein $\pm a \times + b = \pm ab$ sei; d. h. das Produkt hat immer das Zeichen des Multiplikands, wenn der Multiplikator positiv ist.

Ist aber der Multiplikator negativ, so hat das Produkt das entgegengesetzte Zeichen des Multiplikands; denn jenes entsteht aus diesem eben so, wie der Multiplikator aus der Einheit (§. 25). Soll man also z. B. $\pm a$ mit $-b$ multipliciren, so heißt dieß nichts anderes, als eine Größe finden, die aus $\pm a$ eben so entsteht, wie $-b$ aus der Einheit. Aber $-b$ entspringt aus der Einheit, wenn man diese b mal mit entgegengesetztem Zeichen nimmt, also muß

$$\pm a \times - b = \mp ab \text{ sein.}$$

Da nun

$$+a \times +b = +ab$$
$$-a \times +b = -ab$$
$$+a \times -b = -ab$$
$$-a \times -b = +ab,$$

so sieht man, daß das Produkt positiv oder negativ werde, je nachdem beide Faktoren gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

Daher pflegt man in der Ausübung kurz zu sagen: die nämlichen Zeichen geben plus, verschiedene aber minus.

Beispiele.

I. $7\,a^3\,bx^n \times -4\,a\,b^2\,x = -28\;a^{3+1}b^{1+2}x^{n+1}$
$= -28\;a^4\,b^3x^{n+1}$.

II. $-9\,a^2\,b^3 \times -4\,a\,b^2\,(a-x)^n = +36\,a^3\,b^5\,(a-x)^n$.

III. $-8\,a^m\,b^n \times 7\,a\,b^2\,c \times -2\,a^m\,c^3$
$= -56\,a^{m+1}\,b^{n+2}\,c \times -2\,a^m\,c^3 = +112\,a^{2m+1}\,b^{n+2}\,c^4$.

IV. $a^2\,(a+x) \times a\,b\,(a-x) \times -6\,b^2\,c\,(a+x)$
$= a^3\,b\,(a+x)\,(a-x) \times -6\,b^2\,c\,(a+x)$
$= -6\,a^3b^3c\,(a+x)^2\,(a-x)$.

§. 51.

Aufgabe.

Ein gegebenes Polynom durch eine inkomplexe Größe zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire mit dem Multiplikator alle Glieder des Multiplikands nach den §. 50 angegebenen Regeln. Denn es ist z. B.:

$$(3+2)\,A = 5\,A = A + A + A + A + A$$

dem Begriffe des Koefficienten gemäß; ferner ist

$$3A + 2\,A = (A+A+A) + (A+A) = A + A + A + A + A = 5A,$$

folglich ist auch

$$(3 + 2)\,A = 3\,A + 2\,A, \text{ und allgemein}$$
$$(m + n)\,A = m\,A + n\,A.$$

Was hier für zwei Theile gezeigt wurde, läßt sich eben so für mehrere Theile erweisen. Es ist daher ganz allgemein:

$$(a + b + c + d \ldots)\,A = a A + b A + c A + d A + \ldots$$

wo a, b, c, d ... beliebige Zahlen vorstellen. Durch die Punkte in $a + b + c + d \ldots$ bezeichnet man, daß der zusammengesetzte Ausdruck aus beliebig vielen Theilen bestehen könne.

Es ist ferner

$$2\,(A + B) = (A + B) + (A + B) = 2\,A + 2\,B,$$

eben so

$$3\,(A + B) = (A + B) + (A + B) + (A + B) =$$
$$= A + B + A + B + A + B = 3A + 3B,$$

und daher ist allgemein

$$m\,(A + B) = m\,A + m\,B.$$

Was wir hier für das Binom $A + B$ gezeigt haben, läßt sich eben so für jedes Polynom nachweisen, so daß ganz allgemein

$$m\,(A + B + C + D + \ldots) = mA + mB + mC + mD + \ldots$$

ist. — Das Produkt eines jeden Faktors in einen Theil des andern Faktors nennt man Theilprodukt (Partialprodukt).

Es ist hierbei gleichviel, ob man, wie in der Ziffferrechnung, von der Rechten gegen die Linke, oder umgekehrt, die Multiplikation verrichtet, gewöhnlich aber geschieht dieß von der Linken gegen die Rechte.

Der Beweis erhellt von selbst.

Beispiele.

I. $(a + b - c) \times d = a d + b d - c d.$

II. $(3a - 2a^2b - 5) \times -2\,ab = -6\,a^2b + 4a^3b^2 + 10\,a\,b.$

III. $-(a \pm b) \times c = -(a c \pm b c) = -a c \mp b c,$

oder $-(a \pm b) \times c = -c \times (a \pm b) = -a c \mp b c.$

IV. $-(a - b + c) \times -d = (-a + b - c) \times -d$
$= a d - b d + c d.$

Zusatz.

1. Es ist

$$(m + m)\,A = mA + mA, \text{ oder}$$
$$(2\,m)\,A = 2\,(mA); \text{ ferner}$$
$$(m + m + m)\,A = mA + mA + mA, \text{ d. i.}$$
$$(3m)\,A = 3\,(mA), \text{ folglich allgemein}$$
$$(n\,m)\,A = n\,(mA),$$

d. h. es ist einerlei, ob man die Größe A mit der Zahl m und dann das Produkt mit n multiplicirt, oder ob man die Größe A mit dem Produkte nm der beiden Zahlen multiplicirt.

2. Eben so ist auch

$$m(A + A) = mA + mA, \text{ oder}$$
$$m(2A) = 2(mA); \text{ ferner}$$
$$m(A + A + A) = mA + mA + mA, \text{ oder}$$
$$m(3A) = 3(mA); \text{ folglich allgemein}$$
$$m(nA) = n(mA),$$

d. h. es ist einerlei, ob man eine Größe A zuerst mit der Zahl n und dann mit der Zahl m multiplicirt, oder zuerst mit m und dann mit n. Soll demnach eine Größe A mit mehreren Zahlen m, n, p, q, ... multiplicirt werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Ordnung die Faktoren genommen werden.

3. Es ist also auch

$$A(BC) = B(AC) = C(AB),$$

d. h. ein Produkt BC wird durch irgend eine Größe A multiplicirt, wenn man einen der Faktoren B oder C mit A multiplicirt, und den andern Faktor ungeändert läßt.

4. Es ist ferner

$$A^2B^2 = AA \,.\, BB = AB \,.\, AB = (AB)^2,$$
$$A^3B^3 = AAA \,.\, BBB = AB \,.\, AB \,.\, AB = (AB)^3.$$

und allgemein ist für jeden ganzen positiven Werth von n

$$A^n \,.\, B^n = (AB)^n, \text{ und umgekehrt}$$
$$(AB)^n = A^n \,.\, B^n.$$

Der Anfänger übersetze diese beiden Gleichungen in die gewöhnliche Wortsprache.

§. 52.

Aufgabe.

Gegebene komplexe Größen mit einander zu multipliciren.

Auflösung.

Man multiplicire jedes Glied des als Multiplikand betrachteten Polynoms durch jedes Glied des andern Faktors, nach §. 50, in einer beliebigen Ordnung. Enthalten die Partialprodukte homogene Glieder,

so reducire man nach den bekannten Regeln. Die Summe der erhaltenen Partialprodukte ist das verlangte Produkt.

Beispiele.

I. $(a + b) \times (c + d) = (a + b)(c + d)$
$= (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$

II. $(a + b)(c - d) = (a + b)c - (a + b)d$
$= ac + bc - ad - bd.$

III. $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2,$
d. h. wenn man die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, so erhält man die Differenz ihrer Quadrate.

IV. $(5a - 7bx)(3a - 2bx) =$
$= 15a^2 - 21abx - 10abx + 14b^2x^2$
$= 15a^2 - 31abx + 14b^2x^2.$

V. $(2a^2 - 3bx^2 + 8x)(4a^2 - 2bx^2 - 3x) = 8a^4 - 12a^2bx^2$
$+ 32a^2x - 4a^2bx^2 + 6b^2x^4 - 16bx^3 - 6a^2x + 9bx^3 - 24x^2$
$= 8a^4 - 16a^2bx^2 + 26a^2x + 6b^2x^4 - 7bx^3 - 24x^2.$

Anmerkung. Ein Polynom wird nach den Potenzen eines Buchstaben geordnet, wenn die Glieder desselben so mit einander verbunden werden, daß im ersten Gliede jener Buchstabe mit dem höchsten Exponenten, und in jedem folgenden Gliede mit dem nächst niedrigern steht, oder umgekehrt. Im ersten Falle sagt man, das Polynom sei nach den fallenden, im andern aber, es sei nach den steigenden Potenzen jenes Buchstaben geordnet. So z. B. ist das Polynom

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + sx^2 + tx + u$$

nach den fallenden Potenzen von x geordnet, und das Polynom

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

nach den steigenden Potenzen von x. Eben so sind die Ausdrücke
$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7$ und $8 + 5x + 5x^3 + 7x^4 + x^6$
geordnet.

Bei der Multiplikation komplexer Größen verfährt man, wenn die Glieder beider Faktoren einerlei Buchstaben haben, bequemer auf folgende Art: Man ordne die Faktoren nach den Potenzen eines und desselben Buchstaben, schreibe sie unter einander, und ordne die Partialprodukte so, daß alle homogenen Glieder genau unter einander stehen, welchen Zweck man gewöhnlich dadurch erreicht, daß man jedes folgende Partialprodukt um ein Glied weiter gegen die Rechte einrückt, wie aus folgenden Beispielen leicht zu ersehen ist.

I.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
7ax^4 & +\,9a^2x^3 & -\,5a^3x^2 & +\,3a^4x & -\,a^5 & & \\
2ax^2 & -\,3a^2x & -\,4a^3 & & & & \\
\hline
14a^2x^6 & +\,18a^5x^5 & -\,10a^4x^4 & +\,6a^5x^3 & -\,2a^6x^2 & & \\
 & -\,21a^5x^5 & -\,27a^4x^4 & +\,15a^5x^3 & -\,9a^6x^2 & +\,3a^7x & \\
 & & -\,28a^4x^4 & -\,36a^5x^3 & +\,20a^6x^2 & -\,12a^7x & +\,4a^8 \\
\hline
14a^2x^6 & -\,3a^5x^5 & -\,65a^4x^4 & -\,15a^5x^3 & +\,9a^6x^2 & -\,9a^7x & +\,4a^8.
\end{array}
$$

II.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
1 & -\,2x & +\,3x^2 & -\,4x^3 & +\,5x^4 & & & \\
3 & -\,5x & +\,7x^2 & -\,9x^3 & & & & \\
\hline
3 & -\,6x & +\,9x^2 & -\,12x^3 & +\,15x^4 & & & \\
 & -\,5x & +\,10x^2 & -\,15x^3 & +\,20x^4 & -\,25x^5 & & \\
 & & +\,7x^2 & -\,14x^3 & +\,21x^4 & -\,28x^5 & +\,35x^6 & \\
 & & & -\,9x^3 & +\,18x^4 & -\,27x^5 & +\,36x^6 & -\,45x^7 \\
\hline
3 & -\,11x & +\,26x^2 & -\,50x^3 & +\,74x^4 & -\,80x^5 & +\,71x^6 & -\,45x^7
\end{array}
$$

Sind mehrere komplexe Größen mit einander zu multipliciren, so multiplicire man das Produkt der beiden ersten mit der dritten Größe, das erhaltene Produkt mit der vierten, u. s. w. Es ist auch hier wieder einerlei (§. 50, 3), in welcher Ordnung die Faktoren mit einander multiplicirt werden; z. B.:

$$(a + x)(a - x)(2a - 3x) = (a^2 - x^2)(2a - 3x) = 2a^3 - 2ax^2 - 3a^2x + 3x^3.$$

Es ist in der Ausübung öfters vortheilhaft, das Produkt nicht zu entwickeln, sondern die Multiplikation bloß anzudeuten, weil dadurch der Kalkül vereinfacht wird, und in der Formel, auf welche derselbe führt, alle Operationen leichter übersehen werden können, welche zur Erhaltung des Resultates irgend einer bestimmten Aufgabe durchgeführt werden müssen, wie man in der Folge zu bemerken häufig Gelegenheit haben wird.

So wie man die Potenzen nach Graden eintheilt, welche nach der Menge der Einheiten ihrer Exponenten benannt werden. eben so klassificirt man jede Art von Produkten, welche aus einer bestimmten Menge von Faktoren zusammengesetzt sind, und benennt diese nach der Summe der Exponenten aller Faktoren, ohne jedoch die Zahlenkoefficienten zu berücksichtigen. So sind die Ausdrücke a, $3a$, $(a - b)$, $5(a + b + c)$, u. s. w. einfache Größen oder Größen des ersten Grades. Die Ausdrücke ab, $7ab$, a^2, $5a^2$, $(a \pm b)^2$, u. s. f. nennt man Größen vom zweiten Grade; a^3, a^2b, $5ab^2$, $(2a + 3b)^3$, u. s. w. heißen Produkte des dritten Grades, und allgemein a^n, $12a^n$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-m}b^m$, $a^{n-m-p}b^m c^p$, $(a \pm b)^n$, u. s. w. werden Größen vom n^{ten} Grade genannt, weil in allen diesen Größen die Summe der Exponenten aller Faktoren n Einheiten beträgt. Aus geometrischen Gründen nennt man die Größen des ersten Grades auch Größen von einer Dimension; jene des zweiten Grades Größen von zwei Dimensionen. und endlich die Produkte des dritten Grades Größen von drei Dimensionen. Größen von 4, 5, 6 . . . Dimensionen sind, geometrisch betrachtet, nicht denkbar, und diese Benennung, die man in ältern Schriften öfters findet, ist daher unzweckmäßig.

§. 53.

In Ansehung der Multiplikation gelten folgende allgemeine Grundsätze:

1. Wen $a = b$ und $c = d$ ist, so muß auch $a c = b d$ sein; d. h. Gleiches durch Gleiches multiplicirt gibt wieder Gleiches.

Ist also

$$A + B = C - D + E, \text{ so ist auch}$$
$$m(A + B) = m(C - D + E), \text{ oder}$$
$$mA + mB = mC - mD + mE,$$

d. h. eine Gleichung wird mit irgend einer Zahl m multiplicirt, wenn man alle Glieder der Gleichung mit m multiplicirt.

2. Ist $a = b$ und $c > d$, so ist auch $ac > bd$, d. h. wenn man Gleiches mit Ungleichem multiplicirt, so entsteht dort das größere Produkt, wo man mit der größern Zahl multiplicirt, oder wenn man Ungleiches durch Gleiches multiplicirt, so bleibt dasselbe Verhältniß der Ungleichheit.

3. Wenn $a > b$ und $c > d$, so ist auch $ac > bd$; daß aber $ad > bc$ sei, läßt sich nicht allgemein schließen, indem auch $ad \overset{=}{\underset{<}{}} bc$ sein kann.

§. 54.

1. Es sei

$$M = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + A_5 x^4 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{n-2} x^{n-3} + A_{n-1} x^{n-2} + A_n x^{n-1}, \text{ und}$$
$$m = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3 + B_5 x^4 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + B_{r-2} x^{r-3} + B_{r-1} x^{r-2} + B_r x^{r-1}, \text{ wo}$$

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}, A_n$ und $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{r-1}, B_r$ was immer für ganze positive oder negative Zahlen bezeichnen mögen. Die Zahlen, welche den Buchstaben A und B unten rechts angehängt sind, nennen wir die Zeiger (Indices), weil man an ihnen erkennt, in dem wievielsten Gliede des Polynomes das entsprechende A oder B erscheint. So z. B. ist B_4 der Koefficient im vierten Gliede, und B_r der Koefficient des r^{ten} Gliedes. Man sieht also, daß es zweckmäßiger ist, die verschiedenen Koefficienten auf diese Art zu bezeichnen, als sie durch verschiedene Buchstaben auszudrücken.

2. Sucht man nun das Produkt aus den beiden gegebenen Polynomen, welche wir *ähnliche* Polynome nennen wollen, indem sie beide nach demselben Gesetze gebildet sind, so findet man nach den Vorschriften des §. 52:

$$M = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + A_5 x^4 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{n-2} x^{n-3} + A_{n-1} x^{n-2} + A_n x^{n-1}$$
$$m = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3 + B_5 x^4 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + B_{r-2} x^{r-3} + B_{r-1} x^{r-2} + B_r x^{r-1}$$

$$M m = A_1 B_1 + \left.\begin{matrix} A_2 B_1 \\ + A_1 B_2 \end{matrix}\right\} x^1 + \left.\begin{matrix} A_3 B_1 \\ A_2 B_2 \\ A_1 B_3 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} A_4 B_1 \\ A_3 B_2 \\ A_2 B_3 \\ A_1 B_4 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} A_5 B_1 \\ A_4 B_2 \\ A_3 B_3 \\ A_2 B_4 \\ A_1 B_5 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

$$+ \left.\begin{matrix} A_n \; B_{r-2} \\ A_{n-1} \; B_{r-1} \\ A_{n-2} \; B_r \end{matrix}\right\} x^{n+r-4} + \left.\begin{matrix} A_n \; B_{r-1} \\ A_{n-1} \; B_r \end{matrix}\right\} x^{n+r-3} + A_n B_r x^{n+r-2}.$$

Aus den ersten fünf Gliedern dieses Produktes erkennt man das Gesetz, nach welchem die folgenden Glieder gebildet werden, ganz deutlich. Wollte man also allgemein jenes Glied im Produkte bilden, in welchem der Faktor x^u erscheint, wo wir $u \leqq n + r - 2$ annehmen, so würde man erhalten:

$$[A_{u+1} B_1 + A_u B_2 + A_{u-1} B_3 + A_{u-2} B_4 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_3 B_{u-1} + A_2 B_u + A_1 B_{u+1}]\, x^u,$$

welches Glied wir in der Folge das *unbestimmte* oder das *allgemeine Glied* nennen wollen, weil wir aus ihm alle Glieder des Produktes erhalten, wenn wir nach und nach $u = o, 1, 2, 3, \ldots$ setzen. Für $u = o$ findet man $A_1 B_1 x^0$, und daß dieses $= A_1 B_1$ sei, werden wir bald sehen. Das allgemeine Glied im Koefficienten jenes unbestimmten Gliedes, welches das Bildungsgesetz des ganzen Produktes enthält, ist offenbar $= A_{u-v+2} B_v$, und aus diesem werden alle übrigen Theile jenes allgemeinen Koefficienten gefunden, wenn man nach und nach $v = 1, 2, 3, \ldots$ setzt.

3. Man sieht aus der obigen Darstellung ohne Mühe ein, daß das Produkt $M m$ aus jenen beiden ähnlichen Faktoren nach demselben Gesetze geformt sei, wie M oder m, daß es nämlich ebenfalls nach den steigenden Potenzen von x geordnet erscheine. Das Produkt zweier ähnlicher Polynome ist also wieder ein Polynom von derselben Form. Durch Wiederholung dieses Schlusses findet man, daß das Produkt aus n solchen ähnlichen Polynomen ebenfalls ein Polynom von derselben Form sein müsse.

4. Ist $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3$, u. s. w. und allgemein $A_r = B_r$, also $M = m$, so erhält man:

$$M^2 = (A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots)^2 . = A_1^2 + \left.\begin{matrix} 2A_1 A_2 x + 2A_1 A_3 \\ A_2^2 \end{matrix}\right\} x^2$$

$$+ \left.\begin{matrix} 2A_1 A_4 \\ 2A_2 A_3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 2A_1 A_5 \\ 2A_2 A_4 \\ A_3^2 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2A_1 A_6 \\ 2A_2 A_5 \\ 2A_3 A_4 \end{matrix}\right\} x^5 + \left.\begin{matrix} 2A_1 A_7 \\ 2A_2 A_6 \\ 2A_3 A_5 \\ A_4^2 \end{matrix}\right\} x^6 + \ldots$$

und das n^{te} Glied ist

$$\left.\begin{matrix} 2A_1 A_n \\ 2A_2 A_{n-1} \\ 2A_3 A_{n-2} \\ 2A_4 A_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2A_v A_{n-v+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2A_{\frac{n-4}{2}} A_{\frac{n+6}{2}} \\ 2A_{\frac{n-2}{2}} A_{\frac{n+4}{2}} \\ 2A_{\frac{n}{2}} A_{\frac{n+2}{2}} \end{matrix}\right\} x^{n-1} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{matrix} 2A_1 A_n \\ 2A_2 A_{n-1} \\ 2A_3 A_{n-2} \\ 2A_4 A_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2A_v A_{n-v+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2A_{\frac{n-3}{2}} A_{\frac{n+5}{2}} \\ 2A_{\frac{n-1}{2}} A_{\frac{n+3}{2}} \\ \left(A_{\frac{n+1}{2}}\right)^2 \end{matrix}\right\} x^{n-1},$$

je nachdem $(n : 2)$ eine ganze Zahl ist oder nicht, d. h. je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

So z. B. ist

$$(3+2x+x^2+5x^3)(2+x+3x^2) = 6+7x+13x^2+17x^3+18x^4+15x^5,$$

denn hier ist

$$A_1 = 3,\ A_2 = 2,\ A_3 = 1,\ A_4 = 5,\ A_5 = 0,\ A_6 = 0,\ \text{u. s. f.}$$

und

$$B_1 = 2,\ B_2 = 1,\ B_3 = 3,\ B_4 = 0 = B_5 = B_6 = \ldots,\ \text{also}$$

$$A_1 B_1 = 3 . 2 = 6,$$

$$\left.\begin{matrix} A_1 B_2 \\ A_2 B_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 . 1 \\ 2 . 2 \end{matrix}\right\} = 3 + 4 = 7,$$

$$\left.\begin{matrix} A_1 B_3 \\ A_2 B_2 \\ A_3 B_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 . 3 \\ 2 . 1 \\ 1 . 2 \end{matrix}\right\} = 9+2+2 = 13,$$

$$\left.\begin{matrix} A_1 B_4 \\ A_2 B_3 \\ A_3 B_2 \\ A_4 B_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 . 0 \\ 2 . 3 \\ 1 . 1 \\ 5 . 2 \end{matrix}\right\} = 0+6+1+10 = 17$$

$$\left.\begin{matrix} A_1 B_5 \\ A_2 B_4 \\ A_3 B_3 \\ A_4 B_2 \\ A_5 B_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 3 . 0 \\ 2 . 0 \\ 1 . 3 \\ 5 . 1 \\ 0 . 2 \end{matrix}\right\} = 3+5 = 8$$

und

$$A_4 B_3 = 5 . 3 = 15;$$

alle folgenden Koefficienten sind $= 0$.

Eben so ist

$$(3+2x-7x^2+4x^3)^2 = 9+12x-38x^2-4x^3+65x^4-56x^5+16x^6,$$

denn hier ist

$$A_1 = 3,\ A_2 = 2,\ A_3 = -7,\ A_4 = 4,\ A_5 = 0 = A_6 = \ldots,$$

und demnach

$$A_1^2 = 3^2 = 3 . 3 = 9;\ 2A_1 A_2 = 2 . 3 . 2 = 12;$$

$$2A_1 A^3 + A_2^2 = 2 . 3 (-7) + 2^2 = -42 + 4 = -38;$$

$$2A_1 A_3 + 2A_2 A_3 = 2 . 3 . 4 + 2 . 2 (-7) = 24 - 28 = -4;$$

$$2A_1 A_5 + 2A_2 A_4 + A_3^2 = 0 + 2 . 2 . 4 + (-7)^2 = 16 + (-7)(-7)$$
$$= 16 + (+49) = 16 + 49 = 65;$$

$$2A_1 A_6 + 2A_2 A_5 + 2A_3 A_4 = 0 + 0 + 2(-7) . 4 = -56,$$

und endlich $A_4^2 = 4^2 = 4 . 4 = 16$;

wenn wir die Theile, welche den Faktor 0 enthalten, gleich weglassen.

5. Bezeichnet man die Ziffern einer Zahl der Ordnung nach, von der Rechten gegen die Linke, allgemein mit den Buchstaben a, a_1, a_2, a_3, u. s. w., so ist klar, daß $a + a_1 . 10$ die allgemeine Form einer zweizifferigen Zahl sei. Z. B.:

$$\overset{a_1 a}{35} = 30 + 5 = 5 + 30 = \overset{a}{5} + \overset{a_1}{3} . 10.$$

Eben so ist $a + a_1 . 10 + a_2 . 10^2$ der allgemeine Ausdruck einer dreizifferigen Zahl. Z. B.:

$$\overset{a_2 a_1 a}{728} = 700 + 20 + 8 = 8 + 2.10 + 7.100 = \overset{a}{8} + \overset{a_1}{2}.10^1 + \overset{a_2}{7}.10^2.$$

Auf ähnliche Art bezeichnet der Ausdruck

$$a + a_1 . 10 + a_2 . 10^2 + a_3 . 10^3$$

jede vierzifferige Zahl. Man sieht hieraus, daß, wenn man was immer für eine Zahl auf diese Art bezeichnet, der höchste Exponent von 10 um eine Einheit kleiner sei, als die Anzahl der Ziffern, mit welchen die Zahl geschrieben ist. Es ist also der Ausdruck

$$a + a_1 . 10 + a_2 . 10^2 + a_3 . 10^3 + a_4 . 10^4 + \ldots\ldots$$
$$+ a_{n-3} . 10^{n-3} + a_{n-2} . 10^{n-2} + a_{n-1} . 10^{n-1}$$

die allgemeine Formel einer jeden n zifferigen Zahl.

Hat man demnach

$$M = a + a_1 . 10 + a_2 . 10^2 + a_3 . 10^3 + \ldots + a_{n-2} . 10^{n-2} + a_{n-1} . 10^{n-1}$$

und

$$m = \alpha + \alpha_1 . 10 + \alpha_2 . 10^2 + \alpha_3 . 10^3 + \ldots + \alpha_{r-2} . 10^{r-2} + \alpha_{r-1} . 10^{r-1},$$

so ist aus dem Vorstehenden klar, daß

$$[\alpha_{r-2} a_{n-1} + \alpha_{r-1} a_{n-2}]\ 10^{n+r-3} + \alpha_{r-1} a_{n-1} . 10^{n+r-2}$$

die beiden letzten oder höchsten Glieder des Produktes seien. Es sei nun

$$\alpha_{r-2}\,a_{n-1} + \alpha_{r-1}\,a_{n-2} = A + B\,.\,10,$$

so werden jene beiden letzten Glieder zusammen gleich werden

$$(A + B\,.\,10)\,10^{n+r-3} + \alpha_{r-1}\,a_{n-1}\,10^{n+r-2} = A\,.\,10^{n+r-3} +$$
$$[B + \alpha_{r-1}\,a_{n-1} +]\,10^{n+r-2}.$$

Hier sind nun zwei Fälle möglich, denn entweder ist $(B + \alpha_{r-1}\,a_{n-1})$ eine einzifferige oder eine zweizifferige Zahl. Im ersten Falle sei $B + \alpha_{r-1}\,a_{n-1} = C$, im andern aber $B + \alpha_{r-1}\,a_{n-1} = C + D\,.\,10$, so daß dann

$$(B + \alpha_{r-1}\,a_{n-1})\,10^{n+r-2} = (C + D\,.\,10)\,10^{n+r-2}$$
$$= C\,.\,10^{n+r-2} + D\,.\,10^{n+r-1}$$

wird, so ist die höchste Ziffer des gesuchten Produktes, mit Rücksicht auf ihren Lokalwerth, entweder $C\,.\,10^{n+r-2}$ oder $D\,.\,10^{n+r-1}$, d. h. das Produkt hat wenigstens $(n + r - 2) + 1 = n + r - 1$ und höchstens $(n + r - 1) + 1 = n + r$ Ziffern, oder das Produkt hat entweder bloß um eine Ziffer weniger, oder höchstens eben so viele Ziffern als beide Faktoren zusammen.

F. Von der Division.

§. 55.

Aufgabe.

Inkomplexe Buchstabengrößen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Man hat hierbei auf folgende Punkte zu sehen:

1. Wenn $D : d = q$, so muß $D = d\,q$ sein (§. 32); d. h. das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten ist dem Dividende gleich. Also ist, wenn $D = d\,q$, auch umgekehrt $D : d = q$ und $D : q = d$.

2. Da $a = 1\,.\,a$, so ist auch $a : a = 1$ und $a : 1 = a$ (Nro. 1, d. h. jede Größe durch sich selbst dividirt, gibt die Einheit als Quotienten, und eine Größe durch 1 dividirt, gibt sich selbst als Quotienten.

3. Setzen wir also in jenen Gleichungen $D = d\,q$, so erhalten wir

$$(dq) : d = q \text{ und } (dq) : q = d,$$

d. h. dividirt man ein Produkt aus zwei Faktoren durch einen derselben, so erhält man den andern Faktor zum Quotienten.

Da nun
$(ABCDE):(ACD) = (ACD.BE):(ACD) = (ACD)(BE):(ACD) = BE$
ist, so sieht man deutlich, daß, wenn ein Produkt aus mehreren Faktoren durch ein Produkt aus einigen derselben dividirt wird, das Produkt der übrigen Faktoren als Quotient erscheine.

4. Es ist
$(A + B) : d = (A : d) + (B : d)$ oder $\frac{A + B}{d} = \frac{A}{d} + \frac{B}{d}$;
denn es sei $\frac{A}{d} = Q$ und $\frac{B}{d} = Q'$, so ist $A = dQ$ und $B = dQ'$, also auch $A + B = dQ + dQ' = d(Q + Q')$, nämlich

$$A + B = d(Q + Q'),$$ folglich

$$\frac{A + B}{d} = \frac{d(Q + Q')}{d} = Q + Q;$$

oder statt Q und Q' die Werthe gesetzt:

$$\frac{A + B}{d} = \frac{A}{d} + \frac{B}{d},$$ oder

$$(A + B) : d = (A : d) + (B : d).$$

Auf dieselbe Art findet man, daß

$$\frac{A + B + C + D \ldots}{d} = \frac{A}{d} + \frac{B}{d} + \frac{C}{d} + \frac{D}{d} + \ldots\ldots$$

sei. Man dividirt demnach einen zusammengesetzten Ausdruck durch einen einfachen, wenn man jedes Glied des Dividends durch den gegebenen Divisor theilt; und umgekehrt ist

$$\frac{A}{d} + \frac{B}{d} + \frac{C}{d} + \ldots = \frac{A + B + C + \ldots}{d}$$

d. h. die Summe mehrerer, auf denselben Divisor sich beziehenden Quotienten ist gleich der Summe aller Dividende, getheilt durch denselben Divisor.

5. Setzt man in der vorletzten Gleichung $A = B = C = D \ldots$ und die Anzahl der Summanden $= m$, so findet man

$$\frac{A + A + A + A + \ldots}{d} = \frac{A}{d} + \frac{A}{d} + \frac{A}{d} + \frac{A}{d} + \ldots,$$ d. i.

$$\frac{m \,.\, A}{d} = m \,.\, \frac{A}{d}$$ oder $(mA) : d = m(A : d)$.

Also wird ein Produkt $m.A$ durch d dividirt, wenn man den einen Faktor A durch d dividirt, und den Quotienten $\frac{A}{d}$ durch den andern ungeänderten Faktor m multiplicirt.

Da nun

$$ABC = AB.C = AC.B = BC.A,$$ so ist auch

$$\frac{ABC}{d} = AB \cdot \frac{C}{d} = AC \cdot \frac{B}{d} = BC \cdot \frac{A}{d}.$$

Umgekehrt ist auch

$$m \cdot \frac{A}{d} = \frac{A}{d} \cdot m = \frac{mA}{d},$$

d. h. ein Quotient $\frac{A}{d}$ wird durch irgend eine Zahl m multiplicirt, wenn man das Produkt aus dieser Zahl m in den Dividend A durch den gegebenen Theiler d dividirt.

6. Enthält der Dividend alle Faktoren des Divisors, so ist die Division ein Messen (§. 34); und der Quotient wird in diesem Falle gefunden, wenn man im Dividende alle Faktoren des Divisors wegläßt (2). Z. B.

$$12ab : 3a = \frac{12ab}{3a} = \frac{3a.4b}{3.a} = 4b,$$

$$36abc : 4b = \frac{4.9abc}{4b} = 9ac, \text{ und}$$

$$65abcd : 13ac = \frac{5.13abcd}{13ac} = 5bd.$$

7. Enthalten Dividend und Divisor Potenzen derselben Buchstabengröße, so enthält auch der Quotient eine Potenz eben dieses Buchstaben, deren Exponent gefunden wird, wenn man vom Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors abzieht. Z. B.:

$$a^2 : a = a^2 : a^1 = a^{2-1} = a^1 = a, \text{ denn}$$

$$a^2 : a = \frac{aa}{a} = a \cdot 1 = a.$$

Eben so ist

$$a^7 : a^3 = a^{7-3} = a^4, \text{ weil}$$

$$a^7 : a^3 = \frac{a^7}{a^3} = \frac{a^{4+3}}{a^3} = \frac{a^4 . a^3}{a^3} \text{ (§. 49, 2)} = a^4 \cdot 1 = a^4 \text{ und}$$

$$a^9 : a^4 = a^{9-4} = a^5, \text{ indem } a^9 : a^4 = \frac{a^{5+4}}{a^4} = \frac{a^5 . a^4}{a^4} = a^5.$$

Es ist also auch allgemein $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Hieraus und aus Nr. 3 folgt, daß die Division verrichtet werde, wenn man den Dividend in seine Faktoren zerlegt, und einen derselben durch den gegebenen Divisor theilet. Z. B.:

$$8a^2b^3cd^2 : 4abd^2 = \frac{8a^2b^3cd^2}{4abd^2} = \frac{4abd^2 . 2ab^2c}{4abd^2} = 2ab^2c.$$

8. In dem Ausdrucke $a^m : a^n = a^{m-n}$ können drei Fälle Statt finden, denn es ist entweder $m = n$ oder $m > n$ oder endlich $m < n$. Ist $m = n$, so ist $a^m : a^n = a^m : a^m = 1$ (2), und nach (7) ist $a^m : a^m = a^{m-m} = a^o$, also ist auch $a^o = 1$.

Ist $m > n$, so ist $m - n$ eine positive Größe, welcher Fall für sich klar ist.

Ist aber $m < n$, so ist $m - n$ eine negative Größe. Es sei z. B.

$$n = m + \mu, \text{ mithin } m = n - \mu, \text{ so ist}$$

$$a^m : a^n = \frac{1 \cdot a^m}{a^{m+\mu}} = \frac{1\, a^m}{a^m\, a^\mu} = \frac{1}{a^\mu}, \text{ und da auch}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{n-\mu-n} = a^{-\mu}$$

so ist auch $a^{-\mu} = \frac{1}{a^\mu}$, d. h. jede Größe mit einem negativen Exponenten ist gleich der Einheit, dividirt durch dieselbe Größe mit dem nämlichen Exponenten, aber positiv.

9. Weil $\pm a \times m = \pm am$, so ist auch $\pm am : + m = \pm a$. Ist also der Divisor positiv, so hat der Quotient das Zeichen des Dividends.

Da ferner

$\pm a \times - m = \mp am$, so muß auch $\mp am : - m = \pm a$ sein. Ist demnach der Divisor negativ, so hat der Quotient das entgegengesetzte Zeichen des Dividends. Diese beiden Sätze enthalten also folgende vier Fälle:

$$+ am : + m = + a$$
$$- am : + m = - a$$
$$- am : - m = + a$$
$$+ am : - m = - a$$

aus welchen erhellet, daß der Quotient positiv oder negativ sei, je nachdem Dividend und Divisor dieselben oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Beispiele.

I. $24\, a^5 b^4 x^2 : 8\, a^3 b^4 x = 3\, a^2 x.$

II. $-45 a^2 b^3 x^n : 9\, a b x^m = -5\, a b^2 x^{n-m}.$

III. $-12\, a^m b^n c^p : -3\, a^r b^{2n} c^p = +4\, a^{m-r} b^{n-2n} c^{p-p}$
$= 4\, a^{m-r} b^{-n} c^o = 4\, a^{m-r} b^{-n}\, 1. = 4\, a^{m-r} b^{-n}.$

IV. $36\, a^m b^2 x^p : -4\, a^{m-2} b^2 x^{p-4} = -9\, a^{m-(m-2)} x^{p-(p-4)}$
$= -9\, a^{m-m+2} x^{p-p+4} = -9\, a^2 x^4.$

10. Enthalten Dividend und Divisor ungleichartige Buchstabengrößen, so wird die Division bloß angezeigt, und zwar gewöhnlich in der Form eines Bruches. Z. B.:

$$b : a = \frac{b}{a};\ 7\,a^2 b : 5\,a^2 x = \frac{7\,a^2 b}{5\,a^2 x} = \frac{7\,b}{5\,x};$$

$$-\,m^3 x^2 : 4\,a^2 m = \frac{-\,m^3 x^2}{4\,a^2 m} = -\,\frac{m^2 x^2}{4\,a^2}.$$

Aus dem bisher Gesagten folgen also folgende Divisionsregeln:

a) Die nämlichen Zeichen geben einen positiven Quotienten, verschiedene Zeichen aber einen negativen.

b) Die Zahlenkoefficienten werden, wenn es möglich ist, durch einander dividirt.

c) Dieselbe Buchstabengröße wird nur einmal im Quotienten geschrieben, und zwar mit einem Exponenten, der gleich ist dem Unterschiede zwischen dem Exponenten des Dividends und jenem des Divisors.

d) Sind die Buchstabengrößen verschieden, so wird die Division in der Form eines Bruches bloß angezeigt.

§. 56.

Aufgabe.

Mehrgliedrige Buchstabengrößen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

1. Man ordne Dividend und Divisor nach den fallenden Potenzen einer und derselben Buchstabengröße (§. 52, Anm); dann dividire man das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors (nach §. 55), und bemerke sich den Quotienten. Mit diesem gefundenen Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Produkt vom Dividende ab. Bleibt kein Rest, so ist die Division vollendet.

2. Bleibt aber ein Rest, so dividire man wieder das erste Glied desselben durch das erste Glied des Divisors; multiplicire mit diesem gefundenen Partialquotienten den ganzen Divisor, und subtrahire das Produkt vom vorigen Reste. Diese Operation wiederhole man so oft, bis man endlich auf einen Rest $= 0$ kommt. Die algebraische Summe der auf diese Art gefundenen Partialquotienten ist der verlangte Quotus.

3. Stößt man auf einen Rest, in welchem die höchste Potenz jener Buchstabengröße, nach welcher der Dividend und Divisor geordnet worden sind, einen kleinern Exponenten hat, als die höchste Potenz des nämlichen Buchstaben im Divisor; so ist dieses ein Zeichen, daß die

Division nicht aufgehe, oder daß sie kein Messen sei, und man bricht dann bei diesem Reste die Division ab, bemerkt sich aber zur Seite den gebliebenen Rest. Uebrigens kann man den Dividend und Divisor auch nach den steigenden Potenzen der Hauptgröße ordnen.

Der Dividend und der Divisor werden in Klammern eingeschlossen, und zwischen beide wird das Divisionszeichen gesetzt.

Beispiele.

I. $$(20\,a^3 b x^3 - 28\,a^2 b^3 x^2) : (5\,a x^2 - 7\,b^2 x) = 4\,a^2 b x$$
$$\begin{array}{rr} 20\,a^3 b x^3 & -\ 28\,a^2 b^3 x^2 \\ - & + \\ \hline \text{"} & \text{"} \end{array}$$

II. $$(a^2 + 2\,a b + b^2) : (a + b) = a + b$$
$$\begin{array}{rr} a^2 & +\ a b \\ - & - \\ \hline \text{"} & a b + b^2 \\ \text{"} & a b + b^2 \\ & - \quad - \\ \hline & \text{"} \quad \text{"} \end{array}$$

III. $$(35 + x - 10x^2 + 19x^3 - 15x^4) : (7 + 3x - 5x^2) = 5 - 2x + 3x^2$$
$$\begin{array}{lllll} 35 & +15x & -25x^2 & & \\ - & - & + & & \\ \hline \text{"} & -14x & +15x^2 & +19x^3 & -15x^4 \\ & -14x & -\ 6x^2 & +10x^3 & \\ & + & + & - & \\ \hline & \text{"} & 21x^2 & +\ 9x^3 & -15x^4 \\ & & 21x^2 & +\ 9x^3 & -15x^4 \\ & & - & - & + \\ \hline & & \text{"} & \text{"} & \text{"} \end{array}$$

Es ist nicht nöthig, zum gebliebenen Reste immer alle übrigen Glieder des Dividends herabzusetzen, sondern es ist schon hinreichend, so viele der nächsten Glieder in Anspruch zu nehmen, daß man eben so viele Theile habe, als der Divisor Glieder hat.

Man findet eben so

IV. $$\frac{(2\,x^5 - 2\,x^4 y - 5\,x^3 y^2 + 15\,x^2 y^3 - 43\,x y^4 + 21\,y^5)}{(2\,x^2 + 4\,x y - 3\,y^2)}$$
$$= x^3 - 3\,x^2 y + 5\,x y^2 - 7\,y^2$$

V. $$(a^4 - x^4) : (a - x) = a^3 + a^2 x + a x^2 + x^3.$$

Man bestimme zur Uebung den Quotienten

$$(1 + 4x^2 + 6y - 4x + 9y^2 - 12xy) : (1 - 2x + 3y),$$

und dividire das Polynom

$$810xy^2 + 720x^3y^6 + 240x^4y^3 + 243 + 32x^5y^{10} + 1080x^2y^4$$

durch

$$4x^2y^4 + 12xy^2 + 9,$$

nachdem die Größen zuvor geordnet worden sind. Anfänger thun gut, wenn sie zur Uebung den gefundenen Quotienten mit dem Divisor multipliciren, und zum Produkte den gebliebenen Rest addiren, wo dann der Dividend als Resultat erscheinen muß, wenn der gefundene Quotient der wahre ist.

Anmerkung. Haben Dividend und Divisor nicht ähnliche Glieder, so wird die Division bloß angezeigt, und zwar wieder in der Form eines Bruches. Der so erhaltene Ausdruck wird dadurch öfters abgekürzt, daß man den, allen Gliedern des Dividends und Divisors gemeinschaftlichen Faktor wegläßt, und dann die Division abermals anzeigt. Z. B.:

$$(12a^4b^2x^3 - 8a^2x^3) : (4a^2bx^3 - 24a^3b^2x^4) =$$

$$= \frac{12a^4b^2x^3 - 8a^2x^3}{4a^2bx^3 - 24a^3b^2x^4} = \frac{4a^2x^3(3a^2b^2 - 2)}{4a^2x^3(b - 6ab^2x)} = \frac{3a^2b^2 - 2}{b - 6ab^2x},$$

und $a^2 : (a^2 - a^3) = \frac{a^2}{a^2 - a^3} = \frac{a^2 . 1}{a^2(1 - a)} = \frac{1}{1 - a}$.

§. 57.

Ist der Dividend ein Monom und der Divisor ein Polynom, so begnügt man sich gewöhnlich mit der in der Anmerkung des vorigen Paragraphs angegebenen Reduktion; z. B.:

$$a^3 : (a^2 - a^3) = \frac{a^3}{a^2 - a^3} = \frac{a^2 . a}{a^2(1 - a)} = \frac{a}{1 - a}.$$

Würde man hier gerade so, wie §. 56, verfahren, so würde man zwar die gehörigen Partialquotienten finden, aber sogleich auch einsehen, daß die Division nie zu Ende gebracht werden könne, weil immer ein Rest bleibt, so weit man auch die Division fortsetzt. Man erhält nämlich

$$\frac{a}{1 - a} = a : (1 - a) = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots \text{ ohne Ende.}$$

Eben so findet man

$$\frac{a}{1 - x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots \text{ ohne Ende.}$$

Setzt man hier, weil x jede beliebige Zahl bezeichnen kann, $x = 1$, so wird

$$\frac{a}{1-1} = a + a + a + a + \ldots \text{ ohne Ende;}$$

addirt man aber eine gegebene Zahl a ohne Ende zu sich selbst, so muß man eine Summe erhalten, welche größer ist als jede noch so große Zahl, die durch Ziffern nur immer ausgedrückt werden kann, oder die Summe muß ohne Ende wachsen. Solche ohne Ende fortwachsende Größen nennt der Mathematiker unendlich große oder schlechtweg unendliche Größen, und bezeichnet sie durch das Zeichen ∞; wir erhalten demnach

$$\frac{a}{1-1} = \frac{a}{0} = \infty, \text{ und hieraus folgt:}$$

$$0 \,.\, \infty = a \text{ und } \frac{a}{\infty} = 0.$$

Die Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$ sagt: jede Größe durch 0, d. i. durch den kleinsten Divisor dividirt, gibt einen unendlich großen, also den größten Quotienten; und umgekehrt lehrt uns die Gleichung $\frac{a}{\infty} = 0$, daß jede Größe, durch eine unendlich große Zahl dividirt, 0 zum Quotus gibt, oder mit andern Worten: Wenn der Divisor den größten Werth erreicht, so erhält der Quotient den kleinsten, oder der Quotient wird unendlich klein, d. h. kleiner als jede noch so kleine Zahl, die sich noch durch Ziffern ausdrücken läßt.

Eben so wird $\frac{-a}{0} = -\infty$.

Bezeichnet A eine beliebige gegebene positive Zahl und x eine veränderliche Zahl, d. h. eine solche, welcher alle denkbaren Werthe beigelegt werden können, so wird der Quotient $\frac{A}{x}$ bei dem unendlichen Wachsen von x unendlich abnehmen, und bei der unendlichen Abnahme von x ohne Ende wachsen und für $x=0$ jede Grenze überschreiten oder größer werden als jede noch so große Zahl. Geht endlich x in den negativen Zustand über, so wird auch der Quotient $\frac{A}{x}$ negativ und absolut betrachtet um so kleiner, je größer der Werth von x, absolut betrachtet, ist.

Ist z. B. $A = 24$, so wird

für $x = -\infty, \ldots -3, -2, -1, \ldots 0, +1, +2, +3 \ldots +\infty$

$\frac{24}{x} = -0, \ldots -8, -12, -24, \ldots \infty, 24, 12, 8 \ldots +0.$

Auf ähnliche Art findet man

$$\frac{a}{1+a} = a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 - a^6 + \ldots \text{ ohne Ende.}$$

Die auf diese Art gefundenen Partialquotienten befolgen ein gewisses Gesetz, welches in vielen Fällen leicht erkannt wird, so daß man die folgenden Partialquotienten angeben kann, ohne die Division weiter fortzusetzen. Auch die nach und nach gebliebenen Reste befolgen ein gewöhnlich leicht zu erkennendes Gesetz, so daß man im Stande ist, dieselben anzugeben, wo man auch immer die Fortsetzung der Operation abbricht. — Da in solchen Fällen die Division nie aufgehen kann, so bilden die so gefundenen Partialquotienten bei fortgesetzter Operation eine ohne Ende fortlaufende Folge von Größen, das ist, eine unendliche Reihe, deren Summe der in der Form eines Bruches gegebene Ausdruck ist. Vernachläßigt man bei solchen Divisionen den Rest, so bezeichnet das Zeichen (=) keineswegs die Gleichheit der Quantität des Quotienten und des gegebenen Ausdruckes, sondern es sagt nichts weiter, als daß der Quotient der gefundenen Reihe der Form nach gleich sei.

Zur Uebung verwandle man die Ausdrücke

$$\frac{1}{1 \pm x}, \quad \frac{1}{1 \pm 2x + x^2} \text{ und } \frac{1}{1 \pm x^2}$$

in unendliche Reihen, und bestimme die Form des allgemeinen oder unbestimmten Gliedes und des dazu gehörigen Restes.

§. 58.

Anmerkung 1. Wenn wir den zusammengesetzten Ausdruck

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + A_4 x^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n,$$

wo die Koefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ was immer für ganze, positive oder negative Zahlen bezeichnen mögen, durch $x-\alpha$ nach den bereits bekannten Regeln, dividiren, so fällt das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder, sowohl im Quotienten als in den respektiven Resten, sehr bald in die Augen. Wir finden nämlich:

$$\frac{x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots\ldots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n}{x - \alpha} =$$

$$= x^{n-1} + (\alpha + A_1) x^{n-2} + (\alpha^2 + A_1 \alpha + A_2) x^{n-3} +$$
$$+ (\alpha^3 + A_1 \alpha^2 + A_2 \alpha + A_3) x^{n-4} + (\alpha^4 + A_1 \alpha^3 + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha + A_4) x^{n-5} + \ldots$$
$$+ (\alpha^{n-2} + A_1 \alpha^{n-3} + A_2 \alpha^{n-4} + \ldots + A_{n-4} \alpha^2 + A_{n-3} \alpha + A_{n-2}) x$$
$$+ (\alpha^{n-1} + A_1 \alpha^{n-2} + A_2 \alpha^{n-3} + A_3 \alpha^{n-4} + \ldots + A_{n-3} \alpha^2 + A_{n-2} \alpha + A_{n-1})$$
$$+ \frac{\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + A_3 \alpha^{n-3} + \ldots + A_{n-2} \alpha^2 + A_{n-1} \alpha + A_n}{x - \alpha}.$$

Ist die Division ein Messen, so wird der Rest

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} A_2 \alpha^{n-2} + \ldots + A_{n-2} \alpha^2 + A_{n-1} \alpha + A_n = 0,$$

und umgekehrt, ist dieser Rest $= 0$, so ist die Division ein Messen. Es läßt sich demnach noch vor der wirklichen Division ausmitteln, ob diese ein Messen sei oder nicht; denn wir sehen sogleich, daß der Rest

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \alpha + A_n$$

aus dem Dividende abgeleitet werde, wenn wir α statt x schreiben; thun wir dieß, und es verschwindet die gefundene algebraische Summe, so ist die Division ein Messen, im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Bezeichnen wir den oben gefundenen Quotienten Kürze halber durch

$$x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + C_2 x^{n-3} + C_3 x^{n-4} + \ldots + C_\varrho x^{n-\varrho-1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-2} x + C_{n-1}$$

und den Rest durch R; so finden wir durch eine aufmerksame Betrachtung der Koefficienten, daß

$$C_1 = \alpha + A_1$$
$$C_2 = \alpha^2 + A_1 \alpha + A_2 = \alpha C_1 + A_2$$
$$C_3 = \alpha^3 + A_1 \alpha^2 + A_2 \alpha + A_3 = \alpha . C_2 + A_3$$
$$C_4 = \alpha . C_3 + A_4$$

. . . . allgemein

$$C_\varrho = \alpha . C_{\varrho-1} + A_\varrho$$ und
$$C_n = \alpha . C_{n-1} + A_n = R$$ sei.

So z. B. ist

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 34x - 120}{x - 6} = x^2 + 9x + 20,$$

weil $A_1 = 3$, $A_2 = -34$, $A_3 = -120$, $A_4 = 0 = A_5 = \ldots$, $n = 3$ und $\alpha = 6$, mithin

$$C_1 = \alpha + A_1 = 6 + 3 = 9$$
$$C_2 = \alpha C_1 + A_2 = 6 . 9 - 34 = 20$$
$$C_3 = \alpha C_2 + A_3 = 6 . 20 - 120 = 0 = R.$$

Eben so findet man

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 36}{x - 3} = x^2 - 4x - 12$$

Man muß hier den Dividend auf folgende Art dargestellt denken:

$$x^3 - 7x^2 + 0 . x + 36 \text{ oder } x^3 - 7x^2 - 0 . x + 36,$$

also allgemein

$$x^3 - 7x^2 \pm 0 . x + 36;$$

so daß die Reihe der Exponenten von x nicht unterbrochen wird.

Der Anfänger dividire den obigen allgemeinen Ausdruck auch durch $x + \alpha$, und suche das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder sowohl für den Quotienten, als für die auf einander folgenden Reste.

Zur Uebung:

1) Man bestimme den Quotienten $\frac{1}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3}$.

2) Man soll in dem Ausdrucke

$$(x^5 - 11 x^4 + 40 x^3 - 45 x^2 + a x + 60)$$

den Koefficienten a so bestimmen, daß das Polynom durch $(x - 5)$ ohne Rest getheilt werden kann.

3) Man bestimme den Quotienten

$$\frac{x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \text{ nach §. 42, 2.}$$

Anmerkung 2. Wir wollen noch nachstehende Quotienten entwickeln, weil wir von ihnen in der Folge einen nützlichen Gebrauch machen werden.

$$\text{I. } \frac{a^n - x^n}{a - x} = a^{n-1} + a^{n-2} x + a^{n-3} x^2 + a^{n-4} x^3 + a^{n-5} x^4 + \ldots + a^2 x^{n-3} + a x^{n-2} + x^{n-1};$$

$$\text{II. } \frac{a^n - x^n}{a + x} = a^{n-1} - a^{n-2} x + a^{n-3} x^2 - a^{n-4} x^3 + a^{n-5} x^4 - \ldots \pm a^2 x^{n-3} \mp a x^{n-2} \pm x^{n-1} \mp \frac{R}{a + x};$$

$$\text{III. } \frac{a^n + x^n}{a + x} = a^{n-1} - a^{n-2} x + a^{n-3} x^2 - a^{n-4} x^3 + a^{n-5} x^4 - \ldots \pm a^2 x^{n-3} \mp a x^{n-2} \pm x^{n-1} \mp \frac{R'}{a + x};$$

$$\text{IV. } \frac{a^n + x^n}{a - x} = a^{n-1} + a^{n-2} x + a^{n-3} x^2 + a^{n-4} x^3 + a^{n-5} x^4 + \ldots + a^2 x^{n-3} + a x^{n-2} + x^{n-1} + \frac{R''}{a - x}.$$

Im ersten Falle geht die Division auf, denn der angegebene Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, gibt den Dividend $a^n - x^n$. Die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen (Potenzen desselben Grades) ist also durch die Differenz der Wurzeln immer theilbar.

Im zweiten Falle gibt das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten $Q = a^{n-1} - a^{n-2} x + \ldots \pm x^{n-1}$ den Werth $a^n \pm x^n$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, wie aus dem Bildungsgesetze des Quotienten von selbst erhellt. Das Produkt $Q(a + x)$ ist also unserm Di-

vidende $a^n - x^n$ nur dann gleich, wenn n eine gerade Zahl ist, und dann wird $R = 0$, im entgegengesetzten Falle aber wird
$R = (a^n - x^n) - Q(a + x) = (a^n - x^n) - (a^n + x^n) = -2x^n$.
Die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen ist also durch die Summe der Wurzeln nur dann theilbar, wenn der Exponent n eine gerade Zahl ist oder den Faktor 2 enthält.

Nennen wir im dritten Falle den Quotienten auch wieder kurz Q, so ist $\frac{a^n + x^n}{a + x} = Q \pm \frac{R'}{a + x}$, also

$$a^n + x^n = (a + x) Q \mp R' = (a^n \pm x^n) \mp R_{,}, \text{ folglich}$$
$$\mp R' = (a^n + x^n) - (a^n \pm x^n).$$

Hier wird $R' = 0$, wenn das obere Zeichen gilt, d. h. wenn n eine ungerade Zahl ist, wie aus der Betrachtung von Q erhellt; im entgegengesetzten Falle aber wird

$$R' = (a^n + x^n) - (a^n - x^n) = +2x^n.$$

Die Summe zweier gleichnamigen Potenzen ist also durch die Summe der Wurzeln nur dann ohne Rest theilbar, wenn der Exponent n eine ungerade Zahl ist.

Im vierten Falle ist, wenn der Quotus wieder $= Q$ gesetzt wird,

$$\frac{a^n + x^n}{a - x} = Q + \frac{R''}{a - x}, \text{ also}$$
$$a^n + x^n = Q(a - x) + R'' = (a^n - x^n) + R'', \text{ folglich}$$
$$R'' = (a^n + x^n) - (a^n - x^n) = +2x^n,$$

d. h. die Summe zweier gleichnamigen Potenzen ist durch den Unterschied der Wurzeln nie theilbar, der Exponent n mag gerade oder ungerade sein.

Besondere Beispiele wird sich der Anfänger leicht selbst geben können, und zur Uebung entwickle derselbe die obigen Quotienten auch nach der in Anm. 1 gelehrten Methode.

Welchen Werth erhält der Quotient $\frac{a^n - x^n}{a - x}$ für $x = a$?

Anmerkung 3. Jede dekadische Zahl Z läßt sich auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} Z &= a \, . \, 10^{n-1} + b \, . \, 10^{n-2} + c \, . \, 10^{n-3} + \ldots + k \, . \, 10^{r+1} + 1 \, . \, 10^r \\ &\quad + m \, . \, 10^{r-1} + n \, . \, 10^{r-2} + \ldots + x \, . \, 10^2 + y \, . \, 10 + z \\ &= [a \, . \, 10^{n-r-1} + b \, . \, 10^{n-r-2} + c \, . \, 10^{n-r-3} + \ldots + k, 10 + 1] \, . \, 10^r \\ &\quad + [m \, . \, 10^{r-1} + n \, . \, 10^{r-2} + \ldots + x \, . \, 10^2 + y \, . \, 10 + z] \\ &= A \, . \, 10^r + B, \end{aligned}$$

wenn man die in den Klammern stehenden mehrzifferigen Zahlen beziehungsweise mit A und B bezeichnet, wo also die r zifferige Zahl $B < 10^r$ ist. — Sei nun α irgend eine einzifferige Zahl, so ist

$$\frac{Z}{10^r - \alpha} = \frac{A \cdot 10^r + B}{10^r - \alpha} = A + \frac{B + \alpha A}{10^r - \alpha} = A + \frac{B}{10^r - \alpha} + \frac{\alpha A}{10^r - a} \ldots (1).$$

Ist nun $\alpha A > 10^r$, so wird eben so, wie vorhin

$$\frac{\alpha A}{10^r - \alpha} = \frac{A_1 10^r + B_1}{10^r - \alpha} = A_1 + \frac{B_1 + \alpha A_1}{10^r - \alpha} = A_1 + \frac{B_1}{10^r - \alpha} + \frac{\alpha A_1}{10^r - \alpha} \ldots (2).$$

$$\frac{\alpha A_1}{10^r - \alpha} = \frac{A_2 10^r + B_2}{10^r - \alpha} = A_2 + \frac{B_2 + \alpha A_2}{10^r - \alpha} = A_2 + \frac{B_2}{10^r - \alpha} + \frac{\alpha A_2}{10^r - \alpha} \ldots (3).$$

$$\frac{\alpha A_2}{10^r - \alpha} = \frac{A_3 10^r + B_3}{10^r - \alpha} = A_3 + \frac{B_3 + \alpha A_3}{10^r - \alpha} = A_3 + \frac{B_3}{10^r - \alpha} + \frac{\alpha A_3}{10^r - \alpha} \ldots (4).$$

. . . . allgemein

$$\frac{\alpha A_{p-1}}{10^r - \alpha} = \frac{A_p 10^r + B_p}{10^r - \alpha} = A_p + \frac{B_p + \alpha A_p}{10^r - \alpha} = A_p + \frac{B_p}{10^r - \alpha} + \frac{\alpha A_p}{10^r - \alpha},$$

wo $\alpha A_p < 10^r$ sein soll.

Man erhält demnach durch Substitution dieser Werthe

$$\frac{Z}{10^r - \alpha} = A + \frac{B}{10^r - \alpha} + A_1 + \frac{B_1}{10^r - \alpha} + A_2 + \frac{B_2}{10^r - \alpha} + A_3$$
$$+ \frac{B_3}{10^r - \alpha} + \ldots + A_p + \frac{B_p}{10^r - \alpha} + \frac{\alpha A_p}{10^r - \alpha}$$
$$= + A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p$$
$$+ \frac{B + B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_p + \alpha A_p}{10^r - \alpha}.$$

Ist nun

$$B + B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_p + \alpha A_p > 10^r,$$

so setze man

$$B + B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_p + \alpha A_p = S = A_{p+1} \cdot 10^r + B_{p+1}$$

also

$$\frac{B + B_1 + B_2 + \ldots + B_p + \alpha A_p}{10^r - \alpha} = \frac{A_{p+1} \cdot 10^r + B_{p+1}}{10^r - \alpha}$$
$$= A_{p+1} + \frac{B_{p+1} + \alpha A_{p+1}}{10^r - \alpha}$$

und dann erhält man

$$\frac{Z}{10^r - \alpha} = A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p + A_{p+1} + \frac{B_{p+1} + \alpha A_{p+1}}{10^r - \alpha}.$$

Gibt man hier der Rechnung dieselbe Form, wie §. 42, Nr. 3, so hat man

Quotienten.	Reste.
A	B
A_1	B_1
A_2	B_2
A_3	B_3
.	.
.	.
.	.
A_p	B_p
	αA_p
A_{p+1}	B_{p+1}
	αA_{p+1}
Quotus $= A + A_1 + A_2 + \ldots + A_p + A_{p+1}$	$B_{p+1} + \alpha A_{p+1} =$ Rest;

nämlich es ist

$$\frac{Z}{10^r - \alpha} = (A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p + A_{p+1}) + \frac{B_{p+1} + \alpha A_{p+1}}{10^r - \alpha} = Q + \frac{R}{10^r - \alpha},$$

woraus die Gültigkeit der §. 42, Nr. 3 aufgestellten Regel von selbst erhellt.

Anmerkung 4. Es ist

$$\frac{1}{1 - ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots + a^r x^r + \ldots \text{ ohne Ende} = Q_1$$

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{Q_1}{1-bx} = 1 + (a+b)x + (a^2 + ab + b^2)x^2 + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x^3 + (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)x^4 + \ldots \ldots = Q_2$$

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \frac{Q_2}{1-cx} = 1 + (a+b+c)x + (a^2 + ab + b^2 + ac + bc + c^2)x^2 + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c + abc + b^2c + c^3)x^3 + \ldots +$$

. . . . . und allgemein

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots(1-lx)} = 1 + \left\{\begin{matrix} a+b \\ c+d \\ +\ldots \\ k+l \end{matrix}\right\} x + \left\{\begin{matrix} a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2+l^2 \\ ab + ac + \ldots + al \\ bc + bd + \ldots + bl \\ \ldots\ldots\ldots \\ +kl \end{matrix}\right\} x^2 +$$

$$+\left\{\begin{array}{l} a^3 + b^3 + c^3 + \ldots + k^3 + l^3 \\ \quad a^2 b + a^2 c + \ldots + a^2 l \\ \quad b^2 c + b^2 d + \ldots + b^2 l \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad abc + abd + \ldots + abl \\ \quad acd + ace + \ldots + acl \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + ikl \end{array}\right\} x^3 + \ldots$$

wo das Gesetz des Fortganges für sich einleuchtet.

§. 59.

Rücksichtlich der Division gelten folgende allgemeine Grundsätze:

1. Wenn $a = b$ und $m = n$, so ist auch $a : m = b : n$, oder $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, d. h. Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt wieder Gleiches. Hat man demnach die Gleichung $A - B = C + D - E$, so ist auch

$$\frac{A-B}{n} = \frac{C+D-E}{n} \text{ oder } \frac{A}{n} - \frac{B}{n} = \frac{C}{n} + \frac{D}{n} - \frac{E}{n},$$

d. h. eine Gleichung bleibt beständig, oder die Gleichheit zweier Ausdrücke wird nicht gestört, wenn man alle Glieder der Gleichung (der beiden gleichen Ausdrücke) durch dieselbe Zahl dividirt.

2. Wenn $a > b$, so ist auch $a : c > b : c$, oder $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. Denn man setze $a : c = m$ und $b : c = n$, so ist $a = cm$ und $b = cn$. Wäre nun $m = n$, so müßte auch $cm = cn$, d. i. $a = b$ sein (§. 52, 1.) was der Voraussetzung $a > b$ widerspricht. Behauptete aber jemand, es sei $m < n$, so müßte auch $cm < cn$, d. i. $a < b$ sein (§. 52, II.), welches wieder unserer Voraussetzung zuwider ist. Da nun weder $m = n$ noch $m < n$ sein kann, so muß nothwendig $m > n$, d. i. $a : c > b : c$ sein. Bleibt also der Divisor derselbe, so ist der Quotient desto größer, je größer der Dividend ist.

3. Ist $a > b$, so ist $d : a < d : b$. Denn man setze $d : a = m$ und $d : b = n$, so ist $d = am$ und $d = bn$, demnach auch $am = bn$. Da nun $a > b$, so ist $an > bn$ oder $an > am$, also auch $n > m$ (nach 2), d. i. $d : b > d : a$.

Bei ungeändertem Dividende wird also der Quotient desto größer, je kleiner der Divisor ist, und wächst der Divisor ohne Ende, so nimmt der Quotient ohne Ende ab.

Diese Grundsätze sind zum Theile schon §. 33, aus dem Begriffe der Division, abgeleitet worden.

4. Da $n \cdot AC = nC \cdot A$ ist, so findet man, wenn $A = \frac{B}{C}$, also $AC = B$ gesetzt wird, $n \cdot B = nC \cdot \frac{B}{C}$, d. h. ein Produkt bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man den einen Faktor n mit irgend einer Zahl C multiplicirt, und den andern Faktor B durch eben diese Zahl dividirt.

5. Aus der letzten Gleichung folgt ferner:

$$nB : nC = \left(nC \cdot \frac{B}{C}\right) : nC = \frac{nC}{nC} \cdot \frac{B}{C} \text{ (§. 55, Nro. 5)} = 1 \cdot \frac{B}{C} = \frac{B}{C}$$

oder

$$\frac{B}{C} = nB : nC = \frac{nB}{nC},$$

d. h. der Quotient $\frac{B}{C}$ wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multiplicirt.

6. Setzt man in der letzten Gleichung $B = D : n$ und $C = E : n$, also $Bn = D$ und $Cn = E$, so findet man die Gleichung

$$\frac{D : n}{E : n} = \frac{D}{E} \text{ oder } \frac{D}{E} = \frac{D : n}{E : n},$$

d. h. der Quotient $\frac{D}{E}$ wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man den Dividend D und den Divisor E durch dieselbe Zahl n dividirt.

7. Da nach dem vorhergehenden Satze

$$A : mn = (A : m) : (mn : m) = (A : m) : n \text{ und}$$
$$A : mn = (A : n) : (mn : n) = (A : n) : m, \text{ so ist}$$
$$A : mn = (A : m) : n = (A : n) : m,$$

d. h. eine Größe A wird durch das Produkt mn zweier Faktoren dividirt, wenn man A durch den einen Faktor m und den gefundenen Quotienten durch den andern Faktor n dividirt, oder wenn man zuerst durch n und dann durch m dividirt. Umgekehrt ist auch

$$(A : m) : n = \frac{A}{m} : n = \frac{A}{mn},$$

d. h. ein Quotient $\frac{A}{m}$ wird durch irgend eine Zahl n dividirt, wenn man den Dividend A durch das Produkt aus jener Zahl in den Theiler dividirt.

Drittes Kapitel.

Von der Division als Messung, und den Eigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen.

§. 60.

Erklärung.

1. Wenn A durch B ohne Rest getheilt werden kann, so ist die Division ein Messen, und man sagt: A ist durch B theilbar — meßbar —, oder B ist ein Maß, oder ein genauer Theil von A (§. 34).

2. Eine Größe A ist durch eine andere B meßbar, wenn erstere ein Vielfaches der letztern ist; z. B. das m fache. Wenn $A = m \cdot B$, so ist

$$\frac{A}{m} = \frac{m\,B}{m} = B \text{ und } \frac{A}{B} = \frac{m\,B}{B} = m.$$

B und m sind die Faktoren von A.

Ist also der Quotient aus B in A eine ganze Zahl, so ist B ein Maß von A. — Hieraus folgt, daß jede Größe ein Maß von sich selbst sei, und zwar das größte Maß, weil der Quotient = 1, und die Einheit die kleinste von Null verschiedene ganze Zahl ist.

3. Können mehrere Größen A, B, C durch eine und dieselbe Größe M zugleich gemessen werden, so ist M ein gemeinschaftliches Maß von A, B und C. So z. B. ist 4 ein gemeinschaftliches Maß von 8, 12 und 20, weil jede dieser Zahlen durch 4 getheilt eine ganze Zahl zum Quotienten gibt.

4. Sind a, b und c die gemeinschaftlichen Maße von A und B, und ist $a > b > c$, so heißt a das größte gemeinschaftliche Maß von A und B. So sind z. B. die Zahlen 2, 3 und 6 die gemeinschaftlichen Maße von 12 und 18, aber 6 ist das größte gemeinschaftliche Maß derselben.

5. Ist eine Größe A durch mehrere Größen a, b, c . . theilbar, so ist A ein gemeinschaftlicher Dividend, oder ein gemeinschaftliches Vielfache von a, b, c . . . . Sind diese Größen a, b, c . . . auch zugleich Maße von B und C, und ist $A > B > C$,

so ist C das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** von a, b, c, ... wenn C die kleinste unter allen durch a, b, c, . . . theilbaren Zahlen ist. So können z. B. die Zahlen 48, 72, 24, durch 4, 6 und 8 gemessen werden, und 24 ist zugleich die kleinste Zahl, welche durch 4, 6 und 8 theilbar ist; also ist 24 der kleinste gemeinschaftliche Dividend, oder das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 4, 6 und 8, aber 48, 72, 96, . . . sind nur gemeinschaftliche Dividende dieser Zahlen.

Ein größtes gemeinschaftliches Vielfache von zwei oder mehreren Zahlen gibt es nicht. Wollte jemand z. B. behaupten, A^{∞} sei das größte gemeinschaftliche Vielfache von M und N, so hat er die Grenze noch nicht erreicht. Denn $A^{2\infty}$, $A^{3\infty}$, A^{∞^2}, A^{∞^3}, . . . $A^{\infty^{\infty}}$ sind wieder Vielfache von A^{∞}, und so geht es über alle Vorstellung weiter.

6. Ganze Zahlen sind rücksichtlich ihrer Theilbarkeit entweder **Primzahlen — Stammzahlen — einfache Zahlen**, oder **zusammengesetzte Zahlen, Produkte.**

α) **Primzahlen** sind diejenigen Zahlen, welche durch keine andere Zahl, als durch sich selbst und durch die Einheit gemessen werden können; z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

β) **Zusammengesetzte Zahlen** — Produkte — sind jene Zahlen, welche auch noch andere Faktoren haben, als sich selbst oder die Einheit. Z. B. $6 = 1 . 2 . 3$, $8 = 1 . 2 . 2 . 2 = 1 . 2 . 4$.

Die vorhin angeführten Primzahlen heißen **absolute** Prim- oder Stammzahlen.

Werden zwei oder mehrere Zahlen auf einander bezogen, und haben diese außer der Einheit keinen gemeinschaftlichen Theiler, so heißen sie **relative Primzahlen**, oder Primzahlen in Bezug auf einander. So sind z. B. 4 und 5 oder 6 und 35 relative Primzahlen, obgleich die eine, oder beide für sich betrachtet, zusammengesetzte Zahlen sind. Um anzudeuten, daß a und b relative Primzahlen seien, werden wir kurz schreiben: $a \frown b$.

7. Jede zusammengesetzte Zahl ist ein **Vielfaches** ihrer Faktoren. Ist z. B. $A = m . a$, so ist A das m fache von a, oder das a fache von m.

Ist $A = ma$ und $B = mb$, so sind A und B die **Gleichvielfachen** von a und b, und zwar hier die m fachen. Ist z. B.

$$A = 15 = 5 . 3 \text{ und } B = 21 = 7 . 3,$$

so sind die Zahlen 15 und 21 die Gleichvielfachen, nämlich die dreifachen von 5 und 7. Man nennt die Zahlen A und B, welche einen gemeinschaftlichen Faktor $m > 1$ besitzen, auch **kommensurable** oder **verwandte** Zahlen, und wir werden künftig dieß kurz durch $A \sim B$

andeuten. — Größen, welche kein gemeinschaftliches Maß haben, von denen sonach die größere weder ein Vielfaches von der kleinern selbst, noch ein Vielfaches von einem aliquoten Theile derselben ist, heißen inkommensurabel.

Jene Faktoren einer zusammengesetzten Zahl, welche Primzahlen sind, heißen einfache Faktoren, die übrigen aber zusammengesetzte.

8. Zahlen, welche durch zwei theilbar sind, oder welche den Faktor 2 enthalten, heißen gerade, die übrigen aber ungerade.

Die allgemeine Formel für die geraden Zahlen ist $2n$, in welcher man für n nur die natürlichen Zahlen zu substituiren hat, um alle geraden Zahlen zu erhalten. Die allgemeine Form der ungeraden Zahlen ist aber $2n - 1$ oder $2n + 1$ oder $2n \pm 1$. Alle Primzahlen 2 ausgenommen, sind ungerade Zahlen.

Gibt eine gerade Zahl g durch 2 dividirt einen geraden Quotienten, z. B. $g : 2 = 2m$, so heißt $g = 4m$ eine gerad gerade Zahl, im entgegengesetzten Falle aber eine ungerad gerade Zahl, deren allgemeinste Form also

$$g' = 4m \pm 2 = 2(2m \pm 1) \text{ ist.}$$

Eben so theilt man auch die ungeraden Zahlen in zwei Klassen, indem dieselben durch 4 dividirt, entweder $+ 1$ oder $+ 3$ zum Reste geben.

Es ist nämlich entweder

$$U : 4 = p + \tfrac{1}{4} \text{ oder}$$
$$U' : 4 = q + \tfrac{3}{4},$$

mithin ist $U = 4p + 1$ die allgemeine Form der ungeraden Zahlen der ersten Klasse, und $U' = 4q + 3$ oder auch

$$U' = 4q + 4 - 1 = 4(q + 1) - 1 = 4m - 1,$$

nämlich $U' = 4m - 1$ die allgemeine Form der ungeraden Zahlen der zweiten Klasse.

§. 61.

Die vorzüglichsten Eigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen sind folgende:

1. Die Summe und die Differenz zweier geraden Zahlen ist auch eine gerade Zahl, denn es sei $A = 2m$, $B = 2n$, so ist

$$A \pm B = 2m \pm 2n = 2(m \pm n),$$

mithin gerade.

Allgemein ist die Summe oder der Unterschied mehrerer geraden Zahlen ebenfalls eine gerade Zahl.

2. Sowohl die Summe als die Differenz zweier ungeraden Zahlen ist gerade. Es sei

$$A = 2m + 1 \text{ und } B = 2n + 1, \text{ so ist}$$

$$A + B = 2m + 1 + 2n + 1 = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1),$$

also gerade, und

$$A - B = 2m + 1 - 2n - 1 = 2m - 2n = 2(m - n)$$

mithin ebenfalls gerade.

3. Auf ähnliche Art beweist man, daß sowohl die Summe als der Unterschied einer geraden und ungeraden Zahl ungerade sei.

4. Ist $A = 2m$ und $B = 2n$, so ist $AB = 2m \cdot 2n = 4mn$, d. h. das Produkt zweier geraden Zahlen ist auch gerade.

5. Das Produkt zweier ungeraden Zahlen aber ist ungerade; denn, wenn

$$A = 2m - 1 \text{ und } B = 2n - 1, \text{ ist}$$

$$A . B = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1 = 2(2mn - m - n) + 1.$$

6. Eine ungerade Zahl durch eine gerade multiplitirt, gibt ein gerades Produkt. Ist nämlich

$$A = 2m - 1 \text{ und } B = 2n, \text{ so ist}$$

$$AB = (2m - 1)\, 2n, \text{ also gerade.}$$

7. Dividirt man eine gerade Zahl durch eine andere gerade Zahl, und die Division geht genau auf, so kann der Quotient Q gerade oder ungerade sein. Der Beweis erhellt aus dem Begriffe der Division und aus Nr. 4 und 6.

Bleibt aber ein Rest R, so muß dieser nothwendig eine gerade Zahl sein, sei der Quotient Q gerade oder ungerade (1).

8. Der Quotient aus einer ungeraden Zahl in eine ungerade, kann nur ungerade sein, wenn die Division ein Messen ist (5). Verbleibt aber ein Rest R, so ist dieser gerade, wenn der Quotient ungerade ist, und umgekehrt: der Rest R ist ungerade, wenn der Quotus gerade ist. Der Beweis dafür fließt aus den vorhergehenden Sätzen.

9. Ist der Dividend gerade, der Divisor aber ungerade, und geht die Division auf, so kann der Quotient nur eine gerade Zahl sein (6). Bleibt ein Rest R, so ist dieser gerade oder ungerade, je nachdem der Quotient gerade oder ungerade ist (1, 2).

10. Dividirt man endlich eine ungerade Zahl durch eine gerade, so kann die Division nie ein Messen sein, weil eine gerade Zahl durch eine andere gerade oder ungerade Zahl multiplicirt, immer ein gerades

Produkt gibt (4, 6), der Dividend aber ungerade ist. In diesem Falle kann der Rest nur ungerade sein.

§. 62.

Die Gleichvielfachen geben denselben Quotienten, den ihre Einfachen geben, und umgekehrt.

Es sei $\frac{a}{b} = q$. Setzt man $A = ma$ und $B = mb$, so ist

$$\frac{A}{B} = \frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} = q.$$

Hat demnach A außer der Einheit keinen Faktor m mit B gemeinschaftlich, so läßt sich der Quotient $\frac{A}{B}$ nicht weiter mehr abkürzen.

§. 63.

Jede zusammengesetzte Zahl N ist ein Produkt aus lauter Primzahlen.

Man setze, es sei $N = A \,.\, B \,.\, C$. Sind die Faktoren A, B, C Primzahlen, so ist der Satz für sich klar: sind aber jene Faktoren zusammengesetzt, so kann jeder derselben wieder in Faktoren zerlegt werden. Es sei also

$$A = a \,.\, a' \,.\, a'' \ldots;\; B = b \,.\, b' \,.\, b'' \ldots;\; C = c \,.\, c' \,.\, c'' \ldots;$$

so ist durch Substitution

$$N = a \,.\, a' \,.\, a'' \ldots \times b \,.\, b' \,.\, b'' \ldots \times c \,.\, c' \,.\, c'' \ldots$$

Ist nun einer oder der andere dieser Faktoren wieder zusammengesetzt, so läßt er sich auch in einfachere Faktoren auflösen, und man wird durch diese fortgesetzte Auflösung endlich auf lauter absolute Primzahlen kommen. Wäre dieses der Fall nicht, so müßte N aus unendlich vielen Faktoren, die alle größer als die Einheit sind, zusammengesetzt, und also selbst unendlich groß sein, was unserer Voraussetzung zuwider ist. Z. B.:

$$36 = 4 \times 9 = 2 \,.\, 2 \times 3 \,.\, 3;$$
$$216 = 4 \,.\, 54 = 4 \,.\, 6 \,.\, 9 = 2 \,.\, 2 \times 2 \,.\, 3 \times 3 \,.\, 3 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 2^3 \,.\, 3^3,$$
$$120 = 12 \,.\, 10 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \times 2 \,.\, 5 = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5.$$

§. 64.

1. Wenn A durch B und B durch C gemessen wird, so muß auch A durch C theilbar sein.

Denn es sei $A = mB$ und $B = nC$, so ist $A = mB = mnC$, folglich $A : C = mn =$ einer ganzen Zahl, weil m und n ganze Zahlen sind.

Ist also A durch irgend eine zusammengesetzte Zahl $P = abcd\ldots$ theilbar, so ist A auch theilbar durch alle Faktoren von P, oder A muß alle Faktoren von P enthalten.

2. Wenn A ein gemeinschaftliches Maß der Größen B, C, D... ist, und es ist A theilbar durch M, so muß M auch ein gemeinschaftliches Maß von B, C, D... sein. Dieser Satz erhellt aus dem vorigen von selbst.

3. Wenn V ein Vielfaches von A, und A ein gemeinschaftlicher Dividend mehrerer Größen B, C, D... ist, so muß auch V ein gemeinschaftliches Vielfaches eben dieser Größen sein. Denn es sei

$$V = nA \text{ und } A = pB = qC = r \,.\, D = \ldots,$$

wo n, p, q, r ganze Zahlen bezeichnen sollen, so ist

$$V = nA = npB = nqC = nrD = \ldots \text{ oder}$$
$$V : B = np;\; V : C = nq;\; V : D = nr; \text{ ꝛc.}$$

Die Quotienten np, nq und nr enthalten den gemeinschaftlichen Faktor n; ist dieser also > 1, so sind jene Quotienten nicht relative Primzahlen.

4. Wenn A durch B und durch C theilbar ist, und es ist der Quotient $\frac{A}{B} = m$ ein Vielfaches vom Quotienten $\frac{A}{C} = n$, so ist auch C ein Vielfaches von B. Denn es sei $m = np$, so ist, weil

$$A = mB = nC \text{ ist, auch}$$
$$C = mB : n = np \,.\, B : n = pB, \text{ nämlich } C = pB.$$

§. 65.

1. Wenn die Quotienten $\frac{A}{B} = m$, $\frac{A}{C} = n$, $\frac{A}{D} = p$, ꝛc. zwar ganze Zahlen bezeichnen, die aber nicht Primzahlen unter einander sind, so gibt es noch ein anderes gemeinschaftliches Vielfaches M derselben Größe B, C, D..., welches das erstere A mißt, und demnach kleiner als A ist.

Denn da die Quotienten m, n, p... nicht relative Primzahlen sein sollen, so müssen sie irgend ein gemeinschaftliches Maß $\mu > 1$ haben; man setze also $A = \mu \,.\, M$, daher $\frac{A}{M} = \mu =$ einer ganzen Zahl,

folglich $A > M$, ferner $m = \mu r$, $n = \mu s$, $p = \mu t$, so wird, weil

$$A = mB = nC = pD = \ldots$$

ist, durch Substitution dieser Werthe

$$\mu M = \mu r B = \mu s C = \mu t D = \ldots,$$

oder, wenn man durch μ dividirt,

$$M = rB = sC = tD = \ldots < A.$$

2. Ist $\mu = 1$, oder sind $m, n, p \ldots$ relative Primzahlen, so gibt es kein gemeinschaftliches Vielfaches von $B, C, D, \ldots$, welches kleiner als A wäre; folglich ist dann A selbst das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $B, C, D, \ldots$, und umgekehrt: wenn A das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $B, C, D, \ldots$ ist, so müssen die Quotienten $\frac{A}{B} = m$, $\frac{A}{C} = n$, $\frac{A}{D} = p, \ldots$ relative Primzahlen sein.

3. Wenn $\frac{A}{M} = \alpha$ und $\frac{B}{M} = \beta$ ganze Zahlen sind, und α ein Vielfaches von β ist, so ist auch A ein Vielfaches von B.

Denn es sei $\alpha = n\beta$, so ist, weil $A = \alpha M$ und $B = \beta M$ ist, auch $A = \alpha M = n\beta M = n \,.\, \beta M = n \,.\, B$, folglich A das $n$fache von B.

§. 66.

1. Ist m ein gemeinschaftliches Maß der Größen $A, B, C, \ldots$ und sind die Quotienten $\frac{A}{m} = \alpha$, $\frac{B}{m} = \beta$, $\frac{C}{m} = \gamma$, 2c. nicht relative Primzahlen, so gibt es noch ein anderes gemeinschaftliches Maß M der Größen $A, B, C, \ldots$, welches ein Vielfaches von m, und demnach größer als m ist.

Denn der Voraussetzung gemäß ist $A = m\alpha$, $B = m\beta$, $C = m\gamma$, und die Größen α, β, γ sind nicht relative Primzahlen, also müssen sie einen gemeinschaftlichen Faktor $\eta > 1$ besitzen. Es sei demnach $\alpha = \eta a$, $\beta = \eta b$, $\gamma = \eta c$, so wird $A = m\eta \,.\, a$, $B = m\eta \,.\, b$ $C = m\eta \,.\, c$, oder wenn $m\eta = M$ gesetzt wird, wo also $M > m$ sein muß, $\frac{A}{M} = a$, $\frac{B}{M} = b$, $\frac{C}{M} = c$; folglich ist auch M, welches $> m$ ist, ein gemeinschaftliches Maß von $A, B, C, \ldots$

2. Sind aber die Quotienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ relative Primzahlen, so gibt es kein größeres gemeinschaftliches Maß von $A, B, C, \ldots$ als m, oder m ist das größte gemeinschaftliche Maß von $A, B, C, \ldots$

und umgekehrt: wenn m das größte gemeinschaftliche Maß von A, B, C, . . . ist, so müssen die Quotienten $\frac{A}{m} = \alpha$, $\frac{B}{m} = \beta$, $\frac{C}{m} = \gamma, \ldots$ relative Primzahlen sein.

§. 67.

a) Wenn die Zahl m sowohl A als B mißt, so mißt sie auch
1) die Summe,
2) die Differenz dieser Zahlen.

Es sei $\frac{A}{m} = a$ und $\frac{B}{m} = b$, so ist $A = m\,a$, $B = m\,b$, und $A \pm B = m\,a \pm m\,b = m\,(a \pm b)$; folglich

$$\frac{A \pm B}{m} = \frac{m\,(a \pm b)}{m} = a \pm b = \text{einer ganzen Zahl.}$$

b) Mißt m die Zahl A, so mißt sie auch ihr Vielfaches A B.

Es sei $A = m\,a$ so ist $A\,B = m\,a\,B$, also $\frac{A\,B}{m} = \frac{m\,a\,B}{m} = a\,B$.

c) Ist $\frac{D}{d} = q + \frac{R}{d}$, so ist $D = d\,q + R$. Wenn nun d und R durch m theilbar sind, so ist auch $d\,q + R$ theilbar durch m, d. h. sind Divisor und Rest durch einerlei Zahl theilbar, so muß auch der Dividend durch dieselbe Zahl theilbar sein.

Aus der obigen Gleichung folgt ferner $R = D - d\,q$; sind also der Dividend D und der Theiler d durch einerlei Zahl m theilbar, so muß m auch ein Maß von $D - d\,q$, d. i. von R sein.

§. 68.

1. Sei $A = m\,a + \alpha$ und $B = m\,b + \beta$, wo α und β die Reste in Bezug auf den Theiler m bezeichnen, und daher $< m$ angenommen werden, so wird

$$A \pm B = m\,a + \alpha \pm m\,b \pm \beta = m\,(a \pm b) + (\alpha \pm \beta),$$

$$\text{mithin } \frac{A \pm B}{m} = a \pm b + \frac{\alpha \pm \beta}{m},$$

d. h. die Summe oder der Unterschied zweier Zahlen A und B ist durch m theilbar, wenn die Summe oder der Unterschied der Reste α und β durch diese Zahl m theilbar ist.

Dieser Satz ist noch giltig, wenn beliebig viele Zahlen A, B, C, D, . . . addirt, oder von einander subtrahirt werden.

2. Aus den obigen Gleichungen $A = ma + \alpha$ und $B = mb + \beta$ folgt ferner:

$$AB = (ma + \alpha)(mb + \beta) = m^2ab + mb\alpha + ma\beta + \alpha\beta$$
$$= m(mab + b\alpha + a\beta) + \alpha\beta, \text{ also}$$
$$\frac{AB}{m} = mab + b\alpha + a\beta + \frac{\alpha\beta}{m};$$

ist also $\frac{\alpha\beta}{m}$ eine ganze Zahl, so ist es auch $\frac{AB}{m}$, d. h. das Produkt zweier durch m nicht theilbaren Zahlen A und B kann durch diese Zahl m nur dann gemessen werden, wenn das Produkt der Reste α und β durch eben diese Zahl m theilbar ist.

Dieser Satz bleibt noch giltig, wenn beliebig viele solche Zahlen A, B, C, D, . . . mit einander multiplicirt werden.

§. 69.

1. Jedes gemeinschaftliche Vielfache zweier oder mehrerer Größen wird von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen eben dieser Größen gemessen.

Denn es sei V das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Größen, und W irgend ein anderes Vielfaches derselben Größen, mithin $W > V$. Wäre nun $W : V$ keine ganze Zahl, so müßte irgend ein Rest $R < V$ bleiben; es sei also

$$W = mV + R, \text{ mithin } R = W - mV.$$

Da nun W und V, also auch mV, durch die gegebenen Größen theilbar sind, so müßte, nach §. 67, auch $W - mV$, d. i. R durch die gegebenen Größen theilbar sein; R aber ist $< V$, folglich wäre V nicht das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, was unserer Voraussetzung widerspricht; also kann kein Rest bleiben, oder W muß durch V theilbar sein.

2. Ist also W irgend ein gemeinschaftliches Vielfaches der Größen A, B, C, . . ., aber nicht das kleinste, so ist es doch theilbar durch diesen kleinsten gemeinschaftlichen Dividend V, und demnach können die Quotienten $\frac{W}{A}, \frac{W}{B}, \frac{W}{C}, \ldots$ nicht relative Primzahlen sein; $\frac{V}{A}, \frac{V}{B}, \frac{V}{C} \ldots$ aber sind Primzahlen unter sich, und umgekehrt: wenn $\frac{V}{A}, \frac{V}{B}, \frac{V}{C} \ldots$ relative Primzahlen sind, so ist V das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, . . . (vergl. §. 64).

§. 70.

1. Wenn es von zwei Zahlen A und B solche Vielfache gibt, welche nur um eine Einheit von einander verschieden sind, so sind A und B relative Primzahlen.

Denn man setze, es sei $mA - nB = 1$; wären nun A und B nicht relative Primzahlen, so müßten sie irgend einen gemeinschaftlichen Faktor $\mu > 1$ enthalten, und demnach wäre mA und nB, also auch $mA - nB$, oder 1 durch μ theilbar, was absurd ist.

2. Wenn a und b relative Primzahlen sind, und es ist $ma = nb$, wo auch m und n ganze Zahlen bezeichnen, so muß a ein Maß von n, und b ein Maß von m sein. Denn es sei $ma = nb = p$, so ist p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m und n, weil $\frac{p}{m} = a$ und $\frac{p}{n} = b$ relative Primzahlen sind (§. 69, 2). Es ist aber auch $mn = q$ ein gemeinschaftliches Vielfaches von m und n, folglich muß q durch p theilbar sein (§. 69, 1). Es sei also $q : p = r$, oder $q = pr$, so wird $q = mn = pr$, oder, wenn man für p den Werth ma oder nb setzt,

$$mn = ma \,.\, r. \text{ oder}$$
$$mn = nb \,.\, r, \text{ also}$$
$$r = \frac{mn}{ma} = \frac{n}{a} \text{ oder } r = \frac{mn}{nb} = \frac{m}{b},$$

d. h. es ist a ein Maß von n, und b ein Maß von m.

Hieraus fließen nun folgende Sätze:

α) Wenn a und b relative Primzahlen sind, und $\frac{bn}{a}$ eine ganze Zahl ist, so muß auch $\frac{n}{a}$ eine ganze Zahl sein. Denn es sei $\frac{bn}{a} = m$, so ist $bn = am$, folglich nach unserem Satze a ein Maß von n. — Es muß also $n > a$ sein; ist aber $n < a$ und $b < a$, und a eine Primzahl, so kann $\frac{bn}{a}$ keine ganze Zahl sein.

β) Wenn ein Produkt $bcde$ durch a theilbar ist, und es sind b, c und d in Bezug auf a Primzahlen, so muß a ein Maß von e sein. Denn wenn $\frac{bcde}{a}$ eine ganze Zahl sein soll, und es sind b und a relative Primzahlen, so muß, nach α) $\frac{cde}{a}$ auch eine ganze Zahl sein. Nun sind aber auch c und a relative Primzahlen, folglich muß $\frac{de}{a}$ eine

ganze Zahl sein, und da endlich d und a relative Primzahlen sind, so muß e durch a gemessen werden können.

γ) Sind demnach alle Faktoren eines Produktes P, mit Ausnahme eines einzigen e, in Bezug auf die Zahl a Primzahlen, und ist der ausgenommene Faktor e durch a nicht theilbar, so kann auch P durch a nicht theilbar sein; ist aber der einzige Faktor e durch a theilbar, so muß a auch ein Maß des Produktes P sein.

δ) Es sei $P = bcde$, und die Faktoren b, c, d, e seien in Bezug auf a Primzahlen, so sind auch P und a Primzahlen unter sich. Denn wären P und a nicht relative Primzahlen, so müßten sie irgend einen gemeinschaftlichen Faktor $m > 1$ haben. Es sei daher $P = mp$ und $a = mq$, so muß $q < a$ sein, weil $m > 1$ vorausgesetzt wird. Aus der Gleichung $a = mq$ folgt aber auch

$$ap = mq \,.\, p = mp \,.\, q = P \,.\, q,$$

also wäre die ganze Zahl

$$p = \frac{Pq}{a} = \frac{bcde \,.\, q}{a};$$

aber b, c, d und e sind in Bezug auf a Primzahlen, also müßte nach unserem Satze q durch a, d. i. die kleinere Zahl durch eine größere theilbar sein, was unmöglich ist; folglich können P und a keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, d. i. sie müssen relative Primzahlen sein.

ε) Es sei $P = abcd..$, und $\pi = \alpha\beta\gamma\delta...$, und nun alle Faktoren von P in Bezug auf jeden einzelnen Faktor von π Primzahlen, so sind auch die Produkte P und π relative Primzahlen. Dieser Satz erhellt aus dem vorigen von selbst.

ζ) Sind demnach a und b relative Primzahlen, so sind auch was immer für Potenzen derselben, z. B. a^m und b^n relative Primzahlen. Nun sind aber zwei verschiedene absolute Primzahlen auch relative Primzahlen, folglich auch die Potenzen derselben.

η) Ein Produkt P aus zwei oder mehreren Faktoren, die entweder absolute Primzahlen oder Potenzen absoluter Primzahlen sind, und eine andere von diesen verschiedene absolute Primzahl p oder eine Potenz von ihr; z. B. p^n sind demnach (Nro. δ) auch relative Primzahlen. Ist nun p was immer für eine absolute Primzahl, die > 1 ist, so kann weder p^n noch p ein Maß von P sein.

ϑ) Sind die einfachen Faktoren a, b, c, d, . . . des Produktes $P = a^m\, b^n\, c^p\, d^q \,...$ absolute Primzahlen, so kann P durch a^r nicht gemessen werden, wenn $r > m$ und $a > 1$ ist. Denn es sei $r = m + v$, so wird

$$\frac{P}{a^r} = \frac{a^m\, b^n\, c^p\, d^q \ldots}{a^r} = \frac{a^m\, b^n\, c^p\, d^q \ldots}{a^{m+v}} = \frac{a^m\, b^n\, c^p\, d^q \ldots}{a^m \,.\, a^v} = \frac{b^n\, c^p\, d^q \ldots}{a^v};$$

aber b, c, d, ... sind in Bezug auf a Primzahlen; folglich kann auch $\frac{b^n\, c^p\, d^q \ldots}{a^v}$ keine ganze Zahl sein (Nro. η).

ι) Ist $\frac{p}{a} = m$ und $\frac{p}{b} = n$, und sind a und b relative Primzahlen, so ist p auch durch das Produkt a b theilbar.

Denn es ist $p = a\,m = b\,n$, also a ein Maß von n (Satz 2), oder $\frac{n}{a} = r =$ einer ganzen Zahl, daher $n = a\,r$, und wenn man diesen Werth in der Gleichung $p = b\,n$ substituirt, so wird

$$p = b \quad a\,r = a\,b \,.\, r, \text{ folglich } \frac{p}{a\,b} = r.$$

§. 71.

Besondere Regeln über die Theilbarkeit bestimmter ganzer Zahlen.

I. Bezeichnet man die Ziffern einer Zahl N von der Rechten gegen die Linke der Ordnung nach durch a_0, a_1, a_2, a_3, ..., so hat diese Zahl, nach §. 54, 5, die Form

$$N = 1 \,.\, a_0 + 10 \,.\, a_1 + 10^2 \,.\, a_2 + 10^3 \,.\, a_3 + \ldots + 10^n \,.\, a^n$$

und demnach ist auch (§. 59, 1, und §. 55, 4 und 5)

$$\frac{N}{a} = \frac{1}{a} \,.\, a_0 + \frac{10}{a} \,.\, a_1 + \frac{10^2}{a} \,.\, a_2 + \frac{10^3}{a} \,.\, a_3 + \ldots + \frac{10^n}{a} \,.\, a_n \ldots (\alpha).$$

Nun sei

$$\frac{1}{a} = 0 + \frac{1}{a}$$

$$\frac{10}{a} = q_1 + \frac{r_1}{a}$$

$$\frac{10^2}{a} = q_2 + \frac{r}{a}$$

$$\frac{10^3}{a} = q_3 + \frac{r_3}{a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{10^n}{a} = q_n + \frac{r_n}{a}$$

wo allgemein $q_m = 0$ ist, wenn $a > 10^m$ sein sollte. Substituirt man diese Werthe in der Gleichung α, so findet man:

$$\frac{N}{a} = \frac{1}{a} \,.\, a_0 + \left(q_1 + \frac{r_1}{a}\right) . \, a_1 + \left(q_2 + \frac{r_2}{a}\right) . \, a_2 + \left(q_3 + \frac{r_3}{a}\right) a_3 + \ldots$$
$$+ \left(q_n + \frac{r_n}{a}\right) a_n \text{ oder (§. 55, 5),}$$

$$\frac{N}{a} = \frac{1 \cdot a_0}{a} + a_1 q_1 + \frac{a_1 r_1}{a} + a_2 q_2 + \frac{a_2 r_2}{a} + a_3 q_3 + \frac{a_3 r_3}{a} + \ldots + a_n q_n + \frac{a_n r_n}{a}, \text{ oder}$$

$$\frac{N}{a} = a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 + \ldots + a_n q_n + \frac{a_0 \cdot 1 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n}{a}.$$

Es wird demnach N durch die Zahl a theilbar sein, wenn $\frac{a_0 \cdot 1 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + \ldots + a_n r_n}{a}$ eine ganze Zahl ist, und daher hat man die allgemeine Regel:

Man dividire die auf einander folgenden Potenzen $1 = 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots 10^n$ durch die Zahl a, und schreibe die Reste der Ordnung nach unter die auf einander folgenden Ziffern der gegebenen Zahl N; dann multiplicire man die über einander stehenden Zahlen und dividire die Summe aller so gefundenen Produkte durch die Zahl a. Ist diese Division ein Messen, so ist a ein Maß von N, im entgegengesetzten Falle aber nicht.

So z B. findet man für den Divisor 7 der Ordnung nach die Reste 1, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 6$, $r_4 = 4$, $r_5 = 5$, $r_6 = 1$, ꝛc. Will man demnach untersuchen, ob 64806 durch 7 theilbar sei oder nicht, so findet man nach unserer Regel:

N = 64806 Zahl,
46231 Reste,

$1 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 6 + 16 + 24 + 24 = 70 =$ der Summe der Produkte,

und da diese Summe durch 7 theilbar ist, so muß auch 64806 durch 7 theilbar sein, wie es auch wirklich der Fall ist.

Besondere Regeln.

II. Wir setzen Kürze halber $\frac{N}{a} = A + \frac{S}{a}$, indem die Summe

$$1 \cdot a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots = S$$

genommen wird.

1. Für $a = 2$ wird $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$, ꝛc., also

$$\frac{S}{2} = \frac{a_0}{2} \text{ und } \frac{N}{2} = A + \frac{a_0}{2},$$

d. h Eine Zahl N ist theilbar durch 2, wenn die Ziffer der Einser durch 2 theilbar ist.

2. Für $a = 3$ wird $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = r_4 = \ldots = r_n = 1$; also ist

$$\frac{S}{3} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{3} \text{ und } \frac{N}{3} = A + \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n}{3},$$

d. h. Eine Zahl N ist theilbar durch 3, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3 theilbar ist.

3. Für $a = 4$ wird $r_1 = 2$, $r_2 = 0 = r_3 = r_4 = \ldots = r_n$; also ist

$$\frac{S}{4} = \frac{a_0 + 2a_1}{4} \text{ und } \frac{N}{4} = A + \frac{a_0 + 2a_1}{4},$$

d. i. Eine Zahl ist theilbar durch 4, wenn das Doppelte der Ziffer der Zehner und die Ziffer der Einser zusammengenommen theilbar sind durch 4.

Ist aber $\frac{a_0 + 2a_1}{4}$ eine ganze Zahl, so ist auch (§. 67, a) $\frac{a_0 + 2a_1 + 8a_1}{4}$ oder $\frac{a_0 + 10a_1}{4}$ eine ganze Zahl, folglich ist eine Zahl N auch theilbar durch 4, wenn ihre beiden niedrigsten Stellen, für sich als Zahl betrachtet, theilbar sind durch 4.

4. Für $a = 5$ wird $r_1 = 0 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n$; also ist

$$\frac{S}{5} = \frac{a_0}{5} \text{ und } \frac{N}{5} = A + \frac{a_0}{5}.$$

d. i. Eine Zahl N ist theilbar durch 5, wenn die Ziffer der Einser durch 5 theilbar ist.

5. Für $a = 9$ wird $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \ldots = r_n = 1$, mithin ist hier

$$\frac{S}{9} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{9} \text{ und } \frac{N}{9} = A + \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{9}$$

d. i. Eine Zahl N ist theilbar durch 9, wenn ihre Ziffersumme durch 9 theilbar ist.

6. Für $a = 11$ wird $r_1 = 10 = r_3 = r_5 = \ldots$ und $r_2 = 1 = r_4 = r_6 = \ldots$; also ist

$$\frac{S}{11} = \frac{a_0 + 10a_1 + a_2 + 10a_3 + a_4 + 10a_5 \ldots}{11} \text{ und}$$

$$\frac{N}{11} = A + \frac{(a_0 + 10a_1) + (a_2 + 10a_3) + (a_4 + 10a_5) + \ldots}{11}$$

Eine Zahl N ist also durch 11 theilbar, wenn die Summe der zweizifferigen Zahlen $a_0 + 10a_1$, $a_2 + 10a_3$, $a_4 + 10a_5$, ... durch 11 theilbar ist. — Diese zweizifferigen

Zahlen werden erhalten, wenn man die gegebene Zahl N von der Rechten gegen die Linke in Klassen von zwei zu zwei Ziffern abtheilt.

Setzt man im Werthe von S statt 10 den Werth 11 — 1, so findet man

$$\frac{S}{11} \; \frac{a_0 + (11-1)\,a_1 + a_2 + (11-1)\,a_3 + a_4 + (11-1)\,a_5 + \ldots}{11}$$

$$= \frac{a_0 + 11\,a_1 - a_1 + a_2 + 11\,a_3 - a_3 + a_4 + 11\,a_5 - a_5 + \ldots}{11}$$

$$= a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + \frac{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots}{11}$$

$$= A' + \frac{(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)}{11},$$

folglich ist

$$\frac{N}{11} = A + A' + \frac{(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)}{11},$$

d. h. **Eine Zahl N ist auch theilbar durch 11, wenn der Unterschied zwischen der Summe der Ziffern in den geraden Stellen und der Summe der Ziffern in den ungeraden Stellen durch 11 theilbar ist.**

Da sich jede dekadische Zahl N auf eine der Formen:

$$\text{I.}\quad N = 10\,A + B$$

$$\text{II.}\quad N = A + A_1\,10^2 + A_2\,10^4 + \ldots$$

$$\text{III.}\quad N = A + A_1\,10^3 + A_2\,10^6 + \ldots$$

u. s. f. bringen läßt, so kann man aus jeder derselben besondere Kennzeichen für die Theilbarkeit ableiten. So folgt z. B. aus I)

$$N = 10\,A + 21\,B - 20\,B = 3\,.\,7\,B + 10\,(A - 2\,B),$$

mithin

$$\frac{N}{3} = 7\,B + 10\,.\left(\frac{A - 2\,B}{3}\right) \ldots (\alpha)$$

$$\frac{N}{7} = 3\,B + 10\,.\left(\frac{A - 2\,B}{7}\right) \ldots (\beta),$$

ferner

$$N = 10\,A + 91\,B - 90\,B = 7\,.\,13\,B + 10\,(A - 9\,B),$$

mithin

$$\frac{N}{7} = 13\,B + 10\,.\,\frac{A - 9\,B}{7} \ldots (\gamma)$$

$$\frac{N}{13} = 7\,B + 10\,.\,\frac{A - 9\,B}{13} \ldots (\delta).$$

Eben so

$$N = 10\,A + 51\,B - 50\,B = 3\,.\,17\,B + 10\,(A - 5\,B)$$

Daher

$$\frac{N}{17} = 3\,B + 10 \,.\, \frac{A - 5\,B}{17} \ldots (\varepsilon).$$

Aus der Gleichung II, in welcher

$$A = a_0 + a_1 \,.\, 10,\; A_1 = a_2 + a_3 \,.\, 10;\; A_2 = a_4 + a_5 \,.\, 10 \text{ u. s. w.}$$

folgt, $10^{2r} = 99 \,.\, m + 1$ gesetzt, auf welche Form sich jede gerade Potenz von 10 bringen läßt, nach gehöriger Reduktion

$$N = A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{\varrho+1} + 99\,B = S + 99\,B$$

oder $N = 99\,B + S$, wo also S die Summe der zweizifferigen Zahlen bezeichnet, in welche die Zahl N von der Rechten gegen die Linke abgetheilt werden kann, und wobei nur die letzte Klasse links auch einzifferig sein kann. Es ist sonach

$$\frac{N}{3} = 33\,B + \frac{S}{3}$$

$$\frac{N}{9} = 11\,B + \frac{S}{9}$$

$$\frac{N}{11} = 9\,B + \frac{S}{11}$$

$$\frac{N}{33} = 3\,B + \frac{S}{33}$$

$$\frac{N}{99} = B + \frac{S}{99}$$

Eben so läßt sich die Gleichung III auf die Form:

$$N = 999 \,.\, C + S = 3^3 \,.\, 37 \,.\, C + S \ldots (\odot)$$

zurückführen, wenn die Zahl N von der Rechten gegen die Linke von 3 zu 3 Ziffern in Klassen getheilt, und die Summe der so erzeugten Zahlen, welche bis auf die letzte sämmtlich dreizifferig sein müssen, kurz durch S bezeichnet wird. Aus der Gleichung $\odot$ lassen sich also Kennzeichen der Theilbarkeit durch 3, 9, 27, 37, 111, 333 und 999 ableiten, was wir dem Fleiße des Anfängers überlassen. Auch ist es eine nützliche Uebung, alle erhaltenen Regeln in die gewöhnliche Wortsprache zu übersetzen.

So könnten wir für jede beliebige Zahl a ein Kennzeichen der Theilbarkeit auffinden, allein diese Criterien werden sich nicht so einfach darstellen lassen, wie die vorhergehenden, und sind demnach für die Praxis nicht von Vortheil, weshalb wir diese Untersuchung hier abbrechen, und empfehlen nur noch dem Anfänger die Aufsuchung der Kennzeichen für die Theilbarkeit durch die Zahlen 8, 16, 32, . . . und 25, 125, 625, . . .

7. Eine Zahl N ist durch eine andere zusammengesetzte Zahl m theilbar, wenn sie durch die Faktoren von m, die Primzahlen gegen einander sind, gemessen werden kann (§. 70, 1). So z. B. ist 546 durch 42 theilbar, wenn sie durch 6 und durch 7 theilbar ist, weil 42 = 6 . 7, und diese Faktoren relative Primzahlen sind. Eben so ist 276 theilbar durch 12, weil diese Zahl durch 3 und 4 getheilt werden kann, und die Zahl 114 kann durch 6 gemessen werden, weil sie gerade und durch 3 theilbar ist. Man kann aber nicht sagen, daß 114 durch 12 getheilt werden könne, weil sie durch 2 und 6 theilbar ist; denn, obgleich 12 = 2 . 6 ist, so ist doch der Faktor 2 in 6 enthalten, und also jener Schluß unrichtig. Aus demselben Grunde kann man nicht schließen, daß eine Zahl durch 24 theilbar sei, wenn sie durch 4 und 6 ohne Rest dividirt werden kann, weil die Zahlen 4 und 6 den gemeinschaftlichen Faktor 2 enthalten; wohl aber ist sie durch 24 theilbar, wenn sie durch 3 und 8 theilbar ist, denn 3 und 8 sind Primzahlen gegen einander.

8. Wir haben bisher die Kennzeichen angegeben, ob eine Zahl N durch die Primzahlen 2, 3, 5 und 11 theilbar sei. Ob aber eine Zahl durch eine der übrigen Primzahlen gemessen werden könne, muß aus dem in Nro. 6 angeführten Grunde durch Versuche ausgemittelt werden. Uebrigens beobachte man bei solchen Untersuchungen folgende Regel. Man dividire die Zahl N durch die Primzahlen in der natürlichen Ordnung, indem man von den kleinern zu den größern übergeht. Ist z. B. a die erste Primzahl, welche ein Maß von N ist, und der Quotient = Q, nämlich N : a = Q, so ist Q das Produkt der übrigen einfachen Faktoren von N. Auf dieselbe Art suche man den kleinsten einfachen Divisor von Q, mit dem Bemerken, daß man alle einfachen Faktoren, die < a sind, weglassen muß; denn wäre Q theilbar durch einen einfachen Faktor, der < a wäre, so müßte auch N durch denselben theilbar sein; also wäre a nicht der kleinste einfache Faktor von N, wie wir vorausgesetzt haben. Weil aber N den Faktor a mehrmals enthalten kann, so muß man die Division von Q mit a anfangen. Ist aber Q nicht mehr theilbar durch a, so geht man zur nächst größeren Primzahl über, und setzt dieses Verfahren fort, bis man alle einfachen Faktoren aufgefunden hat (§. 63). Nehmen wir an, man habe folgende Messungen erhalten:

1. $N : a = Q$
2. $Q : b = Q'$
3. $Q' : c = Q''$,

wo a, b, c und Q'' Primzahlen sein sollen.

Aus 3) folgt $Q' = c\,Q''$, aus 2) $Q = b\,Q' = b\,c\,Q''$, und aus 1) $N = a \,.\, Q = a\,b\,c\,Q''$.

Zeigt sich bei dieser Operation, daß N durch keine Zahl theilbar ist, die $< N$ wäre, so ist N eine Primzahl.

Man suche z. B. die einfachen Faktoren der Zahl 80465. Nach 4) ist diese Zahl theilbar durch $5 = a$, nämlich

$$80465 : 5 = 16093 = Q.$$

Weil nun Q nicht mehr durch 5 theilbar ist, versuche man die Division mit $7 = b$, und man findet $16093 : 7 = 2299 = Q'$. Durch 7 ist Q' nicht mehr theilbar, aber durch $11 = c$ (6), denn $2299 : 11 = 209 = Q''$. Nach 6) ist Q'' wieder durch 11 theilbar, und zwar ist

$$209 : 11 = 19 = Q'''.$$

Da 19 eine Primzahl ist, so sind die einfachen Faktoren der gegebenen Zahl 80465 folgende:

$$5,\ 7,\ 11,\ 11,\ 19, \text{ oder } 80465 = 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 11 \,.\, 19.$$

§. 72

Lehrsatz. Jede Zahl N, welche zwischen der Primzahl a und a^2 liegt, ist selbst eine Primzahl, wenn sie durch keine Stammzahl theilbar ist, die gleich oder kleiner als a ist.

Läugnet jemand diese Behauptung, so müßte N durch irgend eine Primzahl m theilbar sein, die größer als a wäre. Es sei also $\frac{N}{m} = n$, folglich $N = m\,n$. Da nun $m > a$, so ist $\frac{N}{m} < \frac{N}{a}$ (§. 59, 3), d. i. $n < \frac{N}{a}$; und weil der Voraussetzung gemäß $N < a^2$, so ist, wenn man beide Größen durch a dividirt, $\frac{N}{a} < a$, um so mehr also $n < a$. Aus der Gleichung $N = m\,n$ aber folgt $\frac{N}{n} = m$, d. h. N ist ein Vielfaches von n, und folglich wäre N durch eine Zahl n theilbar, die kleiner als a wäre was der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz 1) Wenn

$N : a = q + \frac{r}{a}$ gesetzt wird, wobei $r < a$, mithin $N = aq + r$, so ist da $N < a^2$, mithin auch $a\,q + r < a^2$, um so mehr also $a\,q < a^2$, oder $q < a$. Liegt sonach eine Primzahl N zwischen der Primzahl a und ihrem Quadrate a^2; und man theilt N durch a, so muß der Quotient $q < a$ sein.

Umgekehrt: Wenn N weder durch die Primzahl a noch durch eine andere Zahl $< a$ theilbar ist und es ist zugleich $\frac{N}{a} = q < a$; so muß $N < a^2$ sein. Denn es sei z. B. $N = aq + r$, wo $r < a$ und $q < a$; so ist $q + 1 \leqq a$, also auch $aq + a \leqq a^2$, und da $aq + r < aq + a$, also auch $N < aq + a$; so muß nothwendig $N < a^2$ und daher eine Primzahl sein.

Aus dem Gesagten leiten wir folgenden Schluß ab: Wenn man bei der Aufsuchung der einfachen Faktoren eine gegebene Zahl nach und nach durch die in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Primzahlen dividirt hat, und man erhält endlich einen Quotienten, der kleiner als der Divisor ist, ohne daß eine der vorhergehenden Divisionen eine Messung gewesen, so ist die gegebene Zahl immer eine Primzahl. Hat man z. B. die Zahl 647 durch keine Primzahl, die < 19, theilbar gefunden, und man setzt die Untersuchung fort, so findet man:

$$647 : 19 = 34 + \tfrac{1}{19},$$
$$647 : 23 = 28 + \tfrac{3}{23},$$
$$647 : 29 = 22 + \tfrac{9}{29}.$$

Da nun der Quotient 22 kleiner als der Divisor 29 ist, so ist 647 selbst eine einfache Zahl.

Zusatz 2. Wenn man eine ganze Zahl N durch 6 dividirt, so können als Reste nur folgende Zahlen erscheinen: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Wenn 6 als Rest bleibt, so ist N durch 6 theilbar, ist der Rest $= 2$ oder $= 4$, so ist N meßbar durch 2, und ist der Rest $= 3$, so ist N selbst durch 3 theilbar; soll demnach N eine Primzahl sein, so muß, wenn N durch 6 dividirt wird, der Rest 1 oder 5 sein. Wir ziehen hieraus den Schluß, daß alle Primzahlen, 2 und 3 ausgenommen, um 1 größer oder kleiner seien, als ein Vielfaches von 6. Wir können aber nicht umgekehrt schließen, daß alle Zahlen, die um 1 größer oder kleiner als ein Vielfaches von 6 sind, Primzahlen seien.

§. 73.

Die einfachen Faktoren allgemeiner Monome sind die Buchstaben selbst, aus welchen sie zusammengesetzt sind; die numerischen Koefficienten aber werden, nach §. 71, aufgelöst. So z. B. ist

$$14 a^2 b c^2 = 2 . 7 . a . a . b\, c\, c \text{ und}$$
$$165 a b^2 x^3 = 3 . 5 . 11 . a b b x x x.$$

§. 74.

Die Aufsuchung der einfachen Faktoren komplexer Größen ist gewöhnlich mit mehr Schwierigkeit verbunden, aber in der ganzen Mathematik von großer Wichtigkeit.

Für alle Fälle lassen sich keine bestimmten Regeln geben, sondern das meiste kommt auf Uebung und eigene Erfindung, nicht selten auf glückliches Errathen an. Uebrigens merke man sich Folgendes:

1. Wenn alle Glieder einer zusammengesetzten Größe einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so ist der eine Faktor dieser Divisor, der andere aber die Summe aller Partialquotienten, welche erhalten werden, wenn man jedes Glied des gegebenen Polynoms durch jenen gemeinschaftlichen Faktor dividirt, wie aus nachstehenden Beispielen erhellen wird.

I. $ax + bx - 3x = (a + b - 3)\, x.$

II. $3a^2 - 12ax = 3a . a - 3a . 4x = (a - 4x)\, 3a.$

III. $12a^3 + 18a^2b - 24abc =$
$= 6a . 2a^2 + 6a . 3ab - 6a . 4bc = (2a^2 + 3ab - 4bc)\, 6a.$

IV. $8a^2b^2x - 4a^3b^3x^2 + 12ab^4x^3 =$
$= 4ab^2x\,(2a - a^2bx + 3b^2x^2).$

V. $3y^2 - 6ay^3 = (1 - 2ay)\, 3y^2.$

VI. $5a^2b - 5ab^2 = 5ab\,(a - b) = - 5ab\,(b - a).$

Es ist öfters vortheilhaft, den monomischen Faktor negativ zu nehmen.

2, Man behalte vorzüglich folgende Ausdrücke im Gedächtnisse, weil in der Mathematik ein häufiger Gebrauch von ihnen gemacht wird.

I. $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2.$

II. $(a \pm b)\,(a \pm b) = (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab.$

Diese Formeln, in die gewöhnliche Sprache übersetzt, heißen:

1) das Produkt der Summe zweier Größen in ihren Unterschied ist der Differenz ihrer Quadrate gleich, und

2) das Quadrat eines Binoms ist gleich der Summe der Quadrate beider Theile, mehr oder weniger dem doppelten Produkte derselben, je nachdem das zweite Glied positiv oder negativ ist.

3. Die Zerlegung eines Polynoms in Faktoren wird oft dadurch erleichtert, daß man ein Glied in zwei Theile auflöst, z. B.:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a(a + b) + b(a + b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2.$$

Eben so ist

$$m^2 + 5mx + 6x^2 = m^2 + 2mx + 3mx + 6x^2$$
$$= m(m + 2x) + 3x(m + 2x) = (m + 2x)(m + 3x),$$
$$6x^2 + 13x + 5 = 6x^2 + 3x + 10x + 5$$
$$= 3x(2x + 1) + 5(2x + 1) = (2x + 1)(3x + 5).$$

Bei dieser Auflösung eines Gliedes in zwei Theile hat man darauf zu sehen, daß die numerischen Koefficienten zweier Glieder, oder je zweier Glieder entweder gleich werden, oder doch einen gemeinschaftlichen Faktor enthalten, wie aus den angeführten Beispielen ersichtlich ist.

4. Man erleichtert sich die Arbeit auch nicht selten dadurch, daß man zu dem gegebenen Polynome dieselbe Größe addirt, und zugleich auch wieder davon abzieht; z. B.:

$$a^2 - a - 6 = a^2 - a + 2a - 2a - 6$$
$$= a^2 + 2a - 3a - 6 = a(a + 2) - 3(a + 2) = (a + 2)(a - 3).$$

Eben so ist

$$a^4 - y^2 = a^4 + a^2y - a^2y - y^2$$
$$= a^2(a^2 + y) - y(a^2 + y) = (a^2 + y)(a^2 - y)$$
$$m^2 - 16 = m^2 + 4m - 4m - 16$$
$$= m(m + 4) - 4(m + 4) = (m + 4)(m - 4).$$

5. Weiß man einen solchen Werth für eine Buchstabengröße zu substituiren, daß der ganze Ausdruck durch die Substitution dieses Werthes auf Null gebracht wird, so ist die Differenz zwischen dieser Buchstabengröße und jenem Werthe der eine Faktor; der andere aber ist der Quotient aus diesem Faktor in das gegebene Polynom. Die Gültigkeit dieser Regel leuchtet aus §. 58, Anmerk. ein, und wird in der Theorie der Gleichungen nachgewiesen werden. Beispiele werden das Ganze erläutern.

Man soll $2x^2 - 7x - 15$ in Faktoren auflösen. Setzt man $x = 5$, so erhält man

$$2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 - 15 = 50 - 35 - 15 = 50 - 50 = 0.$$

Also ist der eine Faktor $x - 5$, und der andere

$$(2x^2 - 7x - 15) : (x - 5) = 2x + 3, \text{ daher}$$
$$2x^2 - 7x - 15 = (x - 5)(2x + 3).$$

Setzt man in dem Ausdrucke $y^3 - 19y + 30$ die Größe $y = 2$, so erhält man

$$2^3 - 19 \cdot 2 + 30 = 8 - 38 + 30 = 0;$$

also ist ein Faktor $y - 2$, und der andere

$$(y^3 - 19y + 30) : (y - 2) = y^2 + 2y - 15.$$

Allein dieser Faktor ist auch noch zusammengesetzt, und weil er verschwindet oder auf Null gebracht wird, wenn man $y = -5$ setzt, so ist ein Faktor dieses Produktes $y - (-5) = y + 5$, und der andere $(y^2 + 2y - 15 : (y+5) = y - 3$, also $y^2 + 2y - 15 = (y+5)(y-3)$, und das gegebene Polynom $y^3 - 19y + 30 = (y-2)(y-3)(y+5)$.

Bei dieser Methode, die einfachen Faktoren einer zusammengesetzten Buchstabengröße zu finden, zerfälle man nur immer das letzte Glied (wenn die Größe geordnet ist, wo dann dieses Glied gewöhnlich bloß numerisch ist) in Faktoren, und versuche einen nach dem andern, sowohl positiv als negativ genommen, zu substituiren.

Beispiele zur Uebung.

I. $a^3 + 3a^2 + 2a = a^3 + a^2 + 2a^2 + 2a$
$= a^2(a+1) + 2a(a+1) = (a+1)(a^2+2a) = a(a+1)(a+2)$.

II. $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x^2 - x - 2x + 2)$
$= x[x(x-1) - 2(x-1)] = x(x-1)(x-2)$.

III. $a^6 - x^2 = a^3 . a^3 - x . x = (a^3 + x)(a^3 - x)$.

IV. $x^4 - 1 = x^2 . x^2 - 1 . 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= (x^2 + 1)(x^2 - 1^2), = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.

V. $2a^3 + 3a^2b + 3ab - 2a = a(2a^2 + 3ab + 3b - 2)$
$= a(2a^2 - 2 + 3ab + 3b) = a[2(a^2 - 1) + 3b(a + 1)]$
$= a(2a + 1)(a - 1) + 3b(a + 1)]$
$= a(a + 1)[2(a - 1) + 3b] = a(a + 1)(2a - 2 + 3b)$.

VI. $n^5 - 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 6n = n(n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 5n - 6)$.

Setzt man im zusammengesetzten Faktor $n = 1$, so verschwindet er, also ist $n - 1$ ein Faktor desselben (5), und der andere ist

$$(n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 5n - 6) : (n - 1) = n^3 - 4n^2 + n + 6.$$

Dieser Faktor ist wieder zusammengesetzt, und verschwindet für $n = -1$; daher ist $n - (-1) = n + 1$ auch ein Faktor, und der andere $(n^3 - 4n^2 + n + 6) : (n + 1) = n^2 - 5n + 6$, welcher ebenfalls eine zusammengesetzte Größe ist. Nun ist

$$n^2 - 5n + 6 = n^2 - 2n - 3n + 6 = n(n-2) - 3(n-2) = (n-2)(n-3);$$

also ist, wenn man gehörig substituirt, die gegebene Größe

$$n^5 - 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 6n = n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3).$$

§. 75.

Die einfachen und zusammengesetzten Divisoren einer gegebenen Größe zu finden, d. h. alle Größen, durch welche eine gegebene theilbar ist.

Man suche, nach §. 71 — 74, alle einfachen Divisoren der gegebenen Größe, schreibe diese links einer vertikalen Linie unter einander, und zwar zur Erleichterung des Calcüls so, daß man die größern zuerst anschreibt; dann multiplicire man den ersten einfachen Faktor mit dem nächstfolgenden, bemerke sich das Produkt zur Rechten, und multiplicire mit dem dritten einfachen Divisor die beiden vorhergehenden einfachen und den zusammengesetzten Faktor, welche Produkte ebenfalls rechts notirt werden müssen. Auf diese Art multiplicire man mit jedem folgenden einfachen Divisor alle vorhergehenden einfachen und zusammengesetzten Faktoren.

Der Vorgang wird aus nachstehenden Beispielen einleuchten.

1. Man suche alle zusammengesetzten Divisoren der Zahl 2310. Nach §. 71, 8 ist 2310 = 11 . 7 . 5 . 3 . 2, man schreibe also

11	
7	77
5	55, 35, 385
3	33, 21, 231, 15, 165, 105, 1155
2	22, 14, 154, 10, 110, 70, 770, 6, 66, 42, 462, 30, 330, 210, 2310.

II. Man suche alle zusammengesetzten Divisoren von 15 a b. Es ist 15 a b = 3 . 5 . a . b. Also

5	
3	15
a	5a, 3a, 15a
b	5b, 3b, 15b, ab, 5ab, 3ab, 15ab.

Kommt derselbe einfache Faktor mehrmalen vor, so multiplicire man mit dem zweiten gleichen Faktor nur die nächst vorhergehende horizontale Reihe der Divisoren, um alle Wiederholungen zu vermeiden.

III. Da 36 = 2 . 2 . 3 . 3, so sind die Divisoren dieser Zahl folgende:

2	
2	4
3	6, 12
3	9, 18, 36

IV. Es ist $6a^2b^3 = 2 . 3 . a^2 . b^3 = 2 . 3 . a a b b b$, also sind

2	
3	6
a	$2a$, $3a$, $6a$
a	a^2, $2a^2$, $3a^2$, $6a^2$
b	$2b$, $3b$, $6b$, ab, $2ab$, $3ab$, $6ab$, a^2b, $2a^2b$, $3a^2b$, $6a^2b$
b	b^2, $2b^2$, $3b^2$, $6b^2$, ab^2, $2ab^2$, $3ab^2$, $6ab^2$, a^2b^2, $2a^2b^2$, $3a^2b^2$, $6a^2b^2$
b	b^3, $2b^3$, $3b^3$, $6b^3$, ab^3, $2ab^3$, $3ab^3$, $6ab^3$, a^2b^3, $2a^2b^3$, $3a^2b^3$, $6a^2b^3$

alle Divisoren der Größe $6a^2b^3$.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn die gegebene Größe polynomische Faktoren hat.

V. Weil man

$$4x^3 + 10x^2 - 6x = 2x\,(2x-1)\,(x+3) \text{ findet,}$$

so sind die zusammengesetzten Divisoren folgende:

2	
x	$2x$
$(2x-1)$	$2\,(2x-1)$, $x\,(2x-1)$, $2x\,(2x-1)$
$(x+3)$	$2\,(x+3)$, $x\,(x+3)$, $2x\,(x+3)$, $(2x-1)\,(x+3)$,
	$2\,(2x-1)\,(x+3$, $x(2x-1)(x+3)$, $2x(2x-1)\,(x+3)$.

VI. Eben so findet man für $6\,(a^2-x^2) = 2.3\,(a+x)\,(a-x)$ folgende zusammengesetzte Divisoren:

$a+x$	
$a-x$	$(a+x)\,(a-x)$
3	$3\,(a+x)$, $3\,(a-x)$, $3\,(a+x)\,(a-x)$
2	$2\,(a+x)$, $2\,(a-x)$, $2\,(a+x)\,(a-x)$, 6, $6\,(a+x)$,
	$6\,(a-x)$, $6\,(a+x)\,(a-x)$.

§. 76.

Das größte gemeinschaftliche Maß von zwei gegebenen Größen zu finden (§. 60, 4).

Auflösung 1.

Man löse jede der gegebenen Größen in ihre einfachen Faktoren auf, und bemerke sich von diesen jene, welche den gegebenen Größen gemeinschaftlich sind; das Produkt derselben ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß.

Beispiele.

I. Da $6006 = 2 . 3 . 7 . 11 . 13$ und $2046 = 2 . 3 . 11 . 31$, so ist das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen $2 . 3 . 11 = 66$.

II. Man suche das größte gemeinschaftliche Maß zu den drei Zahlen 276, 228, 4092. Weil $276 = 3 . 4 . 23$, $228 = 3 . 4 . 19$ und $4092 = 3 . 4 . 11 . 31$, so ist der größte gemeinschaftliche Divisor dieser Zahlen $3 . 4 = 12$.

III. Eben so ist, weil

$$6a^3 b^2 c = 2.3.aaabbc \text{ und } 8a^2 bc^2 = 2.2.2.aabcc,$$

das größte gemeinschaftliche Maß dieser beiden Größen

$$2aabc = 2a^2bc.$$

IV. Auf dieselbe Art kann man verfahren, wenn zu zwei oder mehreren gegebenen Polynomen der größte gemeinschaftliche Divisor zu suchen ist. Da z. B. $12x^3 + 6x^2 - 6x = 2.3.x(2x - 1)(x + 1)$ und $4x^3 - 4x = 2.2x(x + 1)(x - 1)$, so ist das größte gemeinschaftliche Maß dieser beiden Größen $2x(x + 1) = 2x^2 + 2x$.

Diese Methode, das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen, ist nur bei algebraischen Monomen mit Vortheil anwendbar. Soll aber für zwei oder mehrere Zahlen oder zusammengesetzte algebraische Ausdrücke der größte gemeinschaftliche Divisor gesucht werden, so verfährt man leichter auf folgende Art.

Auflösung 2.

Soll zu A und B das größte gemeinschaftliche Maß gesucht werden, und ist $A > B$, so dividire man die größere Zahl A durch die kleinere B. Geht die Division auf, so ist B selbst das größte gemeinschaftliche Maß für A und B (§. 60, 2). Geht aber die Division nicht auf, sondern bleibt ein Rest R, d. i. wenn z. B. $A = Q . B + R$ ist, so theile man den vorigen Divisor B durch den erhaltenen Rest R. Ist der Quotient Q' eine ganze Zahl, nämlich $B = R . Q'$, so ist R der größte gemeinschaftliche Divisor. Bleibt aber auch hier wieder ein Rest R', so dividire man den vorigen Divisor R durch R' und so fort, daß der neue Rest immer wieder Divisor des unmittelbar vorhergehenden Divisors wird. Der Divisor, welcher den Dividend endlich mißt, ist a) das gemeinschaftliche und b) das gemeinschaftlich größte Maß von A und B. Es sei nämlich

$$1)\ A : B = Q + \frac{R}{B}; \text{ also } 1)\ A = BQ + R.$$

$$2)\ B : R = Q' + \frac{R'}{R}\text{; also } 2)\ B = R Q' + R'.$$

$$3)\ R : R' = Q'' + \frac{R''}{R'}\text{; . . } 3)\ R = R' Q'' + R''.$$

Endlich sei

$$4)\ R' : R'' = Q'''\text{; . . . . } 4)\ R' = R'' Q'''\text{;}$$

so ist der letzte Divisor R'' das größte gemeinschaftliche Maß von A und B.

Von der Gültigkeit dieser Methode überzeugt man sich auf folgende Art:

a) Da $R' = R'' Q'''$, so ist R'' ein Faktor von R', folglich (§. 67, c) auch ein Faktor von

$$R = R' Q'' + R'',$$

mithin auch von $B = R\ Q' + R'$,

also auch von $A = B\ Q\ + R$,

nämlich es ist R'' ein gemeinschaftlicher Faktor von A und B.

b) Wäre nun R'' nicht der größte gemeinschaftliche Faktor von A und B, so nehme man an, es sei M das größte gemeinschaftliche Maß von A und B, also $M > R''$. Da nun A und B durch M theilbar sein sollen, so müßte, nach §. 67, c, auch

$A - B Q = R$ theilbar sein durch M,

folglich auch $B - R Q' = R'$ " " " "

" " $R - R'Q'' = R''$ " " " "

d. i. es müßte auch R'' meßbar sein durch M, was absurd ist, weil $R'' < M$ vorausgesetzt wurde.

Findet man $R'' = 1$, so ist dieß ein Zeichen, daß A und B Primzahlen gegen einander seien (§. 60, 6) und umgekehrt.

Beispiele.

I. Man suche das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 5632 und 528.

	A	B	
	5632	528	10 (Q)
(R)	352	176 (R')	1 (Q')
	" " "		2 (Q'')

Also ist 176 das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen.

II. Welches ist der größte gemeinschaftliche Divisor von 10824 und 278784?

10824 (B)	278784 (A)	25 (Q)
2640 (R′)	„62304	1 (Q′)
	„8184 (R)	3 (Q″)
	„264 (R″)	10 (Q‴).

Also ist 264 das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß.

III. Die Zahlen 84 und 715 sind Primzahlen gegen einander, weil man 1 als größtes gemeinschaftliches Maß derselben findet; nämlich:

84 (B)	715 (A)	8 (Q)
41 (R′)	43 (R)	1 (Q′)
1 (R‴)	„2 (R″)	1 (Q″)
		20 (Q‴)
		2 (Q⁗).

Bei einnamigen algebraischen Größen verfährt man am besten nach der ersten Methode.

Bevor wir aber zur Anwendung der zweiten Methode auf zusammengesetzte algebraische Größen übergehen, wollen wir noch einige allgemeine Sätze untersuchen.

§. 77.

1. Wenn zwei Größen A und B einen gemeinschaftlichen Divisor D haben, so muß dieser Divisor D denjenigen Rest, den man erhält, wenn die größere Größe A durch die kleinere B dividirt wird, wieder ohne Rest theilen, d. i. es muß D auch ein Maß vom erhaltenen Reste R sein.

Es sei $A : D = Q$, also $A = DQ$ und $B : D = Q'$, also $B = DQ'$, aber $A : B = q + \frac{R}{B}$, also $A = Bq + R$. Substituirt man in dem letzten Ausdrucke die für A und B angegebenen Werthe, so ist $DQ = DQ' . q + R$, also $R = DQ - DQ' . q = D(Q - Q'q)$, folglich $\frac{R}{D} = Q - Q'q =$ einer ganzen Zahl.

2. Das größte gemeinschaftliche Maß von A und B wird nicht geändert, wenn man A oder B mit einem außergemeinschaftlichen Faktor multiplicirt oder dividirt.

Es sei $A = abcd$ und $B = a^2cg$, so ist ac der größte gemeinschaftliche Faktor von A und B. Multiplicirt man A durch m, welches kein Faktor von B ist, und B durch n, welches kein Faktor von

A und m ist, so erhält man die Größen $abcdm$ und a^2cgn, deren größtes gemeinschaftliches Maß immer noch ac ist. Dividirt man ferner A z. B. durch b, welches kein Faktor von B ist, und B durch g, welches kein Faktor von A ist, so haben die Quotienten acd und a^2c auch noch dasselbe größte gemeinschaftliche Maß ac.

Bei der wirklichen Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Divisors von zwei gegebenen Polynomen müssen, wie bei der Division gelehrt wurde, beide Größen nach dem Gesetze eines und desselben Buchstaben geordnet werden und zwar nach den fallenden Potenzen derselben. Die Division kann man sich, wie wir eben gesehen haben, dadurch abkürzen, daß man den Faktor, welchen alle Glieder des einen Polynoms gemein haben, der aber nicht gemeinschaftlicher Faktor der Glieder des andern Polynoms ist, geradezu wegläßt.

Nicht selten wird es bei diesen Untersuchungen der Fall sein, daß der Koefficient des ersten Gliedes im Dividende nicht theilbar ist durch den Koefficienten des ersten Gliedes im Divisor, daß also der Partialquotient ein Bruch wird, in welchem Falle die Division nie zu Ende gebracht werden könnte, weil man immer wieder Brüche zum Reste bekäme. Um nun diese Schwierigkeit zu heben, muß man den Dividend mit einer solchen Zahl multipliciren, daß der Partialquotient als ganze Zahl erscheint, durch welche Multiplikation der größte gemeinschaftliche Divisor nicht geändert wird, sobald die genannte Zahl kein Faktor des Divisors ist, wie wir oben gezeigt haben.

Wir wollen nun die vorgetragenen Grundsätze auf Beispiele anwenden.

§. 78.

Man sucht das gemeinschaftliche größte Maß von

$A = 5x^3 - 18x^2y + 11xy^2 - 6y^3$ und $B = 7x^2 - 23xy + 6y^2$.

Die beiden Größen sind schon in Ansehung des Buchstaben x geordnet und A ist bei der ersten Operation der Dividend, B aber der Divisor. Weil aber $5x^3$ durch $7x^2$ nicht theilbar ist, so multiplicire man zuvor A durch 7 (denn 7 ist kein Faktor von B), wodurch der Dividend A in $7A = 35x^3 - 126x^2y + 77xy^2 - 42y^3$ verwandelt wird. Dividirt man nun $7A$ wirklich durch B, so ist der erste Partialquotient $+ 5x$. Diesen Quotienten mit B multiplicirt, und von $7A$ abgezogen, gibt den Rest $R = - 11x^2y + 47xy^2 - 42y^3$. Läßt man nun in R den gemeinschaftlichen Faktor y hinweg, und multiplicirt den so verwandelten Rest R' durch 7, so erhält man bei fortgesetzter Division als zweiten Partialquotienten $- 11$, welcher mit dem alten Divisor B multiplicirt und vom vorigen Reste R'' abgezo-

gen, den neuen Rest $P = 76xy - 228y^2$ gibt. Nun mache man P zum Divisor, und den vorigen B zum Dividend (§. 76). Der Divisor P aber läßt sich durch Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $76y$, welcher kein Faktor von B ist, vereinfachen, und man erhält den wirklichen Divisor $x - 3y = C$. Der erste Partialquotient aus C in B ist $7x$, welcher mit C multiplicirt und von B abgezogen den Rest $D = -2xy + 6y^2$ läßt. D durch $2y$ abgekürzt gibt den neuen Dividend $-x + 3y = D'$, welcher durch C getheilt den zweiten Partialquotienten -1 gibt. Da hier die Division genau aufgeht, so ist $C = x - 3y$ das größte gemeinschaftliche Maß für A und B.

Zur Erleichterung der Uebersicht folgt hier die Rechnung, bei welcher die Zwischenoperationen durch wellenförmige Linien angedeutet sind, welches Zeichen ich bei den folgenden Beispielen immer gebrauchen werde.

I.

$$\begin{array}{rrrrl}
5x^3 & -18x^2y & +11xy^2 & -6y^3 & = A \\
\times 7 & & & & \\
35x^3 & -126x^2y & +77xy^2 & -42y^3 & = 7A \\
35x^3 & -115x^2y & +30xy^2 & & \\
- & + & - & & \\
\hline
,, & -11x^2y & +47xy^2 & -42y^3 & = R \\
:y & & & & \\
 & -11x^2 & +47xy & -42y^2 & = R' \\
\times 7 & & & & \\
 & -77x^2 & +329xy & -294y^2 & = R'' \\
 & -77x^2 & +253xy & -66y^2 & \\
 & + & - & + & \\
\hline
 & ,, & 76xy & -228y^2 & = P \\
 & :76y & & & \\
 & & x & -3y & = C
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl|l}
7x^2 & -23xy & +6y^2 & = B & 5x - 11) \\
7x^2 & -21xy & & & 7x - 1 \\
- & + & & & \\
\hline
,, & -2xy & +6y^2 & = D & \\
:2y & & & & \\
 & -x & +3y & = D' & \\
 & -x & +3y & & \\
 & + & - & & \\
\hline
 & ,, & ,, & &
\end{array}$$

Man hätte D auch durch $-2y$ dividiren können, ohne das größte gemeinschaftliche Maß zu ändern.

II. Man suche das größte gemeinschaftliche Maß zu

$21x^2 - 22xy + 5y^2$ und $84x^2 - 4xy - 40y^2$.

Rechnung.

$21x^2 - 22xy + 5y^2$	$84x^2 - 4xy - 40y^2$	
$21x^2 - xy - 10y^2$	$: 4$	
$- \quad + \quad +$	$21x^2 - xy - 10y^2$	1
$- 21xy + 15y^2$	$21x^2 - 15xy$	$3x + 1$
$: - 3y$	$- \quad +$	
$M = + 7x - 5y$	„ $14xy - 10y^2$	
	$: 2y$	
	$7x - 5y$	
	$7x - 5y$	
	$- \quad +$ „	
	„ „	

Also ist M das verlangte größte gemeinschaftliche Maß.

III. Man verlangt den größten gemeinschaftlichen Divisor der Größen

$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ und $4a^2b - 5ab^2 + b^3$.

Rechnung.

$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$	$4a^2b - 5ab^2 + b^3$	
$\times 4$	$: b$	
$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3$	$4a^2 - 5ab + b^2$	$3a + 3$
$12a^3 - 15a^2b + 3ab^2$	$4a^2 - 4ab$	$4a + 1$
$- \quad + \quad -$	$- \quad +$	
„ $3a^2b + ab^2 - 4b^3$	$- ab + b^2$	
$: b$	$: - b$	
$3a^2 + ab - 4b^2$	$a - b$	
$\times 4$	$a - b$	
$12a^2 + 4ab - 16b^2$	$- \quad +$	
$12a^2 - 15ab + 3b^2$	„ „	
$- \quad + \quad -$		
„ $19ab - 19b^2$	Also ist M das größte gemeinschaftliche Maß.	
$: 19b$		
$a - b = M$		

IV. Man suche das größte gemeinschaftliche Maß zu

$15a^2 - 6ab + 3b^2$ und $5a^2 - 10ab + 25b^2$

Rechnung.

$15a^2 - 6ab + 3b^2$	$5a^2 - 10ab + 25b^2$	
$:3$	$:5$	
$5a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + 5b^2$	5
$5a^2 - 10ab + 25b^2$	$a^2 - 3ab$	$a + 1$
$- \quad + \quad -$	$- \quad +$	
$\text{"} \quad 8ab - 24b^2$	$\text{"} \quad ab + 5b^2$	
$:8b$	$:b$	
$a - 3b = R$	$a + 5b$	
	$a - 3b$	
	$- \quad +$	
	$\text{"} \quad 8b = R'$	

Da R und R' keinen gemeinschaftlichen Faktor enthalten, so haben die gegebenen Größen auch kein gemeinschaftliches Maß.

V. Nach gehöriger Rechnung findet man, daß $a - x + y$ das größte gemeinschaftliche Maß sei der Größen

$$2a^2 - 2ax + 2ay + 3ab - 3bx + 3by \text{ und}$$
$$2ab - 2bx + 2by - a^2 + ax - ay.$$

Wenn eine von den Größen, welche man als Divisor annimmt, in mehreren Gliedern denselben Buchstaben in derselben Potenz als Faktor enthält, nach welchem beide Größen geordnet sind, so wird eine besondere Aufmerksamkeit erfordert, um den gemeinschaftlichen größten Divisor aufzufinden. In diesem Falle hat man alle Glieder, welche die nämliche Potenz desselben Buchstaben enthalten, zusammen zu nehmen, und als ein Glied zu betrachten. Ereignet es sich nun, daß durch diese Reduktion in beiden gegebenen Größen ein gemeinschaftlicher Divisor erscheint, so scheide man diesen als einen Faktor des größten gemeinschaftlichen Maßes aus, und nehme die Untersuchung bloß mit den erhaltenen Quotienten nach der bekannten Methode vor. Findet man bei fortgesetzter Operation noch einen gemeinschaftlichen Faktor, so ist das Produkt aus diesem in den ersten das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß der gegebenen Größen.

Beispiele.

I. Man suche zu

$$a^2d^2 - c^2d^2 - a^2c^2 + c^4 \text{ und}$$
$$4a^2d - 2ac^2 + 2c^3 - 4acd$$

den größten gemeinschaftlichen Divisor.

$$a^2d^2 - c^2d^2 - a^2c^2 + c^4$$

$$a^2(d^2 - c^2) - c^2(d^2 - c^2)$$

$$:(d^2 - c^2)$$

$$A = a^2 - c^2 = (a+c)(a-c)$$

$$4a^2d - 2ac^2 + 2c^3 - 4acd$$

$$:2$$

$$2a^2d - ac^2 + c^3 - 2acd$$

$$2ad(a-c) - c^2(a-c)$$

oder

$$(a-c)(2ad - c^2)$$

$$:(2ad - c^2)$$

$$(a-c) = B.$$

Dividirt man A durch B, so erhält man den Quotienten $(a+c)$; also ist $(a-c)$ das größte gemeinschaftliche Maß der gegebenen Größen.

Ist eine zusammengesetzte Größe gemeinschaftlicher Faktor der einen Größe, so wird die Rechnung bedeutend abgekürzt, wenn man durch diesen dividirt, nur hat man genau zu untersuchen, ob dieser polynomische Divisor nicht auch Faktor der andern Größe sei.

II. Man suche den größten gemeinschaftlichen Divisor der zwei Größen

$$A = 6a^2 - 4a^3b + 2a^4c - 9abc + 6a^2b^2c - 3a^3bc^2$$

und

$$B = 10a^2 + 21b^2c - 3bc^2 - 14ab + 2ac - 15abc.$$

Rechnung.

Ordnet man beide Größen nach den Potenzen von a, so ist

$$A = 2a^4c - 4a^3b - 3a^3bc^2 + 6a^2 + 6a^2b^2c - 9abc$$

und

$$B = 10a^2 - 14ab + 2ac - 15abc + 21b^2c - 3bc^2.$$

Im Dividende A lasse man den gemeinschaftlichen Faktor a, welcher kein Faktor von B ist, weg, und multiplicire A durch 5, um eine ganze Zahl als Partialquotienten zu erhalten, welcher dann $= ac$ gefunden wird. Zieht man ferner das Produkt aus ac in den Divisor B vom Dividende A ab, so erhält man den Rest

$$R = 14a^2bc - 20a^2b - 2a^2c^2 + 30a - 21ab^2c^2 + 30ab^2c + 3abc^3 - 45bc$$

in welchem die algebraische Summe der Glieder

$$14a^2bc - 20a^2b - 2a^2c^2 = 2a^2(7bc - 10b - c^2)$$

als erstes Glied des neuen Dividends genommen werden muß. Dieses erste Glied aber ist nicht theilbar durch das erste Glied $10a^2$ des Divisors B, und man hat daher R zuvor durch 5, welches kein Faktor von B ist, zu multipliciren, wo dann durch die wirkliche Division $(7bc - 10b - c^2)$ als zweiter Theil des Quotienten gefunden wird.

Zieht man endlich das Produkt $(7bc - 10b - c^2) \cdot B$ von $5R$ ab, so bleibt nach gehöriger Reduktion der Rest

$$2a(75 + 49b^2c - 70b^2 - 14bc^2 + 10bc + c^3)$$
$$- 3bc(75 + 49b^2c - 70b^2 - 14bc^2 + 10bc + c^3) = R'.$$

Dividirt man nun den vorigen Divisor B durch R', nachdem man den gemeinschaftlichen polynomischen Faktor, welcher kein Maß von B sein kann, hinweggelassen hat, nämlich durch $(2a - 3bc)$, so findet man, daß die Division aufgeht; folglich ist $2a - 3bc$ das größte gemeinschaftliche Maß von A und B.

III. Man suche das größte gemeinschaftliche Maß der Größen

$$x^4y^2 + x^3y^3 + y^4z^2 - x^4z^2 - x^3yz^2 - y^2z^4 \text{ und}$$
$$x^2y + xy^2 + y^3 - xyz - x^2z - y^2z.$$

Rechnung.

Man ordne beide Größen nach den fallenden Potenzen von x, so erhält man

$$x^4(y^2 - z^2) + x^3y(y^2 - z^2) + y^2z^2(y^2 - z^2) = A,$$

und die andere Größe in der Form

$$x^2(y - z) + xy(y - z) + y^2(y - z) = B$$

Weil aber $y^2 - z^2 = (y + z)(y - z)$ ist, so läßt sich A auf die Form

$$x^4(y + z)(y - z) + x^2y(y + z)(y - z) + y^2z^2(y + z)(y - z)$$

bringen. Man sieht nun, daß A und B den gemeinschaftlichen Divisor $(y - z)$ haben, welcher, der oben angegebenen Regel zur Folge aus beiden Größen herausgenommen wird, wodurch A in

$$x^4(y + z) + x^3y(y + z) + y^2z^2(y + z) = A'$$

und B in $x^2 + xy + y^2 = B'$ verwandelt wird. Da ferner A' den Faktor $(y + z)$ enthält, aber B nicht, so lasse man diesen hinweg, und stelle die Untersuchung mit den Größen $x^4 + x^3y + y^2z^2 = A''$ und $x^2 + xy + y^2 = B'$ an, bei welcher sich aber bald zeigt, daß A'' und B' keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr haben; folglich ist der oben gefundene Faktor $(y - z)$ zugleich das größte gemeinschaftliche Maß von A und B.

IV Durch ein ähnliches Verfahren findet man, daß $3a^2 - 2c^2$ der größte gemeinschaftliche Divisor von

$6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2$ und $3a^3b - 9a^2bc - 2abc^2 + 6bc^3$ sei.

V. Man suche das gemeinschaftlich größte Maß zu den Größen $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ und $a^2 + 2bc - c^2 - b^2$. Man wird finden, daß die Größe $a^2 + 2bc - c^2 - b^2$ selbst der größte gemeinschaftliche Divisor sei.

§. 79.

Zu drei Größen A, B, C den größten gemeinschaftlichen Divisor zu finden.

Man suche das größte gemeinschaftliche Maß für A und B, welches wir allgemein durch M bezeichnen wollen. Nun ist C durch M entweder theilbar oder nicht.

Im ersten Falle ist M das gesuchte gemeinschaftliche größte Maß der drei Größen A, B, C, wie von selbst erhellt.

Im zweiten Falle aber suche man den gemeinschaftlich größten Divisor der Größen C und M. Dieser sei M'. Weil nun M durch M' theilbar ist, so müssen auch A und B durch M' gemessen werden können (§. 64, 2); also ist M' gemeinschaftlicher Faktor von A, B und C, und zwar der größte; denn wäre ein noch größerer M'' vorhanden, so müßte auch M durch M'' theilbar sein (§. 64), folglich auch M', was nicht sein kann, da $M'' > M'$ angenommen wurde.

Ganz auf dieselbe Art sucht man zu vier oder mehreren gegebenen Größen daß gemeinschaftliche größte Maß.

So z. B. haben die Zahlen 10521, 6804 und 6447 die Zahl 21 als größtes gemeinschaftliches Maß. Denn, nach §. 76, findet man, daß 63 der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen 10521 und 6804 sei; für 63 und 6447 aber ist die Zahl 21 der größte gemeinschaftliche Theiler, also ist 21 das größte gemeinschaftliche Maß der drei gegebenen Zahlen.

Eben so ist, nach §. 76, $4a^2b^2c$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $12a^2b^2c$ und $8a^3b^2c^3$; $4ab^2$ aber der gemeinschaftlich größte Faktor der Größen $4a^2b^2c$ und $32ab^3$; also ist auch $4ab^3$ das größte gemeinschaftliche Maß der drei Größen $12a^2b^2c$, $8a^3b^2c^2$ und $32ab^3$.

§. 80.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, oder den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend (§. 60) für was immer für gegebene Größen zu finden.

Jedes Produkt $P = ABCD\ldots$ ist durch alle Faktoren A, B, C, D, . . . aus denen es zusammengesetzt ist, so wie durch alle Pro-

dukte aus je zweien, oder mehreren derselben genau theilbar (§. 66). Außerdem aber ist auch jedes Vielfache von P durch die genannten einfachen und zusammengesetzten Faktoren meßbar (§. 65). Die kleinste Zahl aber, welche durch A, B, C, D, . . . zugleich theilbar ist, kann man auf doppelte Art auffinden.

1. Man löse die gegebenen Größen in ihre einfachen Faktoren auf (§§. 71 und 74), multiplicire die verschiedenen Faktoren mit einander, und das erhaltene Produkt durch die vorkommende höchste Potenz eines jeden gemeinschaftlichen Divisors, so ist das gefundene Resultat der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Dividend der gegebenen Größen. Sind diese aber absolute oder relative Primzahlen, so ist ihr Produkt selbst das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben.

Beispiele.

I. Es ist $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ und $5940 = 2^2 . 3^3 . 5 . 11$, also ist das Produkt $2^3 . 3^3 . 5 . 11 = 11880$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen.

II. Weil $72 = 2^3 . 3^2$, $84 = 2^2 . 3 . 7$ und $810 = 2 . 3^4 . 5$, so ist der kleinste Dividend für diese Zahlen

$$2^3 . 3^4 . 5 . 7 = 8 . 81 . 5 . 7 = 22680.$$

III. Man suche die kleinste Größe, welche theilbar ist durch $4ab$, $5a^2b^2$, $6a^3bc$ und $8a^2b^2cd$. Da $4ab = 2^2 . a . b$, $5a^2b^2 = 5 . a^2 . b^2$, $6a^3bc = 2 . 3 . a^3 . bc$ und $8a^2b^2cd = 2^3 . a^2 . b^2 . cd$, so ist der verlangte Dividend $= 2^3 . 3 . 5 . a^3b^2cd = 120a^3b^2cd$.

IV. Da $15a^2b(a^2 - b^2) = 3 . 5 . a^2 . b(a + b)(a - b)$,

$$28ab^2(a - b) = 2^2 . 7 . ab^2(a - b)$$ und

$$63b^2m(a + b)(a - b)^2 = 3^2 . 7 . b^2 . m(a + b)(a - b)^2,$$

so ist der kleinste Dividend für diese Größen

$$2^2 . 3^2 . 5 . 7a^2b^2m(a + b)(a - b)^2 = 1260a^2b^2m(a + b)(a - b)^2,$$
$$= 1260a^2b^2m(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3).$$

Um sich das Zerfallen der gegebenen Divisoren in ihre einfachen Faktoren zu ersparen, kann man auf folgende Weise verfahren:

1) Man lasse die kleineren Divisoren, welche in den gegebenen größern genau enthalten sind, weg.

2) Man untersuche, ob nicht zwei oder mehrere der übrigen Divisoren ein gemeinschaftliches Maß haben. Ist dieses der Fall, so bemerke man sich dieses gemeinschaftliche Maß zur Seite, und dividire damit die genannten Divisoren, die übrigen aber schreibe man unverändert daneben.

3) Hierauf wende man auf die erhaltenen neuen Größen die (in 1 und 2) gegebenen Regeln an, und wiederhole diese Operation so lange, bis man endlich lauter absolute oder relative Primzahlen erhält.

4) Das Produkt aus den gebrauchten Divisoren in die erhaltenen Primzahlen ist dann der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Dividend für die gegebenen Zahlen.

Zur Erläuterung des Vorganges folgende Aufgabe: Man suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 40, 60.

Die kleinern, in einem größern der gegebenen Divisoren enthaltenen Zahlen werde ich durchstreichen, und nach jeder einzelnen Operation eine Linie ziehen, der zur Seite die gebrauchten gemeinschaftlichen Divisoren bemerkt werden sollen. Also

	~~3~~,	~~4~~,	~~5~~,	~~6~~,	~~8~~,	~~9~~,	~~12~~,	~~15~~,	18,	24,	27,	~~30~~,	40,	60
2									~~9~~,	12,	27,		20,	30
2										6,	27,		10,	15
2										~~3~~,	27,		~~5~~,	15
3											9,			5

Da nun 9 und 5 relative Primzahlen sind, so ist der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Dividend $= 2.2.2.3 \times 9.5 = 2^3.3^3.5 = 1080$.

2. Soll für A und B der kleinste gemeinschaftliche Dividend gefunden werden, so suche man das größte gemeinschaftliche Maß M für A und B, dividire eine dieser Größen durch M, und multiplicire den Quotienten mit der andern Größe, so ist das erhaltene Produkt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A und B. Denn es sei z. B. $A = MQ$ und $B = MQ'$, wo Q und Q' der Voraussetzung gemäß Primzahlen gegen einander sein müssen, so ist klar, daß MQQ' die kleinste Zahl sei, welche durch A und B zugleich gemessen werden kann. Da aber $MQ = A$ und $B = MQ'$, so ist durch Substitution MQQ' $= MQ \times Q' = A \,.\, \frac{B}{M} = Q \,.\, MQ' = \frac{A}{M} \,.\, B$, welche Gleichung die gegebene Regel enthält. So z. B. ist 24 das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 2568 und 5208, aber $2568 : 24 = 107$: also ist $5208 \times 107 = 557256$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen 2568 und 5208.

Diese Verfahrungsart leistet vorzüglich dann gute Dienste, wenn die gegebenen Größen zusammengesetzte Ausdrücke sind.

§. 81.

Soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von mehreren Größen A, B, C, D bestimmt werden, so suche man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

von A und B, welches T heißen mag; dann
„ T „ C, „ U „ „ ; endlich
„ U „ D, „ V „ „ ;

so ist V das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, D. Denn da V durch U und D meßbar ist, und U durch T und C, so ist V ein Vielfaches von T, C und D; und weil T ein Vielfaches von A und B ist, so ist auch V ein gemeinschaftliches Vielfaches von A und B, folglich ein gemeinschaftliches Vielfaches von A, B, C und D.

Da ferner jedes gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Größen von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen derselben gemessen wird (69), so ist jedes gemeinschaftliche Vielfache W der Größen A, B, C, D

durch A und B, also auch durch T theilbar; demnach
„ T „ C, „ „ „ U „ ; mithin
„ U „ D, „ „ „ V „ .

Es ist daher jedes gemeinschaftliche Vielfache W der Zahlen A, B, C, D theilbar durch V, und daher kann W nicht kleiner sein als V, folglich ist V das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B, C, D.

Zweiter Abschnitt.

Lehre von den Brüchen oder gebrochenen Zahlen.

---

§. 82.

Theilt man die Einheit in mehrere gleiche Theile, so heißt jeder derselben ein aliquoter Theil der Einheit. Nimmt man einen oder mehrere solche Theile, so heißt die dadurch erhaltene Zahl eine gebrochene Zahl oder ein Bruch.

Zur Bezeichnung eines Bruches sind demnach zwei Zahlen nöthig, deren eine anzeigt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt ist, und die andere, wie viele von diesen gleichen Theilen genommen worden sind, oder genommen werden sollen. Jene heißt der Nenner, und diese der Zähler des Bruches. Den Nenner schreibt man unter den Zähler, und trennt beide Zahlen durch eine kleine Querlinie. So bezeichnet z. B. der Bruch $\frac{3}{4}$, daß das Ganze oder die Einheit in 4 gleiche Theile getheilt sei, und von diesen 3 Theile genommen werden sollen, und man liest: drei Viertel. Nun wird man die Bedeutung der Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{8}$ u. s. w. kennen, welche also ausgesprochen werden: vier Fünftel, sechs Siebentel, drei Achtel u. s. w.

§. 83.

Wird die Einheit durch eine ganze Zahl, z. B. durch 4 getheilt, so ist der Quotus $= \frac{1}{4}$, weil dieser Bruch 4 mal genommen, oder durch den Divisor 4 multiplicirt den Dividend, nämlich die Einheit wieder gibt. Es ist also allgemein $1 : n = \frac{1}{n}$, weil $\frac{1}{n} \times n = 1$ und $a : n = \frac{a}{n}$, weil $\frac{a}{n} . n = a$ ist.

Es ist demnach jeder Bruch eine angezeigte Division, oder jeder Bruch kann als ein Quotient betrachtet werden, wo der Zähler den Dividend, der Nenner aber den Divisor vorstellt. Ist daher der Dividend kleiner als der Divisor, so wird der Quotient in der Form eines Bruches angezeigt (§. 37).

§. 84.

Weil $a : n = \frac{a}{n}$ (§. 83), so ist auch $\frac{a}{n} \times n = a$, denn der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, muß den Dividend wieder geben (§. 32). Multiplicirt man demnach einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man den Zähler als Produkt. Z. B.:

$$\tfrac{6}{7} \times 7 = 6;\ \frac{ab}{m} \times m = ab;\ \frac{a+x}{m+n} \times (m+n) = a + x.$$

§. 85.

Da $\frac{an}{n} = an : n = a$, so ist auch umgekehrt $a = \frac{an}{n}$, also wird eine ganze Zahl in einen Bruch von gegebenem Nenner verwandelt, wenn man dieselbe durch den Nenner multiplicirt, und dem Produkte den Nenner unterschreibt. Z. B.:

$$3 = \frac{3\,.\,2}{2} = \frac{6}{2} = \frac{3\,.\,3}{3} = \frac{9}{3} = \frac{3\,.\,4}{4} = \frac{12}{4}, \text{ 2c.}$$

$$a = \frac{ab}{b} = \frac{ac}{c} = \frac{ad}{d} = \text{2c.}$$

$$(a - x) = \frac{(a - x)\,m}{m} = \frac{(a - x)\,x}{x} = \frac{(a - x\,(a + x)}{a + x} = \frac{a^2 - x^2}{a + x};\ \text{2c.}$$

§. 86.

1. Man theilt die Brüche in echte und unechte. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so heißt der Bruch ein echter; z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{a - x}{a}$, $\frac{m}{m + n}$ u. s. w. Ist aber der Zähler größer als der Nenner, ohne ein Vielfaches von ihm zu sein, so heißt der Bruch ein unechter; z. B. $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{a + x}{a}$, $\frac{m}{m - n}$, u. s. f.

2. Man theilt die Brüche ferner in eigentliche und uneigentliche. Ein eigentlicher Bruch ist ein solcher, dessen Zähler

durch den Nenner nicht theilbar ist; z. B. $\frac{a}{a+z}$ und $\frac{a+n}{a}$, wo n kein Vielfaches von a sein soll; ein uneigentlicher oder scheinbarer Bruch aber ist derjenige, dessen Zähler ein Vielfaches des Nenners ist; z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{18}{6}$, allgemein $\frac{an}{n}$, $\frac{n(a+x)}{a+x}$, u. s. w.

3. Endlich theilt man die Brüche in reguläre und irreguläre, oder in einfache und zusammengesetzte. Die einfachen oder regulären Brüche sind solche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind; dagegen heißen Brüche zusammengesetzt oder irregulär, bei welchen der Zähler oder der Nenner, oder Zähler und Nenner zugleich selbst wieder Brüche sind; z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{5}$, $\frac{7}{\frac{8}{9}}$ oder $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$.

4. Wenn mit einer ganzen Zahl ein Bruch durch das Zeichen + oder — verbunden ist, so heißt dieser Ausdruck eine gemischte Zahl; z. B. $5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$ und $a + \frac{m}{n}$ und $a - \frac{u}{v}$.

5. Da $\frac{an+v}{n} = a + \frac{v}{n}$ ist, so kann jeder unechte Bruch durch Division in eine gemischte Zahl aufgelöst werden. So z. B. ist

$$\frac{17}{5} = \frac{15+2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}.$$

6. Umgekehrt verwandelt man eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplicirt, das Produkt zum Zähler addirt, und der Summe denselben Nenner unterschreibt. Es ist nämlich $n + \frac{x}{a} = \frac{an+x}{a}$. Z. B. $3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5} = \frac{15+4}{5} = \frac{19}{5}$ und $8\frac{7}{12} = \frac{103}{12}$.

Dieß Verwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch nennt man Einrichten.

§. 87.

Allgemeine Eigenschaften der Brüche.

1. Haben zwei Brüche gleiche Nenner, so ist jener der größere, welcher den größern Zähler hat, weil dieser mehr aliquote Theile der Einheit enthält. Ist nämlich $a > b$, so ist $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, wie schon aus §. 33 und 59 erhellt. So ist z. B. $\frac{2}{5}$ zweimal größer als $\frac{1}{5}$, oder $\frac{2}{5} = 2 . \frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ zweimal größer als $\frac{2}{5}$, oder $\frac{4}{5} = 2 . \frac{2}{5} = 2 . 2 . \frac{1}{5} = 4 . \frac{1}{5}$, u. s. w.

2. Ein Bruch wird also durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler des Bruches mit derselben multiplicirt, und den Nenner unverändert läßt. Z. B.

$$\frac{3}{8} \times 5 = \frac{3 \,.\, 5}{8} = \frac{15}{8}; \quad \frac{n}{m} \,.\, a = \frac{a\,n}{m}$$

Aus §. 33 aber folgt auch, daß ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werde, wenn man den Nenner des Bruches durch dieselbe dividirt und den Zähler ungeändert läßt. Z. B.:

$$\frac{n}{m} \times a = \frac{n}{m : a}; \quad \frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{8 : 2} = \frac{3}{4}.$$

Uebrigens kann man diese Regel auch aus der vorigen ableiten; denn es ist $\frac{n}{m} \,.\, a = \frac{a\,n}{m} = \frac{a\,n : a}{m : a}$ (nach §. 59, 6) $= \frac{n}{m : a}$, nämlich man hat auch $\frac{n}{m} \,.\, a = \frac{n}{m : a}$.

3. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man durch dieselbe den Nenner des Bruches multiplicirt, oder den Zähler des Bruches dividirt; nämlich es ist $\frac{a}{n} : m = \frac{a}{mn} = \frac{a : m}{n}$. Der Beweis für die Gültigkeit dieses Satzes erhellt zwar unmittelbar aus §. 59, 7, allein man kann denselben auch auf folgende Art führen: Es sei $\frac{a}{n} : m = x$, so muß $\frac{a}{n} = m\,x$, folglich $a = n \,.\, m\,x$ sein; hieraus folgt, nach §. 59, 1, $\frac{a}{n\,m} = \frac{n\,m\,x}{n\,m} = x$, also wird durch Substitution $\frac{a}{n} : m = \frac{a}{n\,m}$. Nun ist aber auch

$$\frac{a}{m\,n} = \frac{a : m}{m\,n : m} = \frac{a : m}{n}, \text{ folglich erhält man auch } \frac{a}{n} : m = \frac{a : m}{n}.$$

$$\text{Z. B. } \frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6.2} = \frac{5}{12}; \quad \frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9.4} = \frac{8}{36}, \text{ oder}$$

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{2}{9}.$$

4. Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt, nämlich es ist $\frac{a}{b} = \frac{a\,m}{b\,m} = \frac{a : n}{b : n}$. Der Beweis erhellt aus §. 33 uni §. 59, 5 und 6.

Zum Beispiele:

$$\frac{6}{9} = \frac{6 \,.\, 3}{9 \,.\, 3} = \frac{18}{27} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}.$$

Einen Bruch **abkürzen** heißt ihn ohne Veränderung seines Werthes durch kleinere Zahlen darstellen, welches dadurch geschieht, daß man Zähler und Nenner durch ein gemeinschaftliches Maß dividirt. Dividirt man Zähler und Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß, so werden die Quotienten Primzahlen gegen einander, und dann ist der Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht. Z. B.:

$$\frac{36}{48} = \frac{36 : 12}{48 : 12} = \frac{3}{4}, \quad \frac{13}{39} = \frac{13 : 13}{39 : 13} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{3a^2bx}{9a^3x^2} = \frac{3a^2bx : 3a^2x}{9a^3x^2 : 3a^2x} = \frac{b}{3ax},$$

$$\frac{21m(3a + 2x)}{7(9a^2 - 4x^2)} = \frac{21m(3a + 2x) : 7(3a + 2x)}{7(9a^2 - 4x^2) : 7(3a + 2x)}$$

$$= \frac{3m}{7(3a + 2x)(3a - 2x) : 7(3a + 2x)} = \frac{3m}{3a - 2x}$$

Ein Bruch wird, wenn Zähler und Nenner in einfache Faktoren aufgelöst sind, dadurch zur kleinsten Benennung gebracht, daß man die gemeinschaftlichen Faktoren im Zähler und Nenner wegläßt. Z. B.:

$$\frac{70}{112} = \frac{2 . 5 . 7}{2 . 8 . 7} = \frac{5}{8}; \quad \frac{3abx}{3 . 4 . bmx^2} = \frac{a}{4mx}.$$

5. Der Bruch $\frac{a}{b}$ kann demnach ohne Veränderung seines Werthes in einen andern von gegebener Benennung verwandelt werden, wenn man Zähler und Nenner des Bruches mit dem Quotienten multiplicirt, welchen man erhält, indem man den gegebenen neuen Nenner durch den alten dividirt. Soll z. B. $\frac{a}{b}$ in einen andern Bruch von gleichem Werthe mit dem Nenner n verwandelt werden, so multiplicire man Zähler und Nenner durch $\frac{n}{b} = q$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} = \frac{aq}{n}$. Soll man den Bruch $\frac{3}{5}$ auf die Benennung 20 bringen, so ist

$$\frac{3}{5} = \frac{3 . (20 : 5)}{5 . (20 : 5)} = \frac{3 . 4}{5 . 4} = \frac{12}{20};$$

und ist $\frac{3}{5}$ auf die Benennung 16 zu bringen, so erhält man

$$\frac{3}{5} = \frac{3 . (16 : 5)}{5 . (16 : 5)} = \frac{3 . \frac{16}{5}}{5 . \frac{16}{5}} = \frac{\frac{48}{5}}{\frac{80}{5}} = \frac{9\frac{3}{5}}{16}.$$

6. Dieser Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, mehrere gegebene Brüche ohne Veränderung des Werthes auf dieselbe Benennung zu bringen.

Man suche nämlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner aller gegebenen Brüche (§. 80), dividire dieses durch jeden

einzelnen Nenner, und mit den gefundenen Quotienten multiplicire man Zähler und Nenner der entsprechenden Brüche, so erhalten sie alle dieselbe Benennung. Sind z. B. die Brüche $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, $\frac{\delta}{d}$ auf dieselbe Benennung zu bringen, ist N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c und d; und ist

$$N : a = q \text{ also } N = a\,q$$
$$N : b = q' \text{ „ } N = b\,q'$$
$$N : c = q'' \text{ „ } N = c\,q'' \text{ und endlich}$$
$$N : d = q''' \text{ „ } N = d\,q''';$$

so ist

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\alpha\,q}{a\,q} = \frac{\alpha\,q}{N};\ \frac{\beta}{b} = \frac{\beta\,q'}{b\,q'} = \frac{\beta\,q'}{N};\ \frac{\gamma}{c} = \frac{\gamma\,q''}{c\,q''} = \frac{\gamma\,q''}{N} \text{ und}$$
$$\frac{\delta}{d} = \frac{\delta\,q'''}{d\,q'''} = \frac{\delta\,q'''}{N}.$$

Da es unendlich viele Zahlen gibt, die durch a, b, c und d zugleich theilbar sind, so kann die Reduktion dieser verschiedenen Brüche auf gleiche Benennung auf unendlich mannigfaltige Art geschehen; allein die Einfachheit des Calcüls erfordert das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner.

Beispiele.

I. Man bringe die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{5}{6}$ auf gleiche Benennung.

Da 72 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2, 3, 4, 9, 8 und 6 ist, und

$$72 : 2 = 36, \text{ so ist } \frac{1}{2} = \frac{1\,.\,36}{2\,.\,36} = \frac{36}{72}$$
$$72 : 3 = 24, \text{ „ „ } \frac{2}{3} = \frac{2\,.\,24}{3\,.\,24} = \frac{48}{72}$$
$$72 : 4 = 18, \text{ „ „ } \frac{5}{4} = \frac{5\,.\,18}{4\,.\,18} = \frac{90}{72}$$
$$72 : 9 = 8, \text{ „ „ } \frac{7}{9} = \frac{7\,.\,8}{9\,.\,8} = \frac{56}{72}$$
$$72 : 8 = 9, \text{ „ „ } \frac{5}{8} = \frac{5\,.\,9}{8\,.\,9} = \frac{45}{72}$$
$$72 : 6 = 12, \text{ „ „ } \frac{5}{6} = \frac{5\,.\,12}{6\,.\,12} = \frac{60}{72}.$$

II. Eben so geben die Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{6}$ der Ordnung nach folgende Brüche:

$$\frac{900}{1260},\ \frac{945}{1260},\ \frac{980}{1260},\ \frac{270}{1260},\ \frac{1134}{1260},\ \frac{735}{1260},\ \frac{1050}{1260}.$$

III. Man bringe folgende Brüche auf gleiche Benennung:

$$\frac{a}{2m}, \frac{3b}{m-x}, \frac{2a^2b}{m+x}, \frac{7ab^2}{4m(m^2-x^2)}, \frac{5a+b}{3m^2}.$$

Da $12m^2(m^2-x^2)$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $2m$, $m-x$, $m+x$, $4m(m^2-x^2)$ und $3m^2$ ist, so ist

$$\frac{a}{2m} = \frac{a \cdot 6m(m^2-x^2)}{2m \cdot 6m(m^2-x^2)} = \frac{6am(m^2-x^2)}{12m^2(m^2-x^2)},$$

$$\frac{3b}{m-x} = \frac{3b \cdot 12m^2(m+x)}{(m-x) \cdot 12m^2(m+x)} = \frac{36bm^2(m+x)}{12m^2(m^2-x^2)},$$

$$\frac{2a^2b}{m+x} = \frac{2a^2b \cdot 12m^2(m-x)}{(m+x) \cdot 12m^2(m-x)} = \frac{24a^2bm^2(m-x)}{12m^2(m^2-x^2)},$$

$$\frac{7ab^2}{4m(m^2-x^2)} = \frac{7ab^2 \cdot 3m}{4m(m^2-x^2) \cdot 3m} = \frac{21 \cdot ab^2m}{12m^2(m^2-x^2)} \text{ und}$$

$$\frac{5a+b}{3m^2} = \frac{(5a+b) \cdot 4(m^2-x^2)}{3m^2 \cdot 4(m^2-x^2)} = \frac{4(5a+b)(m^2-x^2)}{12m^2(m^2-x^2)}.$$

7. Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler, aber ungleiche Nenner haben, ist jener der größere, welcher den kleinern Nenner hat (§. 33 und §. 59, 3); es ist nämlich

$$\frac{a}{m} > \frac{a}{m+x}, \text{ denn } \frac{a}{m} = \frac{a(m+x)}{m(m+x)} \text{ und } \frac{a}{m+x} = \frac{am}{m(m+x)}.$$

Da nun $a(m+x) > am$, so ist auch $\frac{a(m+x)}{m(m+x)} > \frac{am}{m(m+x)}$ (Nr. 1), d. i. $\frac{a}{m} > \frac{a}{m+x}$.

8. Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches Gleiches addirt, so wird der Werth des Bruches geändert, und zwar vermehrt oder vermindert, je nachdem der Bruch ein echter oder unechter ist; nämlich es ist $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$, wenn $a < b$ und $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$, wenn $a > b$ ist. Denn es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+x)}{b(b+x)} = \frac{ab+ax}{b(b+x)} \text{ und } \frac{a+x}{b+x} = \frac{b(a+x)}{b(b+x)} = \frac{ab+bx}{b(b+x)}.$$

Ist nun $a < b$, so ist $ax < bx$, also auch $ab + ax < ab + bx$, daher auch $\frac{ab+ax}{b(b+x)} < \frac{ab+bx}{b(b+x)}$, d. i. $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$. Ist aber $a > b$, so ist $ax > bx$, also auch $ab + ax > ab + bx$, und

$$\frac{ab+ax}{b(b+x)} > \frac{ab+bx}{b(b+x)}, \text{ d. i. } \frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}.$$

9. Auf dieselbe Art beweist man auch, daß, wenn man von Zähler und Nenner eines Bruches Gleiches abzieht, der Bruch vermindert

oder vermehrt werde, je nachdem der Bruch ein echter oder unechter ist; nämlich es ist $\frac{a}{b} > \frac{a-x}{b-x}$, wenn $a < b$ und $\frac{a}{b} < \frac{a-x}{b-x}$, wenn $a > b$ ist.

10. Eben so beweist man, daß immer $\frac{a}{b} > \frac{a-x}{b+x}$, dagegen stets $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b-x}$, mag nun $\frac{a}{b}$ ein echter oder unechter Bruch sein.

Wie müssen x und y beschaffen sein, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a \pm x}{b \pm y}$ sein soll, und $a \gtrless b$ ist?

11. Der Werth eines Bruches wird nicht geändert, wenn man im Zähler und Nenner die Zeichen ändert; nämlich es ist

$$\frac{a-m}{b-n} = \frac{-a+m}{-b+n} = \frac{m-a}{n-b}.$$ Denn

$$\frac{a-m}{b-n} = \frac{(a-m) \times -1}{(b-n) \times -1} = \frac{-a+m}{-b+n} = \frac{m-a}{n-b},$$

was zu erweisen war.

Also ist auch $\frac{-m}{x-a} = \frac{m}{a-x}$.

12. Sind die Differenzen zwischen Nenner und Zähler zweier echten Brüche gleich, so ist derjenige der größere, welcher mit den größern Zahlen geschrieben ist; nämlich es ist $\frac{m}{m+x} > \frac{n}{n+x}$, wenn $m > n$. Warum?

13. Ist der Bruch $\frac{a}{b}$ auf den kleinsten Nenner gebracht, sind also a und b relative Primzahlen, und ist $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, wo A und B ebenfalls ganze Zahlen bezeichnen sollen, so muß $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ eine ganze Zahl sein. Denn aus der Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ folgt

$$\frac{a}{b} \,.\, B = A \text{ und } a \,.\, B = b \,.\, A,$$

folglich ist (nach §. 70, 2) $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ = einer ganzen Zahl.

14. Ist demnach der Bruch $\frac{a}{b}$ auf die kleinste Benennung gebracht, sind also a und b relative Primzahlen, so sind (nach §. 70, 2, s) auch a^n und b^n relative Primzahlen, d. h. auch der Bruch $\frac{a^n}{b^n}$ erscheint unter der kleinsten Benennung.

§. 88.

Fernere Eintheilung der Brüche.

Man theilt die Brüche a) in gemeine und b) in besondere oder künstliche. Brüche, deren Zähler und Nenner beliebige ganze Zahlen sind, heißen gemeine Brüche; künstliche Brüche aber sind jene, deren Nenner eine bestimmte Form haben müssen. So z. B. heißen jene Brüche, deren Nenner bloß Potenzen von 10 sind, Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche; und Brüche, deren Nenner Potenzen von 60 sind, heißen Sexagesimal-Brüche oder sechzigtheilige Brüche.

Ist mit dem Nenner eines Bruches wieder ein Bruch, mit dem Nenner dieses letztern wieder ein Bruch, u. s. w. verbunden, so heißt die dadurch entstandene Reihe von Brüchen ein Kettenbruch, stetiger oder zusammenhängender, oder continuirlicher Bruch Solche Brüche sind folgende Ausdrücke:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{2c.}}}}} \quad \text{und} \quad \cfrac{a}{\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \text{2c}}}}}$$

A. Von den gemeinen Brüchen.

§. 89.

Aufgabe.

Gegebene Brüche zu addiren.

Auflösung.

1. Haben die gegebenen Brüche gleiche Nenner, so addire man ihre Zähler und schreibe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner unter.

2. Haben aber die gegebenen Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie (nach §. 87, 6) auf gleiche Benennung und verfahre nach 1.

3. Sind die gegebenen Summanden gemischte Zahlen, so addire

man zuerst die Brüche (nach 1. oder 2.), ziehe aus ihrer Summe die Ganzen heraus, und addire diese zu den gegebenen Ganzen.

Man kann aber auch zuerst die Ganzen in uneigentliche Brüche verwandeln, und dann nach 1. verfahren.

Beweis.

Da das auf diese Art gefundene Resultat so viele aliquote Theile derselben Einheit enthält, wie viele in den gegebenen Summanden zugleich enthalten sind, so ist es die Summe der gegebenen Größen. Die Richtigkeit der Auflösung erhellt schon aus §. 55, 4.

Beispiele.

I. $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1 + 2 + 3}{7} = \frac{6}{7}$.

II. $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m} = \frac{a + b + c + d}{m}$.

III. Man suche die Summe von folgenden Brüchen:

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{5}{6} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{7}{9} + \tfrac{3}{10}.$$

Man schreibe die gegebenen Brüche in einer vertikalen Reihe unter einander, die entsprechenden neuen Zähler zur Seite, und dividire ihre Summe durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner der gegebenen Brüche, wie aus der beigefügten Rechnung zu ersehen ist.

Rechnung.

Summanden.	Quotienten.	Neue Zähler.
	360	
$\frac{3}{4}$	90	270
$\frac{4}{5}$	72	288
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{7}{9}$	40	280
$\frac{3}{10}$	36	108
	360	1381.

Also ist die verlangte Summe $= \frac{1383}{360} = 3\frac{301}{360}$.

IV. Man suche die Summe folgender Brüche:

$$3\tfrac{2}{3} + 7\tfrac{5}{8} + 29\tfrac{7}{10} + 2\tfrac{11}{12} + \tfrac{13}{15}.$$

Rechnung.

	120	
$3\frac{2}{5}$	24	48
$7\frac{5}{8}$	15	75
$29\frac{7}{10}$	12	84
$2\frac{11}{12}$	10	110
$\frac{13}{15}$	8	104
41 +		421.

Also ist die Summe der gegebenen Brüche:

$$= 41 + \tfrac{421}{120} = 41 + 3\tfrac{61}{120} = 44\tfrac{61}{120}.$$

§. 90.

Aufgabe.

Gegebene Brüche von einander abzuziehen.

Auflösung.

Man beobachte folgende Regeln:

1. Man bringe die gegebenen Brüche auf gleiche Benennung, wenn sie verschiedene Nenner haben sollten, ziehe den Zähler des Subtrahends von dem Zähler des Minuends ab, und schreibe der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner unter.

2. Ist von einer ganzen Zahl ein Bruch abzuziehen, so verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch von gleicher Benennung mit dem Subtrahend (§. 85), und verfahre dann nach 1.

3. Hat man gemischte Zahlen von einander zu subtrahiren, so verwandle man diese in unechte Brüche (§. 86) und verfahre nach 1.; oder man ziehe die Ganzen von einander ab, und dann auch die Brüche; wenn die einzelnen Theile des Minuends größer sind als die einzelnen Theile des Subtrahends.

4. Soll von einer gemischten Zahl eine ganze Zahl abgezogen werden, so hänge man der Differenz der ganzen Zahlen den Bruch des Minuends an; oder man verwandle sowohl den Minuend, als den Subtrahend in uneigentliche Brüche, und verfahre nach 1.

Der Beweis erhellt von selbst.

Beispiele.

I. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$; $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.

$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}$; $\frac{2a}{m} - \frac{a}{n} = \frac{2an - am}{mn}$.

Eben so ist auch

$$\frac{a}{a+x} - \frac{a}{a-x} = \frac{a(a-x) - a(a+x)}{(a+x)(a-x)} = \frac{a^2 - ax - a^2 - ax}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{-2ax}{a^2 - x^2} = \frac{2ax}{x^2 - a^2} \text{ (§. 87, 11).}$$

II. $3 - \frac{5}{7} = \frac{21}{7} - \frac{5}{7} = \frac{1}{7} = 2\frac{2}{7}$

$$a - \frac{p}{q} = \frac{aq - p}{q}.$$

III. $3\frac{4}{5} - 2\frac{1}{2} = \frac{19}{5} - \frac{5}{2} = \frac{38 - 25}{10} = \frac{13}{10} = 1\frac{3}{10}$,

oder $3\frac{4}{5} - 2\frac{1}{2} = (3-2) + (\frac{4}{5} - \frac{1}{2}) = 1 + \frac{8-5}{10} = 1\frac{3}{10}$.

IV. $a + \frac{m}{p} - \left(b + \frac{n}{q}\right) = \frac{ap+m}{p} - \frac{bq+n}{q} = \frac{(ap+m)q - (bq+n)p}{pq}$

$= \frac{apq + mq - bpq - np}{pq} = \frac{apq - bpq + mq - np}{pq} = a - b + \frac{mq - np}{pq}$

oder

$$a + \frac{m}{p} - \left(b + \frac{n}{q}\right) = a - b + \frac{m}{p} - \frac{n}{q} = a - b + \frac{mq - np}{pq}.$$

V. $5\frac{4}{7} - 3 = (5-3) + \frac{4}{7} = 2\frac{4}{7}$,

oder $5\frac{4}{7} - 3 = \frac{39 - 21}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$.

Eben so ist

$$n \,.\, a + \frac{p}{q} - 2a = (na - 2a) + \frac{p}{q} = (n-2)\,a + \frac{p}{q}.$$

Anmerkung. Sind von einer gegebenen Zahl mehrere Brüche abzuziehen, so bringe man die Brüche auf gleiche Benennung, und verfahre wie §. 23. Anm. Z. B.:

$36\frac{3}{4} - \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 36\frac{3}{4} - (\frac{4}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}) = 36\frac{3}{4} - \frac{163}{60}$

$= 36\frac{3}{4} - 2\frac{43}{60} = (36 - 2) + \frac{3}{4} - \frac{43}{60} = 34 + \frac{45-43}{60} = 34\frac{2}{60} = 34\frac{1}{30}$.

§. 91.

Lehrsatz. Sind die beiden Brüche $\frac{a}{n}$ und $\frac{\alpha}{\nu}$ auf ihre kleinsten Nenner gebracht, und ist die Summe

$\frac{a}{n} + \frac{\alpha}{\nu}$, oder die Differenz $\frac{a}{n} - \frac{\alpha}{\nu}$ eine ganze Zahl, so müssen die Nenner n und ν einander gleich sein.

Beweis. Sei $\frac{a}{n} + \frac{\alpha}{\nu} = s =$ einer ganzen Zahl, so ist $\frac{\alpha}{\nu} = s - \frac{a}{n}$, und, wenn man mit n multiplicirt, $\frac{n\alpha}{\nu} = ns - a =$ einer ganzen Zahl, d. h. $n\alpha$ muß durch ν theilbar sein; α und ν aber sind, vermöge der Voraussetzung, relative Primzahlen, also muß n ein Vielfaches von ν sein. Man setze demnach $n = \nu\beta$, also $n\alpha = \nu\beta\alpha$ und $\frac{n\alpha}{\nu} = \alpha\beta$, so wird, weil $a = ns - \frac{n\alpha}{\nu}$ ist, durch Substitution $a = \nu\beta s - \alpha\beta = \beta(\nu s - \alpha)$, also $\frac{a}{\beta} = \nu s - \alpha =$ einer ganzen Zahl, also wäre β ein gemeinschaftliches Maß von a und n; a und n aber sind, der Voraussetzung gemäß, relative Primzahlen, folglich muß $\beta = 1$ sein, und dann ist $n = \nu\beta = \nu$.

Eben so beweist man auch, daß $n = \nu$ sein müsse, wenn $\frac{a}{n} - \frac{\alpha}{\nu} =$ einer ganzen Zahl ist.

Zusatz 1.

Sind also die Brüche $\frac{a}{n}$ und $\frac{\alpha}{\nu}$ zur kleinsten Benennung gebracht, und n von ν verschieden, so kann weder $\frac{a}{n} + \frac{\alpha}{\nu}$ noch $\frac{a}{n} - \frac{\alpha}{\nu}$ eine ganze Zahl sein.

Zusatz 2.

Setzt man $s \mp \frac{a}{n} = \frac{\alpha}{\nu}$, wo s eine ganze Zahl bezeichnet, $\frac{a}{n}$ und $\frac{\alpha}{\nu}$ aber zwei zur kleinsten Benennung gebrachte Brüche sein sollen, so folgt $s = \frac{\alpha}{\nu} \pm \frac{a}{n}$, also muß $\nu = n$ sein, d. h. wenn man von einer ganzen Zahl s einen zur kleinsten Benennung gebrachten Bruch $\frac{a}{n}$ abzieht, oder dazu addirt, so hat das Resultat, wenn es ebenfalls zur kleinsten Benennung gebracht wird, nothwendig denselben Nenner n.

§. 92.

Aufgabe.

Gegebene Brüche mit einander zu multipliciren.

Auflösung.

1. Wie ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werde, ist §. 87, 2, gezeigt worden.

2. Hat man eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl zu multipliciren, so verwandle man jene erst in einen unechten Bruch, und verfahre dann wie Nro. 1; oder man multiplicire zuerst den Bruch mit dem gegebenen Multiplikator, ziehe die Ganzen heraus, und addire diese zum Produkte aus dem Multiplikator in die Ganzen des Multiplikands. Z. B.:

$$4\tfrac{3}{5} \times 7 = \tfrac{23}{5} \times 7 = \tfrac{161}{5} = 32\tfrac{1}{5},$$

oder

$$4\tfrac{3}{5} \times 7 = \tfrac{3}{5} \times 7 + 4 \,.\, 7 = \tfrac{21}{5} + 28 = 4\tfrac{1}{5} + 28 = 32\tfrac{1}{5}.$$

Eben so ist

$$\left(a + \frac{2 \,.\, b}{5m}\right) . \, 7m = \frac{5am + 2b}{5m} \,.\, 7m = \frac{(5am + 2b)\, 7m}{5m}$$

$$= \frac{(5am + 2b)\, 7}{5} = \frac{35am + 14b}{5} = 7am + \frac{14b}{5}, \text{ oder}$$

$$\left(a + \frac{2b}{5m}\right) . \, 7m = 7am + \frac{14b}{5}.$$

3. Ist eine ganze Zahl A durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ zu multipliciren, so multiplicire man A mit dem Zähler m, und dividire das Produkt durch den Nenner n; nämlich es ist $A \,.\, \frac{m}{n} = \frac{Am}{n}$. Denn nach §. 25 entsteht das Produkt aus dem Multiplikand A eben so, wie der Multiplikator $\frac{m}{n}$ aus der Einheit entsteht. Nun entsteht aber $\frac{m}{n}$ aus der Einheit, wenn man diese durch n dividirt, und den Quotienten $\frac{1}{n}$ mit m multiplicirt; also ist auch

$$A \,.\, \frac{m}{n} = \frac{A}{n} \times m = \frac{Am}{n}.$$

4. Ist in der Gleichung $A \,.\, \frac{m}{n} = \frac{Am}{n}$ der Faktor A ein Bruch, z. B. $A = \frac{p}{q}$, so erhält man durch Substitution

$$\frac{p}{p} \cdot \frac{m}{n} = \frac{\frac{p}{q} \cdot m}{n} = \frac{pm}{q} : n = \frac{pm}{qn} \text{ (§. 87, 3)};$$

d. h. zwei Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividirt; z. B.:

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14} \text{ (§. 87).}$$

Eben so ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf};$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Es ist am zweckmäßigsten, die Zähler und Nenner der gegebenen Faktoren noch vor der Multiplikation gegen einander abzukürzen. Z. B.:

$$\frac{a^3}{2b^2} \cdot \frac{6b}{a^2 - x^2} \cdot \frac{a + x}{3a^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a - x} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b(a - x)}.$$

5. Sind gemischte Zahlen mit einander zu multipliciren, so richte man dieselben ein, und verfahre nach der vorhergehenden Regel, oder man verfahre wie bei der Multiplikation komplexer Größen (§. 52); z. B.:

$$4\tfrac{3}{5} \times 7\tfrac{2}{7} = \tfrac{23}{5} \cdot \tfrac{51}{7} = \tfrac{1173}{35} = 33\tfrac{18}{35} \text{ und}$$

$$\left(a + \frac{2m}{n}\right)\left(a - \frac{3m}{2n}\right) = \frac{an + 2m}{n} \times \frac{2an - 3m}{2n}$$

$$= \frac{(an + 2m)(2an - 3m)}{2n^2} = \frac{2a^2n^2 - 3amn + 4amn - 6m^2}{2n^2}$$

$$= \frac{2a^2n^2 + amn - 6m^2}{2n^2} = a^2 + \frac{m(an - 6m)}{2n^2} \text{ oder}$$

$$\left(a + \frac{2m}{n}\right)\left(a - \frac{3m}{2n}\right) = a^2 - \frac{3am}{2n} + \frac{2am}{n} - \frac{6m^2}{2n^2}$$

$$= a^2 - \frac{3am}{2n} + \frac{4am}{2n} - \frac{6m^2}{2n^2} = a^2 + \frac{am}{2n} - \frac{3m^2}{n^2}$$

$$= a^2 + \frac{amn}{2n^2} - \frac{6m^2}{2n^2} = a^2 + \frac{m(an - 6m)}{2n^2}.$$

Zusatz 1.

Ist $a < b$, so ist $\frac{a}{b} < 1$, also ein echter Bruch; daher auch

$$A \cdot \frac{a}{b} < A \cdot 1, \text{ d. i. } A \cdot \frac{a}{b} < A,$$

es mag A eine ganze oder gebrochene Zahl bedeuten. Multiplicirt man demnach was immer für eine Zahl durch einen echten Bruch, so ist das Produkt immer kleiner als der Multiplikand. Sind also beide Fakto-

ren echte Brüche, so ist das Produkt kleiner als jeder derselben. Hieraus folgt zugleich, daß ein echter Bruch immer kleiner und kleiner werde, auf eine je höhere Potenz derselbe erhoben wird.

Zusatz 2.

Es seien $\frac{a}{n}$ und $\frac{\alpha}{\nu}$ zwei zur kleinsten Benennung gebrachte Brüche, und $\frac{a}{n} \cdot \frac{\alpha}{\nu} = p =$ einer ganzen Zahl, so muß nach (§. 70) n ein Faktor von α, und ν ein Faktor von a sein; n und ν müssen aber relative Primzahlen sein. Ist aber das Produkt $\frac{a}{n} \cdot \frac{\alpha}{\nu}$ eine ganze Zahl, so kann weder $\frac{a}{n} + \frac{\alpha}{\nu}$ noch $\frac{a}{n} - \frac{\alpha}{\nu}$ eine ganze Zahl sein (§. 91, Zus. 1).

Ist $\frac{a}{n} + \frac{\alpha}{\nu}$ oder $\frac{a}{n} - \frac{\alpha}{\nu}$ eine ganze Zahl, so muß $n = \nu$ sein, und dann kann das Produkt $\frac{a}{n} \cdot \frac{\alpha}{\nu} = \frac{a\alpha}{n^2}$ unmöglich eine ganze Zahl bezeichnen, weil n gegen a und α zugleich Primzahl ist.

Die Summe oder der Unterschied und das Produkt zweier zur kleinsten Benennung gebrachten gemeinen Brüche können demnach nicht zu gleicher Zeit ganze Zahlen sein.

§. 93.

Aufgabe.

Gebrochene Zahlen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Es sei A was immer für eine Zahl, so muß, wenn $A : \frac{a}{b} = x$ gesetzt wird, $A = \frac{a}{b} \cdot x = \frac{ax}{b}$ sein (§. 32, 3); also auch

$$A \cdot b = \frac{ax}{b} \cdot b = ax, \text{ mithin } x = \frac{Ab}{a},$$

und dieser Werth in die erste Gleichung gesetzt, gibt

$$A : \frac{a}{b} = \frac{Ab}{a} = A \cdot \frac{b}{a};$$

d. h. was immer für eine Zahl A wird durch einen Bruch

$\frac{a}{b}$ dividirt, wenn man den Dividend A mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

Ist $A = \frac{p}{q}$, so ist $\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \frac{p}{q} \times \frac{b}{a} = \frac{bp}{aq}$, oder, da $\frac{bp}{aq} = bp : aq = \frac{bp}{ab} : \frac{aq}{ab} = \frac{p}{a} : \frac{q}{b} = \frac{p : a}{q : b}$ ist, auch

$$\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \frac{p : a}{q : b}.$$

Die in dieser Gleichung enthaltene Regel übersetze der Anfänger in die gewöhnliche Wortsprache, und versuche dieselbe direkt abzuleiten.

Da auf diese Art die Division der Brüche auf die Multiplikation zurückgeführt wird, so ist es überflüssig, die einzelnen Fälle anzuführen, die Statt finden können; und es wird genügen, einige Beispiele anzuführen.

I. $\frac{5}{7} : 2\frac{1}{3} = \frac{5}{7} : \frac{7}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{49}.$

II. $\frac{a}{b} : \left(a - \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} : \frac{an - m}{n} = \frac{an}{b\,(an - m)}.$

III. $\frac{15\,(a^2 - x^2)}{8\,x^3} : \left(a - \frac{x^2}{a}\right) = \frac{15\,(a^2 - x^2)}{8\,x^3} : \frac{a^2 - x^2}{a}$

$= \frac{15\,a\,(a^2 - x^2)}{8\,x^3\,(a^2 - x^2)} = \frac{15\,a}{8\,x^3}.$

IV. $54 : 3\frac{3}{7} = 54 : \frac{24}{7} = 54 \cdot \frac{7}{24} = \frac{54 \cdot 7}{24} = \frac{9 \cdot 7}{4} = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}.$

V. $a^2 : \left(a + \frac{x}{a}\right) = a^2 : \frac{a^2 + x}{a} = \frac{a^3}{a^2 + x}.$

VI. $3\,x\left(m^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) : \left(6\,m - \frac{6\,n}{x}\right) = \frac{1}{2}\,(m\,x + n).$

VII. $\frac{4}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4 : 2}{15 : 3} = \frac{2}{5}.$

VIII. $\frac{12\,a^2}{35\,m^3\,n^2} : \frac{3\,a}{5\,m^2\,n} = \frac{12\,a^2 : 3\,a}{35\,m^3\,n^2 : 5\,m^2\,n} = \frac{4\,a}{7\,m\,n}.$

Zusatz 1.

Hat man eine gemischte Zahl durch eine ganze zu dividiren, so dividire man zuerst die Ganzen des Dividends durch den gegebenen Divisor, verwandle den Rest mit dem angehängten Bruche in einen unechten Bruch und multiplicire den Nenner desselben mit dem gegebenen Divisor, so erhält man den verlangten Quotienten. Z. B.:

$17\frac{3}{4} : 5 = 3 + 2\frac{3}{4} : 5 = 3 + \frac{11}{4 \cdot 5} = 3\frac{11}{20}$ und

$\left(3\,a + \frac{x}{m}\right) : 2\,a = 1 + \left(a + \frac{x}{m}\right) : 2\,a = 1 + \frac{a\,m + x}{2\,a \cdot m}.$

Zusatz 2.

Ist $a < b$, so ist $\frac{a}{b} < 1$, also ein echter Bruch, und daher

$$A : \frac{a}{b} > A : 1 \text{ (§. 59, 3), nämlich } \left(A : \frac{a}{b}\right) > A;$$

d. h. was immer für eine Zahl durch einen echten Bruch dividirt, gibt einen Quotienten, der größer als der Dividend ist.

Zusatz 3.

Sei $A : B = A : (a\,b\,c\,d) = q + \frac{R}{B}$; ferner

$$A : a = m + \frac{r}{a}, \text{ also } A = a\,m + r;$$

$$m : b = n + \frac{r_1}{b}, \quad „ \quad m = b\,n + r_1;$$

$$n : c = p + \frac{r_2}{c}, \quad „ \quad n = c\,p + r_2;$$

$$p : d = q + \frac{r_3}{d}, \quad „ \quad p = d\,q + r_3;$$

so findet man durch allmälige Substitutionen

$$\begin{aligned} A &= a\,(b\,n + r_1) + r = a\,b\,n + a\,r_1 + r \\ &= a\,b\,(c\,p + r_2) + a\,r_1 + r = a\,b\,c\,p + a\,b\,r_2 + a\,r_1 + r \\ &= a\,b\,c\,(d\,q + r_3) + a\,b\,r_2 + a\,r_1 + r \\ &= a\,b\,c\,d\,q + a\,b\,c\,r_3 + a\,b\,r_2 + a\,r_1 + r, \end{aligned}$$

also

$$A : (a\,b\,c\,d) = q + \frac{a\,b\,c\,r_3 + a\,b\,r_2 + a\,r_1 + r}{a\,b\,c\,d}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} R &= a\,b\,c\,r_3 + a\,b\,r_2 + a\,r_1 + r \\ &= a\,(b\,c\,r_3 + b\,r_2 + r_1) + r \\ &= a\,[b\,(c\,r_3 + r_2) + r_1] + r, \end{aligned}$$

woraus die Giltigkeit der (§. 42, Nr. 2) aufgestellten Regel von selbst erhellt.

B. Von den Decimal-Brüchen.

§. 94.

Die allgemeine Form eines Decimalbruches (§. 88) ist

$$\frac{A}{10^m} = A \,.\, 10^{-m} \text{ (§. 55, 8)},$$

wo A und m beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Die zehntheiligen Brüche unterscheiden sich von den gemeinen Brüchen auch schon der äußeren Form nach, indem bei jenen nur der Zähler angeschrieben, der Nenner aber dadurch ausgedrückt wird, daß man im Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern als Decimalen (§. 16) abschneidet, wie viele Nullen im Nenner enthalten sind. Hat der Zähler nicht so viele Stellen, als der Nenner Nullen, oder der Exponent des Nenners Einheiten hat, so ergänzt man die fehlenden Stellen durch Nullen. Setzt man z. B. in der allgemeinen Form $\frac{A}{10^m}$ den Zähler $A = 17$, und nach und nach $m = 1, = 2, = 3, =$ 2c., so erhält man

$$\frac{17}{10} = 17 \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 7,\ \frac{17}{100} = \frac{17}{10^2} = 17 \cdot 10^{-2} = \cdot 17,$$

$$\frac{17}{1000} = \frac{17}{10^3} = 17 \cdot 10^{-3} = \cdot 017,\ \frac{17}{10^4} = 17 \cdot 10^{-4} = \cdot 0017,$$

u. s. w.

Man erkennt demnach an dem Exponenten m, wie viele Decimalstellen im Zähler A abgeschnitten werden müssen. Eine Decimalziffer heißt Decimalstelle der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung, je nachdem sie in der ersten, zweiten, dritten, ... Stelle rechts vom Absonderungszeichen steht. Die Zahl, welche anzeigt, die wievielste Stelle eine bestimmte Decimale a einnimmt, heißt Index (Anzeiger). Ist demnach n der Index der Decimalziffer a, so ist diese von der n^{ten} Ordnung, und ihr Werth

$$= \frac{a}{10^n} = a \cdot 10^{-n}.$$

§. 95.

1. Bezeichnet man die Ziffern, mit welchen ein Decimalbruch geschrieben ist, der Ordnung nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, so läßt sich derselbe durch folgende allgemeine Form ausdrücken:

$$\frac{\alpha}{10^1} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \frac{\delta}{10^4} + \ldots + \frac{\omega}{10^n}$$

$$= \alpha \cdot 10^{-1} + \beta \cdot 10^{-2} + \gamma \cdot 10^{-3} + \delta \cdot 10^{-4} + \ldots + \omega \cdot 10^{-n}.$$

Also ist der Ausdruck

$$z \cdot 10^{m-1} + y \cdot 10^{m-2} + \ldots +$$
$$+ c \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + E + \alpha \cdot 10^{-1} + \beta \cdot 10^{-2} + \gamma \cdot 10^{-3}$$
$$+ \delta \cdot 10^{-4} + \ldots + \chi \cdot 10^{-(n-2)} + \psi \cdot 10^{-(n-1)} + \omega \cdot 10^{-n}$$

die allgemeine Form einer jeden Zahl im dekadischen Systeme, wo E die Ziffer der Einser, a, b, c, ... die Zehner, Hunderte, Tausende,

u. s. w., und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ die Zehntel, Hunderttel, Tausendtel, u. s. f. bezeichnen. Diese Buchstaben-Coefficienten bedeuten demnach lauter einzifferige Zahlen, und der ganze Ausdruck bezeichnet eine Zahl, die m Ziffern für die Ganzen, und n Decimalstellen enthält (§. 54).

2. Diese Zahl schreibt man in bestimmten Fällen auf folgende Art:

$$z\,y\,x \ldots d\,c\,b\,a\,E \cdot \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \ldots \chi\,\psi\,\omega,$$

oder, indem man den primitiven Einheiten E den Zeiger 0 gibt:

$$\overbrace{z}^{m-1}\;\overbrace{y}^{m-2}\;\overbrace{x}^{m-3}\ldots\overbrace{d}^{4}\,\overbrace{c}^{3}\,\overbrace{b}^{2}\,\overbrace{a}^{1}\,\overbrace{E}^{0}\,\overbrace{\alpha}^{-1}\,\overbrace{\beta}^{-2}\,\overbrace{\gamma}^{3}\,\overbrace{\delta}^{-4}\ldots\overbrace{\chi}^{-(n-2)}\;\overbrace{\psi}^{-(n-1)}\;\overbrace{\omega}^{-n},$$

denn so wie $z \cdot 10^{m-1}$ oder die m^{te} Stelle von der Rechten gegen die Linke (vom Absonderungszeichen an) kurz durch $\overbrace{z}^{m-1}$ richtig bezeichnet wird, eben so zweckmäßig und richtig drückt man $\frac{\omega}{10^n} = \omega \,.\, 10^{-n}$ kurz durch $\overbrace{\omega}^{-n}$ aus, indem man also der Ziffer ω einen negativen Zeiger gibt.

3. Man sieht übrigens sehr leicht ein, daß es in jedem bestimmten Falle hinreichend ist, eine einzige Ziffer mit ihrem zugehörigen Zeiger zu versehen, und daß dann selbst das Absonderungszeichen überflüssig wird. So z. B. ist

$$2594{\cdot}768 = 259\overbrace{4}^{0}768 = 2\overbrace{5}^{3}94768 = 259476\overbrace{8}^{-3} = 2594\overbrace{7}^{-1}68 = \text{ꝛc.}$$

4. Nach §. 87, 4, ist die Decimalzahl:

$$c \,.\, 10^3 + b \,.\, 10^2 + a \,.\, 10 + E + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \ldots$$

$$+ \frac{\psi}{10^{n-1}} + \frac{\omega}{10^n} = c \,.\, 10^3 + b \,.\, 10^2 + a \,.\, 10 + E + \frac{\alpha \,.\, 10^{n-1}}{10^n}$$

$$+ \frac{\beta \,.\, 10^{n-2}}{10^n} + \frac{\gamma \,.\, 10^{n-3}}{10^n} + \ldots + \frac{\psi \,.\, 10}{10^n} + \frac{\omega}{10^n} = \frac{c \,.\, 10^{n+3}}{10^n}$$

$$+ \frac{b \,.\, 10^{n+2}}{10^n} + \frac{a \,.\, 10^{n+1}}{10^n} + \frac{E \,.\, 10^n}{10^n} + \frac{\alpha \,.\, 10^{n-1}}{10^n} + \frac{\beta \,.\, 10^{n-2}}{10^n}$$

$$+ \frac{\gamma \,.\, 10^{n-3}}{10^n} + \ldots + \frac{\psi \,.\, 10'}{10^n} + \frac{\omega}{10^n} =$$

$$= \frac{c \,.\, 10^{n+3} + b \,.\, 10^{n+2} + a \,.\, 10^{n+1} + E \,.\, 10^n + \alpha \,.\, 10^{n-1} + \beta \,.\, 10^{n-2} \ldots + \omega}{10^n}.$$

5. Hierin liegt der Grund der im §. 16 gegebenen Regel für die Numeration der Decimalzahlen. Da ferner $\frac{A}{10^m} = \frac{A \,.\, 10^n}{10^{m+n}}$, so wird dadurch die Giltigkeit des §. 18 Gesagten bestätiget; es wird nämlich der Werth eines Decimalbruches nicht geändert, wenn man

demselben rechts beliebig viele Nullen beifügt; man ändert dadurch also bloß die Benennung des Bruches.

§. 96.

Aufgabe.

Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

Man hänge dem Zähler rechts eine beliebige Anzahl von Nullen an, dividire diesen so geänderten Dividend durch den ungeänderten Nenner, und schneide im Quotienten so viele Decimalstellen ab, wie viele Nullen dem Zähler angehängt worden sind. Geht die Division auf, so ist der gefundene Decimalbruch dem gegebenen gemeinen Bruche vollkommen gleich. In den meisten Fällen geht zwar jene Division nicht auf, allein man kann durch fortgesetzte Operation sich dem wahren Werthe des gegebenen Bruches ohne Ende nähern; d. h. man kann einen Decimalbruch finden, der von dem gegebenen Bruche unendlich wenig abweicht, oder nur um eine Größe unterschieden ist, die kleiner als jede mögliche angebbare Zahl ist. In praktischen Fällen aber gibt es gewisse Grenzen, über welche man nicht hinaus zu gehen braucht, um das Resultat irgend einer Aufgabe mit hinlänglicher Genauigkeit anzugeben.

Beweis.

1. Sei $\frac{Z}{N}$ der gegebene Bruch. Es ist

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z \cdot 10^n}{N \cdot 10^n} = \frac{Z \cdot 10^n : N}{10^n} = \frac{Q}{10^n} = Q \cdot 10^{-n},$$

wenn man den Quotienten $\frac{Z \cdot 10^n}{N} = Q$ setzt.

2. Ist der Bruch $\frac{Z}{N}$ zur kleinsten Benennung gebracht, d. i, sind Z und N Primzahlen gegen einander, so kann der Quotient $Q = \frac{Z \cdot 10^n}{N}$ nur dann eine ganze Zahl sein, wenn 10^n durch N theilbar ist: da aber $10 = 2 \cdot 5$, also $10^n = (2 \cdot 5)^n$, so ist 10^n durch N nur dann theilbar, wenn N entweder eine Potenz von 2 oder von 5, oder endlich ein Produkt aus Potenzen von 2 und 5 ist; wenn also allgemein

$N = 2^\alpha \,.\, 5^\beta$ ist, wo α und β ganze positive Zahlen bezeichnen. In diesen Fällen erhält man also für $\frac{Z}{N}$ einen Decimalbruch mit einer bestimmten Anzahl von Ziffern, oder einen endlichen Decimalbruch. In allen andern Fällen kann Q niemals eine ganze Zahl werden, d. i. der Werth von $\frac{Z}{N}$ kann durch Decimalen nur näherungsweise gefunden werden, oder man erhält für $\frac{Z}{N}$ einen Decimalbruch mit einer unbegrenzten Anzahl von Ziffern, oder einen unendlichen Decimalbruch.

3. Ist $Z \,.\, 10^n$ durch N nicht theilbar, so ist Q eine gemischte Zahl. Man setze demnach $\frac{Z \,.\, 10^n}{N} = Q = P + \frac{R}{N}$, wo $R < N$, oder $\frac{R}{N}$ ein echter Bruch ist. Aus der Gleichung $\frac{Z \,.\, 10^n}{N} = P + \frac{R}{N}$ folgt, wenn man durch 10^n dividirt, $\frac{Z}{N} = \frac{P}{10^n} + \frac{R}{N \,.\, 10^n}$. Da nun, der Voraussetzung gemäß $\frac{R}{N} < 1$, also auch $\frac{R}{N \,.\, 10^n} < \frac{1}{10^n}$, so wird der Bruch $\frac{R}{N \,.\, 10^n}$ immer kleiner und kleiner, je größer n wird, d. i. der Bruch $\frac{Z}{N}$ nähert sich dem Werthe $\frac{P}{0^n}$ ohne Ende. Setzt man n unendlich groß, nämlich $n = \infty$, so wird $\frac{R}{N \,.\, 10^n}$ unendlich klein, und demnach $\frac{Z}{N}$ gleich $\frac{P}{10^n}$ ohne merklichen Fehler.

Um auszudrücken, daß A dem Werthe B sich ohne Ende nähere, oder daß A dem B ohne bedeutenden Fehler gleich gesetzt werden könne, wollen wir in der Folge $A \doteq B$ schreiben, und nur die vollkommene Gleichheit der Quantität nach durch = andeuten. Es ist demnach hier

$$\frac{Z}{N} \doteq \frac{P}{10^n}.$$

Beispiele.

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot 0 : 4 = \cdot 75$$
$$\cdot 20$$

$$\frac{7}{8} = 7 \cdot 0 : 8 = \cdot 875$$
$$\cdot 60$$
$$040$$

$$\frac{19}{5} = 19 : 5 = 3 \cdot 8.$$
$$4 \cdot 0$$

Hat man dem Zähler rechts einige Nullen als Decimalstellen angehängt, so läßt sich nach §. 38, 8, immer im Voraus beurtheilen, in welcher Decimalstelle die erste bedeutende Ziffer des Quotienten erscheine.

$$\frac{27}{512} = 27{\cdot}00 : 512 = {\cdot}052734375.$$

$$\begin{array}{l} 140_0 \\ \quad 376_0 \\ \quad\quad 176_0 \\ \quad\quad\quad 224_0 \\ \quad\quad\quad\quad 192_0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 384_0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 256_0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ,,,,,,,, \end{array}$$

$$\frac{317}{64000} = 317{\cdot}000 : 64000 = {\cdot}004953125.$$

Daß man auf die Nullen des Divisors, sobald der Lokalwerth der höchsten Stelle des Quotienten ausgemittelt ist, keine Rücksicht mehr bei der Division zu nehmen hat, ist leicht einzusehen.

$$\frac{29}{36} = 29{\cdot}0 : 36 = {\cdot}80555 \ldots$$

Will man nur einige Stellen des Quotienten beibehalten (deren Anzahl immer die Natur der Aufgabe bestimmt), so vermehre man die letzte beibehaltene Stelle um eine Einheit, wenn die darauf folgende (die erste weggelassene) Stelle nicht kleiner als 5 ist, weil man dadurch den Fehler vermindert, wie für sich einleuchtend ist.

§. 97

1. Wenn N und 10 relative Primzahlen sind, und man dividirt die auf einander folgenden Potenzen von 10 durch die gegebene ganze Zahl N, so können höchstens (N — 1) verschiedene Reste bleiben, und der erste sich wiederholende Rest muß nothwendig = 1 sein.

Denn es sei

$$\begin{aligned} 1 = 10^0 &= 0 \,.\, N + 1 \\ 10^1 &= \alpha \,.\, N + r_1 \\ 10^2 &= \beta \,.\, N + r_2 \\ 10^3 &= \gamma \,.\, N + r_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 10^m &= \mu \,.\, N + r_m \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 10^{n-1} &= \psi \,.\, N + r_{n-1} \\ 10^n &= \omega \,.\, N + r_n \end{aligned}$$

und es sei r_n der erste sich wiederholende Rest. Wäre nun r_n nicht $= 1$, sondern etwa $= r_m$, so hätte man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 10^n &= \omega \,.\, N + r_m \\ 10^m &= \mu \,.\, N + r_m \text{, also durch Subtraction} \\ \hline 10^n - 10^m &= (\omega - \mu) \,.\, N, \end{aligned}$$

wo $m < n$ vorausgesetzt ist; mithin

$$10^m (10^{n-m} - 1) = (\omega - \mu) N = q N, \text{ also}$$

$$\frac{10^m (10^{n-m} - 1)}{N} = q = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Weil aber 10^m und N relative Primzahlen sind, so müßte $10^{n-m} - 1$ durch N theilbar sein, nämlich

$$\frac{10^{n-m} - 1}{N} = q' = \text{einer ganzen Zahl;}$$

mithin wäre

$$\frac{10^{n-m}}{N} = q' + \frac{1}{N},$$

d. i. 10^{n-m} durch N getheilt, würde den Rest 1 lassen, mithin wäre nicht r_n sondern $r_{n-m} = 1$ der erste sich wiederholende Rest, was unserer Voraussetzung widerspricht. Es muß also $r_n = 1$ sein, und da $10 \,.\, r_n = 10 \,.\, 1 = 10$ den nächsten Partialdividend bildet; so ist der zweite sich wiederholende Rest $r_{n+1} = r_1$, und eben so folgt dann $r_{n+2} = r_2$, $r_{n+3} = r_3$, $r_{n+4} = r_4$, u. s. f., d. h. alle früheren Reste 1, r_1, r_2, r_3, . . . r_{n-1} erscheinen nothwendig wieder in derselben Ordnung, folglich müssen auch die Quotienten α, β, γ, δ . . . genau in derselben Ordnung wiederkehren.

Die n Reste 1, r_1, r_2, r_3, . . . r_{n-1} müssen demnach sämmtlich von einander verschieden sein.

2. Den auf diese Art für $\frac{Z}{N}$ gefundenen unendlichen Decimalbruch nennt man einen periodischen Decimalbruch, und die Ziffernreihe, welche sich stets in derselben Ordnung wiederholt, wird die Periode des Bruches genannt. So z. B. ist

$\frac{15}{37} = 0{\cdot}405405405$ . . . ohne Ende, wo 405 die Periode bildet.

Ist die Periode nur einzifferig, wie in $\frac{2}{3} = 0{\cdot}666$ . . ., wo die Periode $= 6$ ist, so heißt man den Bruch auch einen wiederholenden. Ist die Periode nur einzifferig, so setzt man auf die wiederholende Ziffer einen Punkt: ist sie aber mehrzifferig, so setzt man über die erste und letzte Ziffer einen Punkt, um kurz anzudeuten, daß der

Bruch periodisch sei. Man schreibt nämlich in den beiden vorigen Beispielen

$$\tfrac{2}{3} = 0{\cdot}666\ldots = 0{\cdot}\dot{6} \text{ und } \tfrac{15}{37} = 0{\cdot}405405\ldots = 0{\cdot}\dot{4}0\dot{5}.$$

3. Sei nun N gegen 10^n eine Primzahl, und man bezeichne die durch Entwicklung des Quotienten $\frac{10^n}{N}$ entstehende Periode, die r Ziffern enthalten mag, durch P, so ist

$$\frac{1}{N} = \frac{P}{10^r} + \frac{P}{10^{2r}} + \frac{P}{10^{3r}} + \ldots \text{ also}$$

$$\frac{Z}{N} = \frac{ZP}{10^r} + \frac{ZP}{10^{2r}} + \frac{ZP}{10^{3r}} + \ldots = \frac{P'}{10^r} + \frac{P'}{10^{2r}} + \frac{P'}{10^{3r}} + \ldots$$

ohne Ende.

Die Periode P bricht ab, wenn man bei der Division mit N in 10^n wieder auf den Rest $= 1$ kommt, und die Periode $ZP = P'$ bricht ab, wenn bei der Division mit N in $Z \,.\, 10^r$ der erste Rest wieder erscheint, nämlich der Rest, welcher bei der Division mit N in $Z \,.\, 10$ blieb.

Ist $\frac{Z}{N}$ ein echter Bruch, so ist, weil $\frac{ZP}{10^r} < \frac{Z}{N} < 1$ ist, nothwendig $ZP < 10^r$; übrigens ist für sich klar, daß, weil bei der Division mit N in 10^n unserer Annahme gemäß r verschiedene Reste bleiben, die Periode P immer r Stellen einnehmen müsse, und daß daher wenn P oder auch ZP nicht so viele Stellen haben sollte, die fehlenden durch links vorgesetzte Nullen ersetzt werden müssen. So z. B. ist

$$1{\cdot}_{000} : 101 = 0{,}0099,$$
$$910$$
$${\cdot}1$$

also ist hier $P = 0099$; nämlich es ist

$$\frac{1}{101} = 0{,}00990099\ \ldots = 0.\dot{0}09\dot{9}, \text{ mithin}$$

$$\frac{47}{101} = 47 \,.\, \frac{1}{101} = 47 \times 0{\cdot}\dot{0}09\dot{9} = 0\dot{4}65\dot{3} = \frac{4653}{10^4} + \frac{4653}{10^8} + \frac{4653}{10^{12}} + \ldots$$

4. Da man $\frac{10^n}{N} = P + \frac{1}{N}$ erhält, oder da, weil wir angenommen haben, daß die Periode r Stellen habe, $\frac{10^r}{N} = P + \frac{1}{N}$ ist, so finden wir $P = \frac{10^r}{N} - \frac{1}{N} = \frac{10^r - 1}{N}$. Es muß also N stets ein Faktor von $(10^r - 1)$ sein, und weil $(10^r - 1)$ eine mit r Nennern geschriebene Zahl bezeichnet, so läßt sich immer im Voraus bestimmen,

welche Zahlen eine r zifferige Periode geben. Ist nämlich r die kleinste Zahl, für welche ($10^r - 1$) durch a, b, c, ... theilbar wird, so geben a, b, c, .. auch r stellige Perioden. Nun ist

$10^1 - 1 = 9$, und die Divisoren hiervon sind 3 und 9,
$10^2 - 1 = 99$, „ „ „ „ 3, 9, 11, 33 u. 99,
$10^3 - 1 = 999$, „ „ „ „ 3, 9, 27, 37, 111, 333 und 999
$10^4 - 1 = 9999$, „ „ „ „ 3, 9, 11, 33, 99, 101, 303, 909, 1111, 3333 und 9999
$10^5 - 1 = 99999$, und die Divisoren hiervon sind 3, 9, 41, 123, 271, 369, 813, 2439, 11111, 33333 und 99999,

folglich gibt 3 eine 1zifferige Periode, und es ist P = 3
„ „ 9 „ „ „ „ „ „ P = 1
„ „ 11 „ 2zifferige „ „ „ „ P = 09
„ „ 33 „ „ „ „ „ „ P = 03
„ „ 99 „ „ „ „ „ „ P = 01
„ „ 27 „ 3zifferige „ „ „ „ P = 037
„ „ 37 „ „ „ „ „ „ P = 027
„ „ 111 „ „ „ „ „ „ P = 009
„ „ 333 „ „ „ „ „ „ P = 003
„ „ 999 „ „ „ „ „ „ P = 001

Auf ähnliche Art geben die Divisoren 101, 303, 909, 1111, 3333 und 9999 vierzifferige Perioden, die Divisoren 41, 123, 271, 369, 813, 2439, 11111, 33333 und 99999 fünfstellige Perioden 2c.

5. Wenn N eine absolute Primzahl ist, so muß die Anzahl der n verschiedenen Reste 1, r_1, r_2, r_3, . . . r_{n-1}, mithin auch die Anzahl der Ziffern der Periode, stets ein aliquoter Theil von N — 1 sein, oder so ist $\frac{N-1}{n}$ immer eine ganze Zahl.

Denn die möglichen Reste seien

$$1, 2, 3, 4, \ldots a, b, c, \ldots (N-2), (N-1).$$

Werden diese durch die n wirklichen Reste

$$1, r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1} \text{ erschöpft,}$$

d. h. ist in dieser Reihe jeder Rest aus der vorigen Zahlenreihe enthalten, so muß n = N — 1 sein, und der Satz ist für sich klar.

Kommen nicht alle Zahlen aus der Reihe der möglichen Reste in jener der wirklichen Reste vor, ist z. B. die Zahl a nicht in der Reihe 1, r_1, r_2 r_3, . . . enthalten, so findet man, weil

$$10^n = \omega N + 1 \text{ (nach 1) ist,}$$
$$a \,.\, 10^n = a\,\omega N + a,$$

d. h. wenn man die auf einander folgenden Produkte

$$a \,.\, 10^0,\ a \,.\, 10^1,\ a \,.\, 10^2,\ a \,.\, 10^3, \ldots$$

durch N dividirt, so ist die $(n + 1)^{te}$ Differenz der erste sich wiederholende Rest, der demnach bei fortgesetzter Rechnung nach je $(n + 1)$ Divisionen wieder zum Vorscheine kommen muß. Die bei dieser Operation gefundenen n Reste, die wir mit $R_0, R_1, R_2, R_3, \ldots R_{n-1}$ bezeichnen wollen, sind nicht allein unter sich verschieden (wovon man sich auf dieselbe Art überzeugen kann, wie im Zus. 1), sondern auch verschieden von den Resten $1, r_1, r_2, r_3, \ldots$, die sich bei der Division $10^n : N$ ergeben. Denn würde z. B. $r_m = R_p$ sein, wo $m < p < n$ sein soll, so müßte, weil $a \,.\, 10^p = Q \,.\, N + R_p$ und $10^m = \mu N + r_m$ ist, $a \,.\, 10^p - 10^m = (Q - \mu)\, N$ sein, also auch

$$a \,.\, 10^{p-m} - 1 = \frac{(Q - \mu)\, N}{10^m} = \frac{Q - \mu}{10^m} \,.\, N = \varrho \,.\, N,$$

oder $a \,.\, 10^{p-m} = \varrho \,.\, N + 1$, wenn Kürze halber $\frac{Q - \mu}{10^m} = \varrho =$ einer ganzen Zahl gesetzt wird. Es müßte sonach $a \,.\, 10^{p-m} : N$ den Rest 1 geben, und demnach müßten, bei fortgesetzter Division, der Ordnung nach die Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$ erscheinen; man würde also nicht mehr auf den Rest $R_0 = a$ kommen, was mit dem vorhin Gesagten im direkten Widerspruche steht. Es sind also die n Reste

$$R_0, R_1, R_2, R_3, \ldots R_{n-1}$$

sämmtlich unter sich und von den n Resten

$$1, r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$$

verschieden. Finden sich demnach in der Zahlenreihe

$$1, r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}, R_0, R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$$

sämmtliche möglichen Reste

$$1, 2, 3, \ldots a, b, c, \ldots (N - 2), (N - 1),$$

so ist die Anzahl $2n = N - 1$, also $n = \frac{N - 1}{2}$. Kommen aber in der ersten Zahlenreihe nicht alle ganzen Zahlen vor, die $< N$ sind, erscheint also daselbst z. B. die Zahl b nicht, so folgt wieder aus der Gleichung $10^n = \omega \,.\, N + 1$ durch Multiplikation $b \,.\, 10^n = b\,\omega N + b$, d. h. wenn man die Zahlen $b \,.\, 10^0$, $b \,.\, 10^1$, $b \,.\, 10^2$, $b \,.\, 10^3, \ldots$ der Ordnung nach durch N dividirt, so ist b der erste sich wiederholende Rest, der demnach bei fortgesetzter Operation nach je $(n + 1)$ Divisionen erscheint. Es muß daher auch hier wieder n verschiedene Reste

geben, und wenn diese mit den frühern von ihnen verschiedenen $2n$ Resten alle möglichen Reste erschöpfen, so ist $3n = N - 1$, also $n = \frac{N-1}{3}$. Im entgegengesetzten Falle wird man wieder einen der noch nicht vorgekommenen Reste nehmen, und mit ihm wie früher verfahren, bis man endlich alle Reste erschöpft hat. Durch Wiederholung dieses Schlusses muß man demnach endlich $n . \omega = N - 1$, also $n = \frac{N-1}{\omega}$ erhalten; d. h. die Anzahl der verschiedenen Reste, die man findet, indem man $10^0, 10^1, 10^2, \ldots 10^n$ durch N dividirt, ist stets ein aliquoter Theil von $(N - 1)$.

6. Enthält der Nenner N eine Potenz von 2 oder von 5, oder endlich ein Produkt aus einer Potenz von 2 in eine Potenz von 5, ist also allgemein $N = 2^\alpha . 5^\beta . N'$, wo N' weder 2 noch 5 als Faktor mehr enthalten soll, so wird die Periode nicht mit der ersten, sondern mit einer spätern Decimale beginnen.

Es ist nämlich hier, wenn man $\alpha > \beta$ nimmt,

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{2^\alpha 5^\beta N'} = \frac{5^{\alpha-\beta} Z}{2^\alpha 5^\alpha N'} = \frac{5^{\alpha-\beta} Z}{10^\alpha N'} \text{ (§. 51, Zus. 4) } = \frac{1}{10^\alpha} . \frac{5^{\alpha-\beta} Z}{N'}.$$

Setzt man nun

$$\frac{5^{\alpha-\beta} Z}{N'} = Q + \frac{R}{N'},$$

wo $R < N'$ sein soll, und gibt $\frac{1}{N'}$ die r stellige Periode P, so daß

$$\frac{1}{N'} = \frac{P}{10^r} + \frac{P}{10^{2r}} + \ldots, \text{ also}$$

$$\frac{R}{N'} = \frac{RP}{10^r} + \frac{RP}{10^{2r}} + \frac{RP}{10^{3r}} + \ldots$$

wird, so erhält man

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{10^\alpha} . \frac{5^{\alpha-\beta} Z}{N'} = \frac{1}{10^\alpha} \left(Q + \frac{R}{N}\right),$$

oder durch Substitution

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{10^\alpha} \left(Q + \frac{RP}{10^r} + \frac{RP}{10^{2r}} + \frac{RP}{10^{3r}} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{Q}{10^\alpha} + \frac{RP}{10^{\alpha+r}} + \frac{RP}{10^{\alpha+2r}} + \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

wo demnach die Periode erst in der $(\alpha + 1)^{ten}$ Decimalstelle beginnt oder wo der Periode α Decimalstellen vorausgehen. Wäre aber $\beta > \alpha$, so würde man Zähler und Nenner des vorgelegten Bruches

mit $2\beta-\alpha$ multipliciren, und man würde auf dieselbe Art finden, daß der Periode in diesem Falle β Decimalstellen vorangehen.

Sollte man z. B. den Bruch $\frac{523}{740}$ in einen Decimalbruch verwandelt, so findet man

$$\frac{523}{740}=\frac{523}{2^2.5.37}=\frac{2615}{2^2.5^2.37}=\frac{1}{10^2}.\frac{2615}{37}=\frac{1}{10^2}(70+\tfrac{25}{37}),$$

und da 37 die Periode P = 027 gibt, also RP = 25.027 = 675 ist, so wird

$$\frac{523}{740}=\frac{1}{10^2}\left(70+\frac{675}{10^3}+\frac{675}{10^6}+\ldots\right)=\frac{70}{10^2}+\frac{675}{10^5}+\frac{675}{10^6}+\ldots.$$
$$=0\cdot70675.$$

§. 98.

Aufgabe.

Einen gegebenen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch von gleichem Werthe zu verwandeln.

Auflösung.

Ist der gegebene Bruch ein endlicher Decimalbruch, so schreibe man ihn in der Form eines gemeinen Bruches an, und dividire den Zähler und den Nenner desselben durch das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen, um den Bruch in der einfachsten Gestalt zu erhalten. Ist aber der gegebene Bruch ein unendlicher Decimalbruch, so beginnt die Periode entweder gleich mit der ersten Decimale, oder mit einer spätern Stelle. Nehmen wir nun an, die Periode sei P′ = ZP und habe r Stellen, so ist, wenn wir den gesuchten Bruch durch $\frac{Z}{N}$ bezeichnen, im ersten Falle

$$\frac{Z}{N}=\frac{ZP}{10^r}+\frac{ZP}{10^{2r}}+\frac{ZP}{10^{3r}}+\ldots=\frac{P'}{10^r}+\frac{P'}{10^{2r}}+\frac{P'}{10^{3r}}+\ldots$$

also ist (nach §. 97, 3)

$$P=\frac{10^r-1}{N}=(10^r-1).\frac{1}{N}, \text{ folglich}$$

$$\frac{P}{10^r-1}=\frac{1}{N} \text{ und } \frac{PZ}{10^r-1}=\frac{Z}{N}, \text{ oder } \frac{Z}{N}=\frac{P'}{10^r-1}.$$

Die Periode P′ ist demnach der Zähler und (10^r-1), d. i. eine Zahl, die mit eben so vielen Neunern geschrieben ist, als die Periode Stellen hat, bildet den Nenner des gesuchten Bruches.

Im zweiten Falle sollen der Periode α Decimalstellen vorausgehen, so ist

$$\frac{Z'}{N'} = \frac{Q}{10^\alpha} + \frac{Z'P}{10^{\alpha+r}} + \frac{Z'P}{10^{\alpha+2r}} + \frac{Z'P}{10^{\alpha+3r}} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{Q}{10^\alpha} + \frac{1}{10^\alpha}\left[\frac{Z'P}{10^r} + \frac{Z'P}{10^{2r}} + \frac{Z'P}{10^{3r}} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{Q}{10^\alpha} + \frac{1}{10^\alpha} \cdot \frac{PZ'}{10^r - 1} \text{ (nach dem ersten Falle), folglich ist}$$

$$\frac{Z'}{N'} = \frac{Q\,(10^r - 1) + PZ'}{10^\alpha\,(10^r - 1)} = \frac{Q\,.\,10^r + PZ' - Q}{10^\alpha\,(10^r - 1)} = \frac{Q\,.\,10^r + P'' - Q}{(10^r - 1)\,.\,10^\alpha}.$$

Es ist aber $Q\,.\,10^r + P''$ der Zähler des gegebenen Decimalbruches, wenn die Periode nur einmal geschrieben wird, und Q ist die der Periode vorausgehende Zahl, folglich wird ein periodischer Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man vom Zähler desselben (indem man die Periode nur einmal schreibt) die der Periode vorausgehende Zahl abzieht, und den Unterschied durch eine Zahl dividirt, die mit so vielen Neunern geschrieben ist, als die Periode Stellen hat, und so vielen rechts folgenden Nullen, als der Periode Ziffern vorausgehen.

Daß sich der so gefundene Bruch in vielen Fällen abkürzen läßt, versteht sich von selbst.

Beispiele.

I. $0{\cdot}454545\ldots = 0{\cdot}\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$, denn hier ist $PZ = 45$ und $r = 2$.

II. $0{\cdot}58333\ldots = 0{\cdot}58\dot{3} = \frac{583 - 58}{9\,.\,100} = \frac{525}{900} = \frac{7}{12}$, denn hier ist $r = 1$, $\alpha = 2$, $P'' = 3$, $Q = 58$, also

$$Z' = Q\,.\,10^r + P'' - Q = (58\,.\,10 + 3) - 58 = 583 - 58 = 525$$
$$\text{und } N' = (10 - 1)\,10^2 = 9\,.\,100 = 900.$$

III. $0{\cdot}\dot{4}2857\dot{1} = \frac{428571}{999999} = \frac{3}{7}$.

IV. $0{\cdot}55\dot{4}8\dot{1} = \frac{55481 - 55}{999\,.\,100} = \frac{55426}{99900} = \frac{749}{1350}$.

§. 99.

Aufgabe.

Gegebene Decimalbrüche zu addiren, oder von einander abzuziehen.

Auflösung.

Man setze die zu addirenden oder zu subtrahirenden Brüche nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit unter einander, und verfahre dann wie bei ganzen Zahlen. Daß man die bei einer Decimalzahl rechts fehlenden Stellen durch Nullen ergänzen könne, erhellt aus §. 95. Uebrigens denkt man sich bloß diese Nullen beigefügt.

Beispiele.

I. $47{\cdot}037 + 2{\cdot}45 + {\cdot}87346 + 7328{\cdot}9$.

Man setze wie folgt:

$$\begin{array}{r} 47{\cdot}037 \\ 2{\cdot}45 \\ 0{\cdot}87346 \\ 7328{\cdot}9 \\ \hline 7379{\cdot}26046. \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{rl} 39{\cdot}84\,.. & \text{Minuend,} \\ -\,7{\cdot}5687 & \text{Subtrahend,} \\ \hline 32{\cdot}2713 & \text{Rest.} \end{array}$$

III. $83{\cdot}7 + 5{\cdot}28 - 12{\cdot}746 - 9{\cdot}38 + 90{\cdot}4007 - 25{\cdot}3 - 100{\cdot}6234$.

Man stelle die Rechnung also:

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} 83{\cdot}7 \\ 5{\cdot}28 \\ 90{\cdot}4007 \end{array}\right\} & \text{Summanden,} \\ \hline 179{\cdot}3807 & \text{Summe.} \\ \left.\begin{array}{r} 12{\cdot}746\,. \\ 9{\cdot}38\,.. \\ 25{\cdot}3\,... \\ 100{\cdot}6234 \end{array}\right\} & \text{Subtrahende,} \\ \hline 31{\cdot}3313 & \text{Rest.} \end{array}$$

§. 100.

Aufgabe.

Einen Decimalbruch mit irgend einer gegebenen Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

1. Es ist

$$\frac{A}{10^n} \cdot B = \frac{A\,B}{10^n},$$

d. h. ein Decimalbruch wird mit einer ganzen Zahl B multiplicirt, wenn man im Produkte aus dem Zähler des Decimalbruches in die ganze Zahl B, von der Rechten gegen die Linke, eben so viele Decimalen abschneidet, als im Multiplicande vorhanden sind.

2. Es ist

$$\frac{A}{10^n} \cdot 10^r = \frac{A}{10^{n-r}} \text{ (§. 87, 1).}$$

Ist nun $n > r$, so hat das Produkt $n - r$ Decimalziffern, ist aber $n = r$, so ist das Produkt dem Zähler des Multiplikands gleich, also eine ganze Zahl. Ist endlich $n < r$, und zwar $r - n = \alpha$, so werden dem Zähler A rechts α Nullen beigefügt. Es wird demnach ein Decimalbruch mit einer Potenz von 10 multiplicirt, wenn man den Decimalpunkt um eben so viele Stellen gegen die Rechte fortrückt, als der Exponent r jener Potenz anzeigt. Hat der Decimalbruch nicht so viele Stellen, so werden die fehlenden mit Nullen besetzt. So z. B. ist $3{\cdot}245 \times 10^2 = 324{\cdot}5$ und $3{\cdot}245 \times 10^5 = 324500$.

3. Es ist

$$\frac{A}{10^n} \cdot \frac{1}{10^r} = \frac{A}{10^n} : 10^r = \frac{A}{10^{n+r}},$$

d. h. ein Decimalbruch wird mit $\frac{1}{10^r}$ multiplicirt, oder durch eine Potenz von 10 dividirt, wenn man den Decimalpunkt um so viele Stellen gegen die Linke fortrückt, als der Exponent r Einheiten hat, wobei die fehlenden Stellen wieder mit Nullen zu besetzen sind. So z. B. ist

$$368{\cdot}25 \times \frac{1}{10^2} = 368{\cdot}25 : 10^2 = 3{\cdot}6825 \text{ und}$$

$$7{\cdot}348 \times \frac{1}{10^3} = 7{\cdot}348 : 10^3 = 0{\cdot}007348.$$

4. Es ist

$$\frac{A}{10^n} \cdot \frac{B}{10^r} = \frac{AB}{10^{n+r}},$$

d. h. zwei Decimalbrüche werden mit einander multiplicirt, wenn man im Produkte AB der Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Decimalstellen abschneidet, als in beiden Faktoren zugleich vorhanden sind. Daß die fehlenden Stellen auch hier wieder mit Nullen zu besetzen sind, versteht sich von selbst. So z. B. ist

$$0{\cdot}08 \times 0{\cdot}3 = 0{\cdot}024,$$
$$0{\cdot}327 \times 1{\cdot}2 = 0{\cdot}3924,$$
$$2{\cdot}045 + 0{\cdot}0037 = 0{\cdot}0075665.$$

5. Hat man den Decimalbruch $\frac{A}{10^n}$ mit einem gemeinen Bruche $\frac{a}{b}$ zu multipliciren, so erhält man

$$\frac{A}{10^n} \times \frac{a}{b} = \frac{A a}{b \,.\, 10^n} = \frac{A a : b}{10^n} = \frac{A a}{10^n} : b,$$

oder, man verwandle $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch, so wird dann

$$\frac{A}{10^n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{A}{10^n} \cdot \frac{Z}{10^r} = \frac{A Z}{10^{n+r}}$$

wenn man $\frac{a}{b} = \frac{Z}{10^r}$ setzt. So z. B. ist

$$3{\cdot}708 \times \tfrac{3}{4} = \frac{3{\cdot}708{\cdot}3}{4} = \frac{1\,{\cdot}124}{4} = \frac{11{\cdot}124.25}{100} = \frac{278{\cdot}1}{100} = 2{\cdot}781,$$

$$\text{oder } 3{\cdot}708 \times 0{\cdot}75 = 2{\cdot}78100 = 2{\cdot}781.$$

§. 101.

Regeln für die abgekürzte Multiplikation.

In praktischen Fällen ist es gewöhnlich hinlänglich, das Produkt mehrerer Decimalfaktoren nur auf einige Stellen genau zu finden, deren Anzahl jedoch nach der Natur der Aufgabe beurtheilt werden muß. Damit man nun im Produkte nicht mehr Decimalstellen erhalte, als gerade die Zweckmäßigkeit des Kalküls erfordert, so verfahre man auf folgende Art:

1. Man setze die Ziffer der Einser des Multiplikators unter diejenige Decimalstelle des Multiplikands, welche im Produkte noch vorkommen soll; die übrigen Ziffern des Multiplikators lasse man in umgekehrter Ordnung folgen.

2. Hat der Multiplikator rechts oder links leere Stellen über sich, so besetze man diese mit Nullen; links ist eine Nulle hinreichend.

3. Endlich verfahre man wie §. 41.

Beispiele.

I. Man soll das Produkt

$$705{\cdot}632 \times 384{\cdot}57648$$

nur mit zwei Decimalen angeben. Man setze also

```
     ,
  384·57648
   23·6507
 ----------
  26920354
    192288
     23074
      1154
        77
 ----------
 271369·47·
```

II. Man soll das Produkt

$$2632{\cdot}435 \times 7.80934$$

mit vier Decimalen suchen. Man setze, wie folgt:

```
   ,
 7·80934„„          oder         2632·435„
   5342362                         43 9087
 ----------                      ----------
 156186800                       18427 0450
  46856040                        2105 9480
   2342802                          23 6919
    156187                            7897
     31237                            1053
      2343                       ----------
       390                       20557·5799.
 ----------
 20557·5799
```

III. Man soll das Produkt

$$30{\cdot}4765328 \times {\cdot}0000867$$

mit sechs Decimalen angeben.

30·4765328	oder auch	·0000867
768.....		7403
2438		2601
183		35
21		6
·002642		·002642.

§. 102.

Aufgabe.

Decimalbrüche durch beliebige Zahlen zu dividiren.

Auflösung.

1. Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000, . . . dividirt wenn man den Decimalpunkt um 1, 2, 3, . . . Stellen links schiebt. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Natur des dekadischen Systemes, und aus der Gleichung

$$\frac{A}{10^n} : 10^r = \frac{A}{10^{n+r}}.$$

2. Es ist $\frac{M}{10^m} : \frac{N}{10^n} = \frac{M : N}{10^m : 10^n} = \frac{M : N}{10^{m-n}}$ (§. 93). Hier kommen zwei Hauptfälle in Betrachtung, denn entweder ist M durch N theilbar oder nicht.

A. Im ersten Falle setze man $\frac{M}{N} = Q$, so ist $\frac{M}{10^m} : \frac{N}{10^n} = \frac{Q}{10^{m-n}}$, wo entweder $m > n$, oder $m = n$, oder endlich $m < n$.

1) Ist $m > n$, so ist $m - n$ positiv, und z. B. $= p$, also $\frac{Q}{10^{m-n}} = \frac{Q}{10^p}$; d. h. man dividire die Zähler der beiden Decimalbrüche durch einander, und schneide im Quotienten so viele Stellen ab, als der Ueberschuß der Anzahl der Decimalziffern im Dividend über jene im Divisor Einheiten enthält. Z B.:

$${\cdot}72 : {\cdot}6 = 1{\cdot}2,\ 1{\cdot}728 : {\cdot}8 = 2{\cdot}16.$$

2) Ist m = n, so ist $\frac{Q}{10^{m-n}} = \frac{Q}{10^0} = Q$; d. h. haben Dividend und Divisor gleichviele Decimalen, so ist der Quotient eine ganze Zahl, die gefunden wird, wenn man den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors theilt. Z. B.:

$$\cdot 48 : \cdot 06 = 8,\ 3\cdot 12 : \cdot 13 = 24.$$

3. Ist endlich $m < n$, so ist $m - n$ negativ, und z. B. $= -p$, also $\frac{Q}{10^{m-n}} = \frac{Q}{10^{-p}} = Q \cdot 10^p$; d, h. hat der Divisor mehr Decimalstellen als der Dividend, so ist der Quotient eine ganze Zahl, die gefunden wird, wenn man dem Quotienten aus dem Zähler des Theilers in den Zähler des Dividends rechts so viele Nullen beifügt, als der Divisor mehr Decimalstellen hat wie der Dividend. Z. B.:

$$9\cdot 6 : \cdot 12 = 80,\ 372\cdot : \cdot 31 = 1200.$$

B. Ist M durch N nicht theilbar, so setze man $\frac{M}{N} = \frac{Q}{10^r}$, und dann ist

$$\frac{M}{10^m} : \frac{N}{10^n} = \frac{Q}{10^r} \cdot \frac{1}{10^{m-n}} = \frac{Q}{10^{m+r-n}}.$$

Es lassen sich demnach auch hier die unter A aufgestellten Regeln anwenden, wenn man zur Anzahl der Decimalen des Dividends $\frac{M}{10^m}$ die Anzahl r der Decimalen des Quotienten $\frac{M}{N}$ addirt.

Beispiele.

I. $72\cdot 345 : 8 = 9\cdot 043125.$

II. $346\cdot 25 : 6\cdot 48 = 53\cdot 4336 \ldots$

III. Es ist endlich

$$\frac{A}{10^n} : \frac{a}{b} = \frac{A}{10^n} \cdot \frac{b}{a} = \frac{A\,b}{10^n} : a,$$

oder, wenn man $\frac{a}{b} = \frac{Z}{10^r}$ setzt,

$$\frac{A}{10^n} : \frac{a}{b} = \frac{A}{10^n} : \frac{Z}{10^r} = \frac{A : Z}{10^{n-r}},$$

und nun hat man den vorigen Fall. So z. B.

$$45\cdot 708 : \tfrac{4}{7} = 45\cdot 708 \times \tfrac{7}{4} = 11\cdot 427 \times 7 = 79\cdot 989,$$

oder auch $45\cdot 708 : \frac{4}{7} = \frac{319\cdot 956}{4} = 79\cdot 989$, oder

$$45{\cdot}708 : \tfrac{4}{7} = 45{\cdot}708 : 0{\cdot}571428 = 79{\cdot}989$$

oder es ist endlich

$$45{\cdot}708 : \tfrac{4}{7} = 45{\cdot}708 \times \tfrac{7}{4} = 45{\cdot}708 \times 1{\cdot}75 = 79{\cdot}989,$$

wenn man sich mit 3 Decimalstellen im Quotienten begnügt.

3. Die vorstehenden Regeln kann man in folgende allgemeine Regel zusammenfassen, welche für den praktischen Gebrauch die zweckmäßigste ist:

Man untersuche, unter welche Stelle des Dividends die Ziffer der Einser des Divisors bei der ersten Division zu stehen kommt, wo dann aus dem Lokalwerthe jener Stelle der Lokalwerth der höchsten Ziffer im Quotienten erkannt, und dadurch die Anzahl der Ziffern für die Ganzen des Quotienten bestimmt wird. Endlich dividire man (nachdem nöthigen Falls dem Dividende rechts eine Anzahl Nullen angehängt worden) wie in ganzen Zahlen, und schneide im Resultate von der Linken gegen die Rechte die gehörige Anzahl Ziffern für die Ganzen ab. Uebrigens kann man auch, weil

$$\frac{A}{10^m} : \frac{B}{10^n} = \frac{A}{10^m} \cdot 10^n : B = \frac{A}{10^{m-n}} : B$$

ist, den Divisor stets auf eine ganze Zahl B zurückführen, und dann hat die Rechnung ohnehin gar keine Schwierigkeit.

Beispiele.

I. 325·478 : 0·43 = 756·92558 . . . Weil hier die 4 des Divisors unter die 2 des Dividends kommt, so kommt die Stelle der Einser (nämlich die Null) des Divisors unter die 3, d. i. unter die Stelle der Hunderte des Dividends; demnach erhält man drei Stellen für die Ganzen im Quotienten.

II. 6794·289 : 4206·25 = 1·615 . . . .

III. 7·30825 : 805·42 = ·00907 . . . denn hier kommen die Einser des Divisors unter die Tausendtel des Dividends bei der ersten Division.

IV. 38·72568 : 0·006084 = 6365·167 . . . denn dividirt man den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors, so kommt die 6 des Divisors unter die Einser (die 8) des Dividends; die Einser (Null) des Divisors (als Decimalbruch) stehen aber um drei Stellen links von der 6, demnach kommen die Einser des Divisors unter die

Tausende des Dividends (indem man demselben links zwei Nullen angehängt denkt) zu stehen. Also nehmen die Ganzen vier Stellen im Quotienten ein.

§. 103.

Die Regeln für die abgekürzte Division mit Decimalzahlen sind dieselben, wie §. 43, indem man noch auf Nro. 3 des vorigen Paragraphes gehörige Rücksicht nimmt.

Beispiele.

I. Den Quotienten 729·45689 : 8·06435 mit drei Decimalen anzugeben. Man setze wie folgt:

729·456,89 : 8,0,6,4,3,5 = 90·454 . . .
„3 664
438
35

Da im Quotienten zwei Stellen für die Ganzen erscheinen müssen, so hat man in Allem fünf Stellen zu suchen.

II. Den Quotienten 6308·42563 : 7296·845 bis zur vierten Decimale zu bestimmen.

Da der Quotient hier mit Zehnteln beginnt, so setze man also

6308·4,2563 : 7,2,9,6,·845 = ·8645 . . .
4710
332
40
4

III. Man suche den Quotienten 37·846 : 6074·358 bis auf die fünfte Decimale. Da hier die erste bedeutende Ziffer des Quotienten erst in der dritten Decimale erscheint, so hat man nur drei Stellen zu suchen. Man setze demnach, wie folgt:

37·846 : 6,0,7,4·358 = ·00623 . . .
1 40
19
1

IV. Der Quotient 47768·7235 : 83·4 soll mit den Tausendteln abbrechen. Man dividire demnach, weil drei Stellen für die Ganzen kommen müssen, erst viermal auf gewöhnliche Art; nämlich:

$$
\begin{array}{l}
47768{\cdot}72{,}35 : 8{,}3{,}{\cdot}4 = 572{\cdot}766\ldots \\
\;\;6068 \\
\;\;\;\;2307 \\
\;\;\;\;\;\;6392 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;554 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;53 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2
\end{array}
$$

V. Der Quotient ·0037628 : 0·000087235 soll mit drei Decimalstellen angegeben werden. Da hier zwei Stellen für die Ganzen erscheinen müssen, so hat man in Allem fünf Stellen zu suchen. Man setze demnach

$$
\begin{array}{l}
{\cdot}0037628_0 : {\cdot}00008{,}7{,}2{,}3{,}5 = 43{\cdot}134\ldots \\
\;\;\;\;2734_0 \\
\;\;\;\;\;\;1169 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;297 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;35
\end{array}
$$

§. 104.

Aufgabe.

Eine gegebene Zahl N aufzulösen in ein Produkt von der Form

$$a\left(1+\frac{\alpha}{10^r}\right)\left(1+\frac{\beta}{10^{r+1}}\right)\left(1+\frac{\gamma}{10^{r+2}}\right)\left(1+\frac{\delta}{10^{r+3}}\right)\ldots$$

oder

$$a(1+\alpha\,.\,10^{-r})\,(1+\beta\,.\,10^{-r-1})\,(1+\gamma\,.\,10^{-r-2})\,(1+\delta\,.\,10^{-r-3})\ldots$$

Auflösung.

Sei $N = a + b + c + d \ldots + x + y + z$. Da nun

$$a + b = a\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

$$a + b + c = (a+b)\left(1+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$= a\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{a+b}\right),$$

$$a + b + c + d = (a + b + c)\left(1 + \frac{d}{a + b + c}\right)$$

$$= a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{a+b}\right)\left(1 + \frac{d}{a+b+c}\right),$$

so erhält man

$$N = a + b + c + d + \ldots + x + y + z$$

$$= a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{a + b}\right)\left(1 + \frac{d}{a + b + c}\right) \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left(1 + \frac{y}{a + b + \ldots + x}\right)\left(1 + \frac{z}{a + b + c + \ldots + x + y}\right)$$

Uebrigens muß man bei der Anwendung auf praktische Fälle die Rechnung immer so einrichten, daß die Brüche

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a + b}, \frac{d}{a + b + c}, \ldots$$

jedes Mal die Form $\frac{\alpha}{10^n}$ erhalten, wo α bloß eine einzifferige Zahl bezeichnet, indem man nämlich immer nur eine bedeutende Ziffer im Quotienten sucht. Man zerlege auf diese Art z. B. die Zahl 589 in Faktoren. Man setze

$$589 = 500 + 89 = 500\left(1 + \frac{0{\cdot}89}{5}\right); \text{ ferner}$$

$$1 + \frac{0{\cdot}89}{5} = (1 + 0{\cdot}1)\,\alpha = 1{\cdot}1\,\alpha, \text{ also}$$

$$\alpha = \left(1 + \frac{0{\cdot}89}{5}\right) : 1{\cdot}1 = \frac{5{\cdot}89}{5{\cdot}5} = 1 + \frac{0{\cdot}39}{5{\cdot}5} = (1 + 0{\cdot}07)\,.\,\beta = 1{\cdot}07\,\beta,$$

mithin

$$\beta = \frac{5{\cdot}89}{5{\cdot}5} : 1{\cdot}07 = \frac{5{\cdot}89}{5{\cdot}885} = 1 + \frac{{\cdot}005}{5{\cdot}885} = (1 + 0{\cdot}0008)\,\gamma = 1{\cdot}0008\cdot\gamma,$$

folglich

$$\gamma = \frac{5{\cdot}89}{5{\cdot}885} : 1{\cdot}0008 = \frac{5{\cdot}89}{5{\cdot}889708} = 1 + \frac{0{\cdot}000292}{5{\cdot}889708} = (1 + 0{\cdot}00004)\,\delta$$

$$= 1{\cdot}00004\,.\,\delta,$$

und

$$\delta = \frac{5{\cdot}89}{5{\cdot}889708} : 1{\cdot}00004 = \frac{5{\cdot}89}{5{\cdot}88994358832} = 1 + \frac{0{\cdot}00005641168}{5{\cdot}88994358832}$$

$$= (1 + 0{\cdot}000009)\,\varepsilon,$$

u. s. w., folglich erhält man durch Substitution

$$589 = 500\left(1 + \frac{0{\cdot}89}{5}\right) = 500\ (1\cdot1)\ \gamma$$
$$= 500\ (1\cdot1)(1{\cdot}07)\ \beta = 500(1\cdot1)\ (1{\cdot}07)\ (1{\cdot}0008)\ \gamma$$
$$= 500\ (1\cdot1)\ (1{\cdot}07)\ (1{\cdot}0008)\ (1{\cdot}00004)\ \delta,$$

oder $589 = 500\ (1\cdot1)\ (1{\cdot}07)\ (1{\cdot}0008)\ (1{\cdot}00004)\ (1{\cdot}000009)\ \ldots$

Je mehr solche Faktoren man nimmt, desto näher wird das Produkt derselben der gegebenen Zahl kommen. Uebrigens ist einleuchtend, daß man auch

$$589 = 580 + 9 = 580\left(1 + \frac{0{\cdot}9}{58}\right) = \text{rc},$$

hätte setzen können.

§. 105.

Anmerkung. Auf ähnliche Art lassen sich auch die sogenannten sechzigtheiligen oder Sexagesimalbrüche, nämlich die Brüche von der Form $\frac{A}{60^n}$, wo A eine beliebige ganze Zahl ausdrückt, behandeln. Auch diese Brüche schreibt man gewöhnlich ohne Nenner, indem man

$$\frac{A}{60^n} = A\ .\ 60^{-n} = \overset{-n}{A} = A^{(n)}$$

setzt. So z. B.

$$\frac{48}{60} = 48.60^{\,-1} = 48^{-1} = 48'; \frac{48}{60^2} = 48{\cdot}60^{-2} = 48^{-2} = 48'';$$
$$\frac{48}{60^3} = 48.60^{-3} = 48^{-3} = 48'''; \text{ u. s. w.}$$

Die Exposition dieser Materie wollen wir dem mündlichen Vortrage überlassen.

C. Von den Kettenbrüchen.

§. 106.

Erklärungen.

1. Ein Bruch, dessen Nenner aus zwei Theilen besteht, wovon der eine Theil eine ganze Zahl, der andere aber ein Bruch ist, dessen Nenner, wenn er nicht der letzte ist, wieder eben so beschaffen ist, heißt ein zusammenhängender oder continuirlicher Bruch,

oder ein Kettenbruch. Ein solcher Bruch hat daher im Allgemeinen die Form:

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\dots}}}} \qquad \text{oder auch } k+\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\dots}}}}$$

wobei α, β, γ, δ, . . und a, b, c, d, . . . was immer für Größen sein können. Allein unter diesen Brüchen sind für die Ausübung vorzüglich diejenigen bemerkenswerth, bei welchen alle Zähler α, β, γ, δ, . . . der Einheit gleich sind, und alle Nenner a, b, c, d, . . . ganze positive oder negative Zahlen bezeichnen, weßhalb wir uns hier ausschließend mit diesen Kettenbrüchen beschäftigen wollen. Ihre allgemeine Form ist demnach folgende:

$$k+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+}}}} \qquad \text{oder} \qquad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+}}}} \qquad \text{für } k=0$$

2. Die einzelnen Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$..., durch deren Verknüpfung der Kettenbruch erhalten wird, nennt man die Glieder des Kettenbruches; und die Zahlen, welche die Rangordnung derselben bezeichnen, heißen Indices oder Ordnungszahlen.

3. Hat der Kettenbruch eine begränzte Anzahl von Gliedern, so heißt er ein endlicher, sonst aber ein unendlicher, und die letztern sind gewöhnlich periodische Kettenbrüche, d. h. solche, bei welchen eine bestimmte Anzahl von Gliedern immer in derselben Ordnung wiederkehrt. So z. B. ist

$$k+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}}} \qquad \text{ein endlicher,}$$

$$k+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\dots}}}}}}} \qquad \text{und} \qquad k+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\dots+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\dots+\cfrac{1}{n+\dots}}}}}}}}}$$

sind unendliche, und zwar periodische Kettenbrüche. Den letzten Kettenbruch nennt man auch einen gemischten periodischen Kettenbruch.

4. Nimmt man von einem Kettenbruche nur das erste, oder die zwei, drei, u. s. w., allgemein die r ersten Glieder, vernachläßiget

alle folgenden Glieder, und verwandelt erstere in gemeine Brüche von gleichem Werthe, so heißen diese gemeinen Brüche die reducirten Werthe des Kettenbruches, oder Partialbrüche, welche letztere Benennung aber nicht die zweckmäßigste ist.

Ist nun der Kettenbruch

$$u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \dots}}}$$

gegeben, und bezeichnet man die reducirten Werthe der Ordnung nach durch

$$\frac{Z_0}{N_0}, \frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \dots\dots \frac{Z_r}{N_r},$$

so ist

$$\frac{Z_0}{N_0} = u_0 = \frac{u_0}{1}; \frac{Z_1}{N_1} = u_0 + \frac{1}{u_1}; \frac{Z_2}{N_2} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2}};$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3}}}; \text{ u. s. w.}$$

allgemein $\frac{Z_r}{N_r} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \dots + \cfrac{1}{u_{r-1} + \cfrac{1}{u_r}}}}}.$

§. 107.

Entstehung der Kettenbrüche.

Es sei

$A = u_0 B + \alpha$, wo $\alpha < B$ ist, also $\frac{A}{B} = u_0 + \frac{\alpha}{B}$

$B = u_1 \alpha + \beta$, „ $\beta < \alpha$ „ „ $\frac{B}{\alpha} = u_1 + \frac{\beta}{\alpha}$

$\alpha = u_2 \beta + \gamma$, „ $\gamma < \beta$ „ „ $\frac{\alpha}{\beta} = u_2 + \frac{\gamma}{\beta}$

$\beta = u_3 \gamma + \delta$, „ $\delta < \gamma$ „ „ $\frac{\beta}{\gamma} = u_3 + \frac{\delta}{\gamma}$

$\gamma = u_4 \delta + \varepsilon$, „ $\varepsilon < \delta$ „ , $\frac{\gamma}{\delta} = u_4 + \frac{\varepsilon}{\delta}$

. . . .

$\chi = u_{n-2} \psi + \omega$, wo $\omega < \psi$ ist, also $\frac{\chi}{\psi} = u_{n-2} + \frac{\omega}{\psi}$

$\psi = u_{n-1} \omega + 1$, „ $1 < \omega$ „ „ $\frac{\psi}{\omega} = u_{n-1} + \frac{1}{\omega} = u_{n-1} + \frac{1}{u_n}$,

wenn $\omega = u_n$ gesetzt wird.

Man erhält demnach durch allmäliges Substituiren:

$$\frac{A}{B} = u_0 + \frac{\alpha}{B} = u_0 + \frac{1}{B : \alpha} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{\beta}{\alpha}} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{\alpha : \beta}} =$$

$$= u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{\gamma}{\beta}}} = \ldots\ldots\ldots$$

$$= u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ldots\ldots + \cfrac{1}{u_{n-2} + \cfrac{1}{u_{n-1} + \cfrac{1}{u_n.}}}}}}$$

Betrachten wir diese Rechnung näher, so sehen wir, daß wir bei den Brüchen $\frac{\alpha}{B}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\delta}{\gamma}$ u. s. w. jedesmal Zähler und Nenner durch den Zähler dividirt haben, um dem Nenner immer die Form einer zweitheiligen Größe zu verschaffen, welches immer möglich sein muß, indem wir den jedesmaligen Divisor durch den zugehörigen Rest dividiren, der Rest aber stets kleiner als der Divisor vorausgesetzt wird. Auch ist einleuchtend, daß man auf diese Art nothwendig auf den Rest $= 1$ kommen müsse, indem wir A und B immer als relative Primzahlen betrachten können.

Man sieht demnach, daß dies Verfahren mit dem §. 76, 2 angeführten ganz übereinstimmt, und daß man einen gemeinen Bruch $\frac{A}{B}$ in einen gleichgeltenden Kettenbruch verwandeln könne, wenn man zwischen A und B das größte gemeinschaftliche Maß aufsucht, die Quotienten u_0, u_1, u_2, u_3, . . . der Ordnung nach notirt, und dann den gegebenen Bruch

$$\frac{A}{B} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ldots\ldots}}}$$

setzt; nämlich gleich dem ersten Quotienten, $+ 1$ dividirt durch den zweiten Quotienten, $+ 1$ dividirt durch den dritten Quotienten, $+ 1$ u. s. w.

Ist $\frac{A}{B}$ ein ächter Bruch, also $A < B$, so wird $u_0 = 0$, und dann hat man

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ldots\ldots}}}$$

Ist aber $\frac{A}{B}$ ein unächter Bruch, also $A > B$, so erhält man außer der obigen Form auch

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{B:A}=\cfrac{1}{0+\cfrac{B}{A}}=\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{A:B}}=\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{u_0+\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{u_2+\ldots}}}}$$

folglich ist

$$\frac{A}{B}=u_0+\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{u_2+\cfrac{1}{u_3+\ldots}}}=\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{u_0+\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{u_2+\ldots}}}}$$

Wäre z. B. der gemeine Bruch $\frac{2509}{725}$ in einen Kettenbruch von gleichem Werthe zu verwandeln, so erhält man nach der oben angegebenen Rechnung

$$\frac{2509}{725}=3+\frac{334}{725}=3+\frac{1}{725:334}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{57}{334}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{334:57}}$$

$$=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{49}{57}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{57:49}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{8}{49}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{49:8}}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8}}}}}.$$

Sucht man zwischen 2509 und 725 das größte gemeinschaftliche Maß, so findet man (nach §. 76, 2)

725	2509	3
57	334	2
8	49	5
	1	1
		6
		8

und demnach wird, nach der obigen Regel,

$$\frac{2509}{725}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8}}}}}.\qquad \text{wie vorhin.}$$

Zusatz. Hätte man bei der Bestimmung der Quotienten im letzten Beispiele statt des Quotienten 5 lieber die Zahl 6 genommen, so hätte man die Quotienten 3, 2, 6 — 7 und — 8 erhalten, und demnach

$$\frac{2509}{725} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{-7 + \cfrac{1}{-8}}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{8}}}}$$

gefunden. Allgemein ist:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{(b+1) - \cfrac{1}{(c+1) + \cfrac{1}{d}}}},$$

und umgekehrt. Eben so findet man

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{(c+d) + \cfrac{1}{e}}}}$$

und umgekehrt.

§. 108.

Aufgabe.

Eine gegebene Menge von Gliedern eines Kettenbruches durch einen gemeinen oder gewöhnlichen Bruch auszudrücken, d. h. die auf einander folgenden reducirten Werthe eines vorgelegten Kettenbruches zu finden.

Auflösung.

Der gegebene Kettenbruch sei

$$u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \cfrac{1}{u_4 + \ldots\ldots}}}}$$

und die auf einander folgenden reducirten Werthe desselben seien

$$\frac{Z_0}{N_0}, \frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots\ldots$$

so erhält man

$$\frac{Z_0}{N_0} = u_0 = \frac{u_0}{1}, \quad \frac{Z_1}{N_1} = u_0 + \frac{1}{u_1} = \frac{u_0 u_1 + 1}{u_1};$$

nun entsteht $\frac{Z_2}{N_2}$ aus $\frac{Z_1}{N_1}$, wenn man in diesem $u_1 + \frac{1}{u_2}$ statt u_1 schreibt;

mithin ist

$$\frac{Z_2}{N_2} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2}} = \frac{u_0\left(u_1 + \frac{1}{u_2}\right) + 1}{u_1 + \frac{1}{u_2}} = \frac{u_0\, u_1\, u_2 + u_0 + u_2}{u_1\, u_2 + 1}$$

$$= \frac{u_2\,(u_0\, u_1 + 1) + u_0}{u_2\, u_1 + 1} = \frac{u_2\, Z_1 + Z_0}{u_2\, N_1 + N_0}.$$

Ferner entsteht $\frac{Z_3}{N_3}$ aus $\frac{Z_2}{N_2}$, wenn man $u_2 + \frac{1}{u_3}$ statt u_2 setzt folglich wird

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{u_0\, u_1\left(u_2 + \frac{1}{u_3}\right) + u_0 + u_2 + \frac{1}{u_3}}{u_1\left(u_2 + \frac{1}{u_3}\right) + 1}$$

$$= \frac{u_0\, u_1\, u_2\, u_3 + u_0\, u_1 + u_0\, u_3 + u_2\, u_3 + 1}{u_1\, u_2\, u_3 + u_1 + u_3}$$

$$= \frac{u_3\,(u_0\, u_1\, u_2 + u_0 + u_2) + (u_0\, u_1 + 1)}{u_3\,(u_1\, u_2 + 1) + u_1} = \frac{u_3\, Z_2 + Z_1}{u_3\, N_2 + N_1};$$

und auf ähnliche Art finden wir ferner, indem der Gang dieser Rechnung unveränderlich derselbe bleibt, so weit dieselbe auch fortgesetzt wird,

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{u_4\, Z_3 + Z_2}{u_4\, N_3 + N_2}, \quad \frac{Z_5}{N_5} = \frac{u_5\, Z_4 + Z_3}{u_5\, N_4 + N_3}, \text{ u. s. w.}$$

und allgemein

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{u_n\, Z_{n-1} + Z_{n-2}}{u_n\, N_{n-1} + N_{n-2}},$$

nämlich es ist allgemein

$$Z_n = u_n\, Z_{n-1} + Z_{n-2} \text{ und } N_n = u_n\, N_{n-1} + N_{n-2},$$

woraus ersichtlich ist, daß jeder reducirte Werth aus den beiden unmittelbar vorhergehenden nach einem leicht zu erkennenden Gesetze abgeleitet werden könne. Daß aber diese Regel wirklich allgemein gültig sei, läßt sich (nach §. 4, 4) auf folgende Art beweisen. Es sei der Werth von $\frac{Z_n}{N_n}$ durch obigen Ausdruck richtig dargestellt, so muß der Werth von $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ aus demselben hervorgehen, wenn man $u_n + \frac{1}{u_{n+1}}$ statt u_n schreibt; es wird nämlich

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{\left(u_n + \frac{1}{u_{n+1}}\right) . Z_{n-1} + Z_{n-2}}{\left(u_n + \frac{1}{u_{n+1}}\right) . N_{n-1} + N_{n-2}}$$

$$= \frac{u_n\, u_{n+1}\, Z_{n-1} + Z_{n-1} + u_{n+1}\, Z_{n-2}}{u_n\, u_{n+1}\, N_{n-1} + N_{n-1} + u_{n+1}\, N_{n-2}}$$

$$= \frac{u_{n+1}\, [u_n\, Z_{n-1} + Z_{n-2}] + Z_{n-1}}{u_{n+1}\, [u_n\, N_{n-1} + N_{n-2}] + N_{n-1}} = \frac{u_{n+1}\, Z_n + Z_{n-1}}{u_{n+1}\, N_n + N_{n-1}},$$

nämlich es wird

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{u_{n+1} . Z_n + Z_{n-1}}{u_{n+1} . N_n + N_{n-1}},$$

d. h. das oben angegebene Bildungsgesetz gilt auch für den $(n+1)^{ten}$ reducirten Werth, wenn es für den n^{ten} Partialbruch gültig ist. Nun haben wir aber oben gezeigt, daß jenes Gesetz für den dritten und vierten gültig sei, also gilt es auch für den fünften; gilt es aber für den fünften, so gilt es nach dem angeführten Beweise auch für den sechsten Werth, u. s. w. für alle folgenden Werthe; folglich ist jenes Bildungsgesetz allgemein wahr.

Für den Kettenbruch

$$a_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

findet man eben so:

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{b_n . Z_{n-1} + a_n . Z_{n-2}}{b_n . N_{n-1} + a_n . N_{n-2}}.$$

Man sieht hier zugleich, wie zweckmäßig es sei, mehrere auf einander folgende Größen derselben Art durch denselben Buchstaben auszudrücken, und ihre Verschiedenheit bloß durch angehängte Zeiger bemerkbar zu machen, durch welche letztere wir jedesmal beim bloßen Anblick der Größen ihre Rangordnung auf der Stelle erkennen.

Uebrigens ist für sich klar, daß, wenn ein Kettenbruch ein endlicher ist, der letzte reducirte Werth zugleich den gemeinen Bruch bezeichnet, welcher dem Werthe nach mit dem Kettenbruche einerlei ist, d. h. durch dessen Entwickelung der vorgelegte Kettenbruch entstanden gedacht werden kann.

Ist aber der vorgelegte Kettenbruch ein unendlicher, so ist es unmöglich, den numerischen Werth desselben durch einen gemeinen Bruch vollkommen genau darzustellen, weßhalb ein solcher unendlicher Kettenbruch stets eine unausrechenbare oder incommensurable, d. h. nicht vollkommen genau bestimmbare Größe bezeichnet, wovon wir uns bei einer spätern Gelegenheit vollkommen überzeugen werden.

Umgekehrt wird man durch die Entwicklung einer incommensurablen Größe in einen continuirlichen Bruch stets auf einen unendlichen Kettenbruch geleitet werden. Denn würde die Kette eine endliche sein, so könnte dieselbe in einen gemeinen Bruch von vollkommen gleichem Werthe verwandelt werden, und demnach wäre jene incommensurable Größe gleich einem gegebenen Bruche, was absurd ist.

Auch von der Richtigkeit dieser Behauptung werden wir in der Folge noch auf eine andere Art vollkommen überzeugt werden.

Beispiel 1.

Man suche die auf einander folgenden reducirten Werthe des Kettenbruches

$$2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{10}}}}}.$$

Hier ist

$$\frac{Z_0}{N_0} = 2 = \tfrac{2}{1},$$

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{u_0\, u_1 + 1}{u_1} = \frac{2\,.\,5 + 1}{5} = \frac{11}{5},$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{4\,.\,Z_1 + Z_0}{4\,.\,N_1 + N_0} = \frac{4\,.\,11 + 2}{4\,.\,5 + 1} = \frac{46}{21},$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{2\,.\,Z_2 + Z_1}{2\,.\,N_2 + N_1} = \frac{2\,.\,46 + 11}{2\,.\,21 + 5} = \frac{103}{47},$$

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{3\,.\,Z_3 + Z_2}{3\,.\,N_3 + N_2} = \frac{3\,.\,103 + 46}{3\,.\,47 + 21} = \frac{355}{162},$$

$$\frac{Z_5}{N_5} = \frac{10\,.\,Z_4 + Z_3}{10\,.\,N_4 + N_3} = \frac{10\,.\,355 + 103}{10\,.\,162 + 47} = \frac{3653}{1667},$$

folglich ist $\frac{3653}{1667}$ der gemeine Bruch, aus welchem der vorgelegte Kettenbruch entsteht.

Für die Ausübung richte man die Rechnung auf folgende Art ein. „Man schreibe die Quotienten u_0, u_1, u_2, u_3, . . . der Ordnung nach in eine horizontale Reihe, darunter setze man links den Hilfsbruch $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{1}$, wenn $u_0 = 0$ ist, dividire dann u_0 durch 1, oder wenn $u_0 = 0$ sein sollte, 1 durch u_1, so erhält man den ersten Partialbruch, und die folgenden Brüche bestimme man nach der obigen Regel.“ Durch das Vorsetzen des Hilfsbruches $\frac{1}{0}$ oder $\frac{0}{1}$ erreicht man den kleinen Vortheil, daß man schon auf die Berechnung des zweiten reducirten Werthes die obige Vorschrift anwenden kann. In unserem speciellen Falle steht demnach die Rechnung wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2, & 5, & 4, & 2, & 3, & 10, \\ \hline \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5.2+1}{5.1+0}, & \frac{4.11+2}{4.5+1}, & \frac{2.46+11}{2.21+5}, & \frac{3.103+46}{3.47+21}, & \frac{10.355+103}{10.162+47} \end{array}$$

oder $\frac{2}{1}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{46}{21}$, $\frac{103}{47}$, $\frac{355}{162}$, $\frac{3653}{1667}$.

Beispiel 2.

Man suche die auf einander folgenden reducirten Werthe des Kettenbruches

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}}.$$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Quotienten:} & & 3, & 5, & 1, & 4, & 7; \\ \hline \text{Partialbrüche:} & \frac{0}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{5}{16}, & \frac{6}{19}, & \frac{29}{92}, & \frac{209}{663}; \end{array}$$

folglich ist $x = \frac{209}{663}$, nämlich aus $\frac{209}{663}$ kann der vorgelegte Kettenbruch abgeleitet werden.

Zusatz. Ist einer der Nenner in der Kette $= 0$, oder kommt ein negatives Glied vor, so muß man den vorgelegten Kettenbruch früher nach §. 107, Zus. auf die gewöhnliche Form bringen.

§. 109.

Die vorzüglichsten Eigenschaften der Partialbrüche.

Es sei

$$\frac{Z}{N} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ldots + \cfrac{1}{u_{n-1} + \cfrac{1}{u_n + \cfrac{1}{u_{n+1} + \ldots}}}}}}$$

und wir wollen Kürze halber den wahren Werth des vorgelegten Kettenbruches $\frac{Z}{N} = w$ setzen, und die reducirten Werthe der Ordnung nach durch $\frac{Z_0}{N_0} = x_0$, $\frac{Z_1}{N_1} = x_1$, $\frac{Z_2}{N_2} = x_2$, u. s. w. allgemein durch $\frac{Z_n}{N_n} = x_n$ bezeichnen, werden aber bald die Bezeichnung $\frac{Z_n}{N_n}$, bald die Bezeichnung x_n gebrauchen, je nachdem die eine oder die andere zweckmäßiger ist. Endlich wird noch erinnert, daß die reducirten Werthe x_1, x_3, x_5, x_7, . . . x_{2n+1}, x_{2n+3}, . . . Partialbrüche der geraden Ordnung, oder schlechtweg gerade Partialbrüche genannt werden sollen: dagegen

die Brüche $x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots x_{2n-2}, x_{2n}, \ldots$ Partialbrüche der ungeraden Ordnung, oder kurz ungerade Partialbrüche; umgekehrt aber, wenn $u_0 = 0$ sein sollte.

I. Die Partialbrüche sind abwechselnd kleiner und größer als der wahre Werth w. Denn bezeichnen wir die Werthe der jedesmal weggelassenen Glieder der Ordnung nach durch $r_1, r_2, r_3, \ldots$, so wird

$$\frac{Z}{N} = w = u_0 + r_1 = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + r_2} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + r_3}}$$

$$= u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + r_4}}} = \text{2c.}$$

Da nun $w = u_0 + r_1$ ist, so ist $u_0 < w$, oder $x_0 < w$. Weil ferner $\frac{1}{u_1} > \frac{1}{u_1 + r_2}$ (§. 87, 7), so ist auch $u_0 + \frac{1}{u_1} > u_0 + \frac{1}{u_1 + r_2}$, d. i. $x_1 > w$. Eben so ist auch $\frac{1}{u_2} > \frac{1}{u_2 + r_3}$, mithin

$$u_1 + \frac{1}{u_2} > u_1 + \frac{1}{u_2 + r_3}, \text{ also}$$

$$\cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2}} < \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + r_3}}, \text{ folglich auch}$$

$$u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2}} < u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + r_3}}, \text{ d. i. } x_2 < w.$$

Auf dieselbe Art findet man ferner $x_3 > w$, $x_4 < w$, $x_5 > w$, u. s. w., also allgemein $x_{2n} < w$ und $x_{2n+1} > w$, d. h. jeder ungerade Partialbruch ist kleiner, jeder gerade aber größer als der wahre Bruch $\frac{Z}{N}$. Das Gegentheil findet Statt, wenn $u_0 = 0$ ist, wie leicht einzusehen ist.

Hieraus folgt von selbst, daß der wahre Bruch $\frac{Z}{N}$ immer zwischen je zwei auf einander folgenden Partialbrüchen liege.

II. Die Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden Partialbrüchen ist $= \pm 1$, dividirt durch das Produkt der beiden Nenner. Hievon überzeugt man sich auf folgende Art:

Es sind $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$, $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ drei auf einander folgende Partialbrüche; also ist

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}}{N_{n-1} N_n} = \frac{-[Z_n N_{n-1} - Z_{n-1} N_n]}{N_{n-1} N_n}$$

und

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n N_{n+1} - Z_{n+1} N_n}{N_n N_{n+1}}$$

$$= \frac{Z_n [u_{n+1} N_n + N_{n-1}] - [u_{n+1} Z_n + Z_{n-1}] N_n}{N_n N_{n+1}} \quad (\S. 108)$$

$$= \frac{Z_n N_{n-1} - Z_{n-1} N_n}{N_n N_{n+1}} = \frac{-[Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}]}{N_n N_{n+1}}.$$

Betrachtet man nun bloß die Zähler dieser beiden Differenzen, so sieht man, daß

$$Z_n N_{n+1} - Z_{n+1} N_n = - [Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}],$$

nämlich daß die Zähler zweier solcher auf einander folgenden Differenzen einander gleich, aber entgegengesetzt seien. Nun ist aber

$$Z_0 N_1 - Z_1 N_0 = u_0 \,.\, u_1 - (u_0 u_1 + 1) \,.\, 1 = -1,$$

also nach unserem eben bewiesenen Satze

$$Z_1 N_2 - Z_2 N_1 = -(-1) = +1, \text{ mithin}$$
$$Z_2 N_3 - Z_3 N_2 = -1, \text{ also}$$
$$Z_3 N_4 - Z_4 N_3 = +1.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ und allgemein}$$
$$Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = \pm 1.$$

Hieraus erhellt also, daß der Zähler der Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden Partialbrüchen $= \pm 1$ sei, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl bezeichnet; die Differenz selbst aber ± 1, dividirt durch das Produkt der beiden Nenner, nämlich

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{\pm 1}{N_{n-1} N_n}, \text{ oder}$$

$$x_{n-1} - x = \frac{\pm 1}{N_{n-1} N_n}.$$

Auch hieraus ließe sich schon folgern, daß die reducirten Werthe abwechselnd kleiner und größer seien als der wahre Bruch.

III. Aus dem Bildungsgesetze der Theilbrüche (§. 108) ist ersichtlich, daß die Nenner der reducirten Werthe immer größer und größer werden, daß nämlich $N_0 < N_1 < N_2 < N_3 \ldots$ allgemein daß $N_{n-1} < N_n$ sei, mithin ist auch

$$N_0 N_1 < N_1 N_2 < N_2 N_3 < N_3 N_4 < \ldots,$$

allgemein $N_{n-2}\,N_{n-1} < N_{n-1}\,N_n$, folglich

$$\frac{1}{N_0 N_1} > \frac{1}{N_1 N_2} > \frac{1}{N_2 N_3} > \frac{1}{N_3 N_4} > \ldots,$$

allgemein $\frac{1}{N_{n-2}N_{n-1}} > \frac{1}{N_{n-1}\,N_n} \ldots$ (A).

Es ist aber (nach II)

$$\frac{1}{N_0 N_1} = -(x_0 - x_1) = x_1 - x_0\,;\ \frac{1}{N_1 N_2} = x_1 - x_2\,;$$

$$\frac{1}{N_2 N_3} = -(x_2 - x_3) = x_3 - x_2\,;\ \frac{1}{N_3 N_4} = x_3 - x_4\,;$$

$$\frac{1}{N_4 N_5} = -(x_4 - x_5) = x_5 - x_4\,;\ \frac{1}{N_5 N_6} = x_5 - x_6\,;$$

. . . .

allgemein

$$\frac{1}{N_{2r}\,N_{2r+1}} = -(x_{2r} - x_{2r+1}) = x_{2r+1} - x_{2r}\,;$$

$$\frac{1}{N_{2r+2}\,N_{2r+2}} = x_{2r+1} - x_{2r+2}\,;$$

also durch Substitution in (A)

$$(x_1 - x_0) > (x_1 - x_2) > (x_3 - x_2) > (x_3 - x_4) > (x_5 - x_4) > (x_5 - x_6) \ldots,$$

allgemein

$$(x_{2r+1} - x_{2r}) > (x_{2r+1} - x_{2r+2}) > (x_{2r+3} - x_{2r+2}),$$

d. h. die Differenzen zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Partialbrüchen werden, numerisch betrachtet, beim Wachsen der Zeiger immer kleiner und kleiner, und da zwischen je zwei solchen Werthen der wahre Bruch $\frac{Z}{N}$ liegt (Nro. 1), so nähern sich die Partialbrüche dem Bruche $\frac{Z}{N}$ beim Wachsen der Zeiger immer mehr und mehr, und werden deßhalb mit Recht Näherungsbrüche genannt.

IV. Wir haben eben gesehen, daß

$$(x_{2r+1} - x_{2r}) > (x_{2r+1} - x_{2r+2}) > (x_{2r+3} - x_{2r+2})$$

sei, und hieraus folgt nun

$$-x_{2r} > -x_{2r+2},\ \text{also}\ x_{2r} < x_{2r+2}\ \text{und}\ x_{2r+1} > x_{2r+3}\,;$$

also wachsen die ungeraden Näherungsbrüche, die geraden aber werden beim Wachsen der Zeiger immer kleiner und kleiner, d. h. die ungeraden Partialbrüche nähern sich dem wahren Werthe

$\frac{Z}{N}$ durch Zunahme, die geraden Partialbrüche aber durch Abnahme.

Das Umgekehrte findet Statt, wenn $u_0 = 0$ ist. Es ist also
$x_0 < x_2 < x_4 < x_6 < \ldots$ und $x_1 > x_3 > x_5 > \ldots$

V. Der Unterschied zwischen einem Näherungsbruche x_n und dem wahren Bruche w ist immer kleiner, als ± 1 dividirt durch das Quadrat des Nenners des Partialbruches. Denn da

$$x_n - x_{n+1} = \frac{\pm 1}{N_n\, N_{n+1}} \text{ und } x_n - w < x_n - x_{n+1} \text{ (Nr. 1.)}$$

sein muß, so ist auch

$$x_n - w < \frac{\pm 1}{N_n\, N_{n+1}} = \frac{\pm 1}{N_n\, [u_{n+1}\, N_n + N_{n-1}]}$$

$$= \frac{\pm 1}{u_{n+1}\, N_n^2 + N_n\, N_{n-1}} < \frac{\pm 1}{N_n^2} \text{ (§. 87, 7);}$$

um so mehr ist also

$$x_n - w < \frac{\pm 1}{(N_n)^2}.$$

VI. Zähler und Nenner der Näherungsbrüche sind immer relative Primzahlen. Denn wären Z_n und N_n nicht relative Primzahlen, so müßten sie einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Faktor α besitzen, und es müßte demnach α auch ein Maß von $Z_n\, N_{n+1} - Z_{n+1}\, N_n$ (§. 67, a, b) sein, aber es ist

$$Z_n\, N_{n+1} - Z_{n+1}\, N_n = \pm 1 \text{ (Nro. II)},$$

also müßte $\frac{\pm 1}{\alpha}$ eine ganze Zahl sein, was absurd ist.

VII. Zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen x_n und x_{n+1} kann kein Bruch $\frac{p}{q}$ eingeschaltet werden, der mit größern Zahlen geschrieben wäre als x_n und mit kleineren als x_{n+1}, und der zugleich dem wahren Bruche $w = \frac{Z}{N}$ näher läge als einer jener reducirten Werthe.

Denn wäre

$$Z_n < p < Z_{n+1} \text{ und } N_n < q < N_{n+1},$$

und behauptete Jemand, es liege $\frac{p}{q}$ näher bei w als x_n oder x_{n+1}, so müßte

$$x_n - \frac{p}{q} < x_n - x_{n+1}$$

sein. Es ist aber

$$x_n - \frac{p}{q} = \frac{Z_n}{N_n} - \frac{p}{q} = \frac{q.Z_n - pN_n}{q.N_n} \gtreqless \frac{\pm 1}{qN_n},$$

den p, q, Z_n und N_n sind ganze Zahlen, mithin ist auch $qZ_n - pN_n$ eine ganze Zahl, welche von Null verschieden sein muß, weil sonst $\frac{p}{q} = \frac{Z_n}{N_n}$ gegen unsere Voraussetzung wäre; ferner ist

$$\frac{\pm 1}{N_n\ N_{n+1}} < \frac{\pm 1}{qN_n} \overline{<} x_n - \frac{p}{q},$$

folglich ist in jedem Falle

$$x_n - x_{n+1} < x_n - \frac{p}{q},$$

mit welcher Relation die aus der Behauptung des Gegners resultirende, nämlich:

$$x_n - \frac{p}{q} < x_n - x_{n+1}$$

geradezu im Widerspruche steht, folglich kann auch $\frac{p}{q}$ die erwähnten Eigenschaften nicht besitzen.

VIII. Zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen x_n und x_{n+2} derselben Art, die nämlich beide zugleich entweder zu groß oder zu klein gegen w sind, lassen sich $(u_{n+2} - 1)$ Brüche derselben Art einschalten, die dem Totalwerthe w sich ebenfalls immer mehr und mehr nähern.

Denn es ist

$$x_{n+2} - x_n = \frac{Z_{n+2}}{N_{n+2}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{N_n\ Z_{n+2} - Z_n\ N_{n+2}}{N_n\ N_{n+2}}$$

$$= \frac{N_n\ [u_{n+2}\ Z_{n+1} + Z_n] - Z_n [u_{n+2}\ N_{n+1} + N_n]}{N_n\ N_{n+2}} \quad (\S.\ 108)$$

$$= \frac{u_{n+2}\ [N_n\ Z_{n+1} - Z_n\ N_{n+1}]}{N_n\ N_{n+2}} = \frac{u_{n+2}\ (\pm\ 1)}{N_n\ N_{n+2}} = \frac{\pm\ u_{n+2}}{N_n N_{n+2}}.$$

Die Brüche, welche nun zwischen x_n und x_{n+2} eingeschaltet werden können, erhält man, wenn man in der Gleichung

$$x_{n+2} = \frac{Z_{n+2}}{N_{n+2}} = \frac{u_{n+2}\, Z_{n+1} + Z_n}{u_{n+2}\, N_{n+1} + N_n};$$

nach und nach $u_{n+2} = 1, 2, 3, \ldots (u_{n+2} - 1)$ setzt. Man findet nämlich folgende eingeschaltete Brüche:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{1 \,.\, Z_{n+1} + Z_n}{1 \,.\, N_{n+1} + N_n};$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2 \,.\, Z_{n+1} + Z_n}{2 \,.\, N_{n+1} + N_n};$$

$$\frac{A_3}{B_3} = \frac{3 \,.\, Z_{n+1} + Z_n}{3 \,.\, N_{n+1} + N_n}$$

u, s. f.; allgemein

$$\frac{A_r}{B_r} = \frac{r \,.\, Z_{n+1} + Z_n}{r \,.\, N_{n+1} + N_n}.$$

Von diesen eingeschalteten Brüchen (fractions intermédiaires) lassen sich dieselben Eigenschaften nachweisen, welche die Näherungsbrüche besitzen, und sie sind selbst Näherungsbrüche derselben Art, wie x_n und x_{n+1}, nämlich sie nähern sich dem Totalwerthe w beim Wachsen der Zeiger entweder durch Zunahme oder durch Abnahme, je nachdem $x_n < w$ oder $x_n > w$ ist.

IX. Wir haben demnach zwei Reihen von Brüchen, welche sich durch beständiges Wachsen oder durch beständiges Abnehmen dem Totalwerthe $w = \frac{Z}{N}$ des vorgelegten Kettenbruches

$$u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ldots}}}$$

nähern, nämlich:

$$1)\ \frac{Z_0}{N_0}, \frac{1 \,.\, Z_1 + Z_0}{1 \,.\, N_1 + N_0}, \frac{2 \,.\, Z_1 + Z_0}{2 \,.\, N_1 + N_0}, \frac{3 \,.\, Z_1 + Z_0}{3 \,.\, N_1 + N_0}, \ldots\ldots$$

$$\frac{(u_2 - 1)\, Z_1 + Z_0}{(u_2 - 1)\, N_1 + N_0}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{1 \,.\, Z_3 + Z_2}{1 \,.\, N_3 + N_2}, \frac{2 \,.\, Z_3 + Z_2}{2 \,.\, N_3 + N_2}, \frac{3 \,.\, Z_3 + Z_2}{3 \,.\, N_3 + N_2}, \ldots$$

$$\frac{(u_4 - 1)\, Z_3 + Z_2}{(u_4 - 1)\, N_3 + N_2}, \frac{Z_4}{N_4}, \frac{1 \,.\, Z_5 + Z_4}{1 \,.\, N_5 + N_4}, \ldots\ldots$$

$$2)\ \frac{Z_1}{N_1}, \frac{1 \,.\, Z_2 + Z_1}{1 \,.\, N_2 + N_1}, \frac{2 \,.\, Z_2 + Z_1}{2 \,.\, N_2 + N_1}, \frac{3 \,.\, Z_2 + Z_1}{3 \,.\, N_2 + N_1}, \ldots\ldots$$

$$\frac{(u_3 - 1)\, Z_2 + Z_1}{(u_3 - 1)\, N_2 + N_1}, \frac{Z_3}{N_3}, \frac{1 \,.\, Z_4 + Z_3}{1 \,.\, N_4 + N_3}, \frac{2 \,.\, Z_4 + Z_3}{2 \,.\, N_4 + N_3}, \frac{3 \,.\, Z_4 + Z_3}{3 \,.\, N_4 + N_3}, \ldots$$

$$\frac{(u_5 - 1)\, Z_4 + Z_3}{(u_5 - 1)\, N_4 + N_3}, \frac{Z_5}{N_5}, \frac{1 \,.\, Z_6 + Z_5}{1 \,.\, N_6 + N_5}, \frac{2 \,.\, Z_6 + Z_5}{2 \,.\, N_6 + N_5}, \ldots\ldots$$

X. Es ist

$$x_n = x_0 - (x_0 - x_1) - (x_1 - x_2) - (x_2 - x_3) - (x_3 - x_4) - \ldots - (x_{n-2} - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_n),$$

oder, wenn man hier die Werthe der Differenzen aus Nro. II. substituirt,

$$w = x_n = x_0 + \frac{1}{N_0 N_1} - \frac{1}{N_1 N_2} + \frac{1}{N_2 N_3} - \frac{1}{N_3 N_4} + \ldots\ldots \mp \frac{1}{N_{n-2} N_{n-1}} \pm \frac{1}{N_{n-1} N_n},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Ist nun der vorgelegte Kettenbruch ein unendlicher, so geht auch diese Reihe ohne Ende fort, und wir können sonach jeden vorgelegten Kettenbruch bis zu jedem beliebigen Gliede durch eine Reihe ausdrücken.

§. 110.

Die continuirlichen Brüche leisten in der Analysis sehr großen Nutzen, wie in der Folge ersichtlich sein wird.

Wir werden in der Folge öfter Gelegenheit finden, von den Kettenbrüchen und den merkwürdigen Eigenschaften ihrer reducirten Werthe einen nützlichen Gebrauch zu machen. Der Anfänger möge unterdessen folgende Aufgaben zur Uebung auflösen.

1. Ein Wiener Fuß ist = 0·97310342 Pariser Fuß: man soll die Näherungsbrüche dieses Decimalbruches bestimmen, und an denselben die früher erwiesenen Eigenschaften nachweisen.

2. Eben so behandle man den Bruch 3·1415926535 . . ., welcher das Verhältniß des Durchmessers D zur Peripherie P oder den Quotienten $\frac{P}{D}$ bezeichnet.

3. Sei der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}}}} = 0\cdot422297;$$

man soll den Werth von x bestimmen.

4. Sei

$$w = 2 + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.23} - \frac{1}{23.50} + \frac{1}{50.173};$$

man bestimme den dieser Reihe entsprechenden continuirlichen Bruch und den gemeinen Bruch von demselben Werthe.

5. Sei

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.11} - \frac{1}{11.25} + \frac{1}{25.36} - \frac{1}{36.133} + \frac{1}{133.302} - \frac{1}{302.435} + \cdots$$

eine unendliche Reihe; man bestimme noch die zwei nächstfolgenden Glieder der Reihe und den dieser Reihe entsprechenden Kettenbruch.

6. Den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6}}}}}}$$

so zu transformiren, daß alle Glieder positiv erscheinen und alle Nenner > 0 werden.

Dritter Abschnitt.

Die Grund-Operationen der Combinations-Lehre.

§. 111.

Vorbegriffe.

1. Befinden sich mehrere zusammengehörige gleichartige oder ungleichartige Dinge oder Größen, als: Zahlen, Buchstaben, Sylben, Wörter, Farben u. s. f. neben einander, so nennt man eine solche Verbindung eine Complexion, und jeden Bestandtheil derselben ein Element. Aus gegebenen Elementen Complexionen bilden, heißt combiniren im weitesten Sinne des Wortes.

2. Die Combinationslehre hat die Darstellung aller Complexionen, welche unter vorgeschriebenen Bedingungen aus gegebenen Elementen gebildet werden können, zum Gegenstande.

3. Zur bildlichen Darstellung der combinatorischen Operationen wählt man für die gegebenen Elemente besondere Zeichen, und deutet das Zusammenstellen der Elemente zu einer Complexion dadurch an, daß man die ihnen entsprechenden Zeichen neben einander schreibt. Als solche Zeichen dienen vorzüglich die Buchstaben und die Zahlen, von welchen die letztern die zweckmäßigsten sind, weil man an ihre Stelle sogleich die entsprechenden Elemente setzen kann. Diese Zahlen werden Zeiger (indices) genannt, weil sie andeuten, welche Stellen die entsprechenden Elemente in der festgesetzten, oder in ihrer natürlichen Ordnung einnehmen. So z. B. bedeutet der Ausdruck 254 die Complexion, die aus dem dritten, fünften und vierten Elemente zusammen-

gesetzt ist, und zeigt zugleich an, in welcher Ordnung diese drei Elemente an einander zu reihen sind. Ist irgend ein Zeiger eine zwei- oder mehrzifferige Zahl, z. B. 15, so wollen wir über dieselbe einen Querstrich setzen, um diesen Zeiger $\overline{15}$ von der Complexion 15 zu unterscheiden. — Sind die Elemente durch Buchstaben ausgedrückt, so setzt man diese in alphabetischer Ordnung neben einander, wenn nicht besondere Umstände eine andere Ordnung erfordern, so daß also den Buchstaben

a, b, c, d, . . .

die Zeiger 1, 2, 3, 4, . . . entsprechen.

Auf diese Art kann man dann bei der Ausführung der combinatorischen Operationen sehr bequem die Zeiger statt der Buchstaben gebrauchen, und diese wieder gegen jene austauschen. In manchen Fällen ist es übrigens sehr zweckmäßig, sämmtliche Elemente durch denselben Buchstaben zu bezeichnen, und ihre Verschiedenheit bloß durch die unten beigesetzten Zahlen auszudrücken, durch welche letztere zugleich die Rangordnung der Elemente dargestellt wird, wie z. B.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots$ oder auch

$b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots$

Es wird noch erinnert, daß wir in der Combinationslehre, für sich betrachtet, keine bestimmte arithmetische Verbindung der Elemente voraussetzen, sondern daß wir bloß auf die Art des Aufeinanderfolgens sehen. So bezeichnet also die Complexion b a c, als combinatorischer Ausdruck betrachtet, keineswegs ein Produkt, wie es in den früheren Abschnitten der Fall war, sondern sie bedeutet bloß, daß auf das zweite Element das erste, und auf dieses das dritte zu folgen habe. Eben so bezeichnet auch die Complexion 479 keine Zahl, sondern eine Verbindung des vierten, siebenten und neunten Elementes.

4. Die Zeiger geben die Rangordnung der Elemente an, und wir nennen unter zwei Elementen jenes, welchem der größere Zeiger entspricht, das höhere, und das andere das niedrigere Element. Eben so wollen wir von zwei Complexionen jene die höhere nennen, welche in einer frühern Stelle, von der Linken gegen die Rechte, ein höheres Element enthält. So ist z. B. die Complexion a b d e höher als a b c g, denn in den beiden ersten Stellen stimmen beide Complexionen überein, die erstere aber hat die dritte Stelle mit einem höhern Elemente (d) besetzt, als die andere. Eben so ist die Complexion 12378 höher als 12359, und diese wieder höher als 1234.

Jene Complexion, in welcher alle Elemente (von der Linken gegen die Rechte) in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen, ist also die niedrigste, und schreibt man die Elemente dieser Complexion in der umgekehrten Ordnung, so hat man die höchste Complexion.

Complexionen nennen wir gut geordnet, wenn sie so auf einander folgen, daß nie eine höhere einer niedrigern vorausgeht.

Complexionen, die aus gleich vielen Elementen bestehen, rechnen wir zu einer und derselben Classe. So sind die Verbindungen a b c, a b e, b e n, . . . Complexionen der dritten Classe. Sind zwei oder mehrere Complexionen irgend einer Classe aus denselben Elementen zusammengesetzt, und unterscheiden sie sich also bloß durch die Aufeinanderfolge der Elemente, so heißen wir sie materiell einerlei und formell verschieden; sind sie aber aus verschiedenen Elementen nach einerlei Gesetz zusammengesetzt, so heißen sie materiell verschieden und formell einerlei. Sind aber zwei Complexionen materiell und formell einerlei, so heißen sie identisch. So sind die Complexionen a b c, b a c und c a b materiell einerlei und formell verschieden; dagegen sind die Complexionen b a c und $\beta \alpha \gamma$ formell einerlei und materiell verschieden; endlich sind b a d und b a d identisch.

5. Bei der Bildung einer Reihe (Gruppe) von Complexionen aus gegebenen Elementen handelt es sich um weiter nichts, als welche aus den gegebenen Elementen, und in welcher Ordnung sie dazu genommen werden sollen. Man hat nun entweder bloß die Ordnung, oder bloß die Verschiedenheit der Elemente bei der Bildung der verlangten Complexionen im Auge, und so ergeben sich die zwei einfachsten combinatorischen Operationen, nämlich das Permutiren und das Combiniren im engeren Sinne des Wortes. — Sind aber zwei oder mehrere abgesonderte Reihen von Elementen mit der Bedingung gegeben, daß zur Bildung jeder einzelnen Complexion alle Reihen auf eine durchaus gleichförmige Weise verwendet werden sollen, so daß nie zwei Elemente aus derselben Reihe in derselben Complexion erscheinen dürfen, sondern daß jedes Element einer andern Reihe angehört, so entsteht die dritte combinatorische Operation, das Variiren. Mit diesen drei einfachen Operationen werden wir bei allen Anwendungen der Combinationslehre auf arithmetische Probleme ausreichen, weßhalb wir uns hier bloß auf diese drei combinatorischen Grundoperationen beschränken wollen.

§. 112.

Das Permutiren.

1. Gegebene Elemente permutiren oder versetzen, heißt dieselben, so oft als möglich, in einer andern Ordnung an einander reihen. Jede einzelne der so erhaltenen Complexionen wird eine Permutationsform, oder schlechtweg eine Permutation (Versetzung) genannt. Erscheint in derselben Permutationsform das nämliche Element mehrmals, so heißt jene Complexion eine Permutation mit Wiederholung. Die Permutationen sind also bloß formell verschieden, materiell aber einerlei.

2. Um aus gegebenen Elementen alle möglichen Permutationsformen zu erzeugen und gut geordnet darzustellen, verfahre man nach folgender Regel:

„Man schreibe die gegebenen Elemente von der Linken gegen die Rechte in ihrer natürlichen Ordnung neben einander, so also, daß ihre Zeiger in der angegebenen Richtung wachsen, so erhält man die niedrigste Complexion. Um aber aus irgend einer Permutationsform die nächst höhere abzuleiten, gehe man von der Linken gegen die Rechte bis zu der entferntesten Stelle, in welche aus den nachfolgenden Elementen ein höheres Element gesetzt werden kann, als bereits in ihr steht, also bis zu dem letzten erhöhungsfähigen Elemente, besetze seine Stelle mit jenem nächst höheren Elemente, und lasse die noch fehlenden Elemente in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen, so also, daß ihre Zeiger gegen die Rechte hin wachsen. Diese letzte Vorschrift wende man nun auf die niedrigste Complexion an, so erhält man die nächst höhere Permutationsform, und dann stufenweise auf diese und jene der neu erzeugten Complexionen, bis man endlich auf eine Permutation kommt, auf welche sich jene Vorschrift weiter nicht mehr anwenden läßt, die demnach die höchste und letzte ist.“

Bei der letzten Permutationsform müssen demnach die Zeiger der Elemente von der Linken gegen die Rechte abnehmen, und also die Elemente selbst gerade in der umgekehrten Ordnung erscheinen, wie in der niedrigsten Complexion. Zur Erläuterung wollen wir diese Regel auf einige Beispiele anwenden.

I. Gegebene Elemente: 1, 2, 3, 4.

Permutationen.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321.

II. Gegebene Elemente: a, b, b, c, c.

Permutationen.

abbcc	bcbca
abcbc	bccab
abccb	bccba
acbbc	cabbc
acbcb	cabcb
accbb	cacbb
babcc	cbabc
bacbc	cbacb
baccb	cbbac
bbacc	cbbca
bbcac	cbcab
bbcca	cbcba
bcabc	ccabb
bcacb	ccbab
bcbac	ccbba

Bei dem ersten Beispiele haben wir demnach lauter Permutationen ohne Wiederholung, bei dem andern Beispiele aber erscheinen nur Permutationen mit Wiederholung.

Betrachten wir im ersten Beispiele die einzelnen Complexionen als gewöhnliche vierzifferige Zahlen, so sehen wir, daß jede Zahl größer ist als alle vorausgehenden — einzeln betrachtet —, und hieran erkennen wir, daß diese Complexionen gut geordnet sind.

Auch sehen wir, daß sich diese Complexionen in eben so viele Partien abtheilen lassen, als Elemente vorhanden sind. So erscheinen im ersten Beispiele sechs Complexionen, die das erste Element, sechs Complexionen, die das zweite Element u. s. w. an der Spitze haben. Man könnte also die erste Partie, bei welcher die erste Stelle mit dem ersten Elemente besetzt ist, Permutationen der ersten Ordnung, die

zweite Gruppe, in welcher das zweite Element die erste Stelle einnimmt, Permutationen der zweiten Ordnung nennen, u. s. f.

3. Bei der Frage, wie viele Versetzungen bei einer gegebenen Menge von Elementen möglich seien, hat man zwei Fälle zu unterscheiden; denn die gegebenen Elemente sind entweder sämmtlich von einander verschieden, oder es kommen unter denselben mehrere gleiche Elemente vor.

Erster Fall. Die Anzahl der Elemente sei $= n$, und sie selbst seien sämmtlich von einander verschieden.

Wir haben so eben gesehen, daß sich jede solche Gruppe zusammengehöriger Permutationen in n Partien abtheilen lasse, bei deren jeder einzelnen sämmtliche Complexionen dasselbe Anfangselement haben. Jede dieser Partien enthält gleich viele Complexionen, weil kein Grund vorhanden ist, warum das eine Element öfter die eine Stelle einnehmen soll, als das andere; und wenn man das Anfangselement in allen Verbindungen abgesondert denkt, so bleiben sämmtliche Versetzungen der übrigen $(n - 1)$ Elemente gut geordnet zurück. Bezeichnet man demnach die Anzahl der Permutationsformen für n verschiedene Elemente im Allgemeinen durch das Symbol P_n; so wird die Anzahl aller möglichen Versetzungen für $(n - 1)$ verschiedene Elemente durch P_{n-1} ausgedrückt werden müssen, und wir erhalten, dem Gesagten zur Folge, die Gleichung

$$P_n = n \,.\, P_{n-1}.$$

Da sich nun ein einziges Element nur einmal ansetzen läßt, also keine Permutation zuläßt, so ist $P_1 = 1$, folglich nach unserer Gleichung

$$P_1 = 1 \,.\, P_0 = 1, \text{ also } P_0 = 1; \text{ ferner}$$
$$P_2 = 2 \,.\, P_1 = 2 \times 1 = 1 \,.\, 2$$
$$P_3 = 3 \,.\, P_2 = 3 \times 1 \,.\, 2 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$$
$$P_4 = 4 \,.\, P_3 = 4 \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$$
$$P_5 = 5 \,.\, P_4 = 5 \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$$

. . . .

und allgemein

$$P_n = n \,.\, P_{n-1} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,. \,.\, . \,(n - 2)\,(n - 1)\, n.$$

Ein solches Produkt, aus den natürlichen Zahlen von 1 angefangen bis n, bezeichnet man gewöhnlich recht bequem durch das Zei-

chen n!, und lies't „Faktorielle n"; es ist also die Anzahl aller möglichen Versetzungen für n verschiedene Elemente

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n - 1) . n = n!$$

Zweiter Fall. Unter den gegebenen $n = \alpha + \beta$ Elementen sollen α Elemente einander gleich sein.

a) Man denke sich zuerst alle n Elemente als verschieden, so geben sie $P_n = n!$ Versetzungen. Diese Permutationen gruppire man nun so, daß alle jene Complexionen, in welchen die übrigen β verschiedenen Elemente dieselbe Stellung haben, in eine Partie zusammengestellt werden, so wird jede solche Partie eben so viele Complexionen umfassen, wie viele Permutationen α verschiedene Elemente gestatten, nämlich $\alpha!$ Permutationsformen. Werden nun diese α Elemente als identisch betrachtet, so fallen jene $\alpha!$ Permutationen in eine einzige zusammen, und wir erhalten gerade so viele verschiedene Versetzungen, in wie viele Partien die ursprünglichen n! Permutationen abgetheilt wurden, folglich $\frac{n!}{\alpha!}$; nämlich die Anzahl der verschiedenen Permutationsformen für n Elemente, unter welchen α gleiche vorkommen, ist

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{n!}{\alpha!}.$$

b) Die Anzahl der Elemente sei $n = \alpha + \beta + \gamma$, unter denen α gleiche Elemente einer Art, und β gleiche Elemente einer andern Art sein sollen, die übrigen γ Elemente aber seien verschieden.

Man abstrahire anfänglich von dem Umstande, daß außer den α gleichen Elementen auch noch β gleiche einer andern Art vorhanden sind; man denke sich nämlich jene β Elemente als verschieden, und bilde so alle möglichen Versetzungen, deren Anzahl $= \frac{n!}{\alpha!}$ sein wird. Diese Complexionen theile man nun wieder in Partien ab, so daß alle Permutationen derselben Partie sich bloß durch die verschiedenartigen Stellungen jener, vor der Hand als verschieden gedachten Elemente, von einander unterscheiden, rücksichtlich der Stellung der übrigen Elemente aber einerlei sind, so erhält man in jeder Partie offenbar $\beta!$ verschiedene Permutationsformen, folglich $\frac{n!}{\alpha!} : \beta! = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$ verschiedene Gruppen. Setzt man nun jene β Elemente einander wieder gleich, so werden alle in derselben Partie befindlichen Complexionen nothwendig identisch, und man erhält sonach eben so viele verschiedene Permutationen, als Partien vorhanden waren; nämlich es ist für n Elemente,

unter denen sich außer den α gleichen noch β andere gleiche Elemente befinden, die Anzahl der möglichen Versetzungen

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!}.$$

b) Kommen unter den gegebenen n Elementen α gleiche, β gleiche einer andern Art, γ gleiche einer dritten Art, δ gleiche einer vierten Art, u. s. w. vor, so findet man durch dieselben Schlüsse die Anzahl der Permutationen.

$$P_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!\ \text{2c.}}.$$

Beispiele.

Für das Beispiel I. in Nro. 2 ist

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

für das Beispiel II. daselbst aber ist

$$P_5^{(2,\,2)} = \frac{5!}{2!\ 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2} = 30.$$

Die Faktoren des Produktes abcdnx lassen sich

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Mal versetzen, und die Faktoren des Produktes $3 \cdot a^4 b^2 c^3 x$ gestatten

$$P_{11}^{(4,\,2,\,3)} = \frac{11!}{4!\ 2!\ 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3} = 138600$$

Versetzungen.

Soll irgend ein Element stets dieselbe Stelle einnehmen, so ist in Bezug auf die Anzahl der Versetzungen dieß eben so viel, als wäre dieß Element gar nicht vorhanden.

4. Es ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n = (n-1)!\, n, \text{ mithin}$$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n},$$

und setzt man hier n = 1, so wird

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1, \text{ nämlich } 0! = 1 = P_0, \text{ wie oben.}$$

Ist demnach in dem Ausdruck $\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ldots}$ eine der, Größen α, β γ...

gleich Null zu setzen, so muß man das entsprechende Produkt $\alpha!$ oder $\beta!$ oder $\gamma!$ u. s. w. im Nenner weglassen, oder $0! = 1$ setzen.

Da der Ausdruck $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\ \text{ꝛc.}}$ die allgemeine Formel der Versetzungszahl für n Elemente ist, worunter α gleiche, β andere gleiche u. s. f. vorkommen, so muß er stets eine ganze Zahl sein, oder es muß $n!$ durch $\alpha!\ \beta!\ \gamma!$ ꝛc. immer theilbar sein; wobei jedoch, wie für sich klar ist, immer $n \geqq \alpha + \beta + \gamma \ldots$ sein muß.

§. 113.

Das Combiniren.

I. Gegebene Elemente *combiniren* (im engern Sinne des Wortes) heißt, aus denselben, so oft als möglich, eine *bestimmte* Anzahl von Elementen herausheben und zu einer Complexion vereinigen. Jede dieser Complexionen, welche sämmtlich materiell verschieden sein müssen, heißt *Combinationsform*, oder schlechtweg *Combination*; die Menge der zu einer Complexion vereinigten Elemente bestimmt die *Combinations-Classe*, und die diese Menge bezeichnende Zahl heißt der *Classenexponent*.

Gewöhnlich nennt man die Combinationen der ersten, zweiten dritten, vierten, fünften Classe u. s. w. auch *Unionen*, *Amben*, (Binionen), *Ternen* (Ternionen), *Quaternen* (Quaternionen) *Quinternen* (Quinternionen), u. s. f.

Darf bei dem Combiniren gegebener Elemente jedes einzeln so oft gesetzt werden, als der vorgeschriebene Classenexponent Einheiten enthält, so wird mit *uneingeschränkten Wiederholungen* oder schlechtweg *mit Wiederholungen* combinirt. Kann aber den in einer Aufgabe vorgeschriebenen Bedingungen gemäß eines oder mehrere Elemente nicht beliebig oft in dieselbe Complexion eintreten, so combinirt man mit *eingeschränkten Wiederholungen*.

Es ist zwar gleichgiltig, in welcher Ordnung die Elemente beim Combiniren an einander gereiht werden, indem es hier bloß auf die materielle Verschiedenheit ankommt; allein wir wollen hier und in der Folge die zu *einer* Combinationsform gehörigen Elemente immer nach ihrer Rangordnung neben einander setzen, d. h. so, daß die Zeiger derselben von der Linken gegen die Rechte wachsen.

II. Um für gegebene Elemente alle Combinationen mit Wiederholungen der verschiedenen Classen stufenweise zu finden, verfahre man auf folgende Art:

1) Man setze die Elemente einzeln in ihrer natürlichen Ordnung neben einander, so erhält man die Classe der Unionen, oder die Complexionen der ersten Classe.

2) Um hieraus die Complexionen der zweiten Klasse, oder die Binionen zu erhalten, verbinde man das erste (niedrigste) Element mit allen Unionen, das zweite Element mit sich selbst und allen höhern Elementen; dann das dritte Element mit sich selbst und allen höhern Elementen u. s. w., endlich das höchste Element mit sich selbst. Auf diese Art erscheinen die Combinationen der zweiten Classe nach Ordnungen abgetheilt, wie wir auch (§. 112, 2) die Permutationen abgetheilt haben.

3) Nun verbinde man das erste Element mit allen Combinationen der zweiten Classe, dann das zweite Element mit allen Binionen der zweiten und folgenden Ordnungen, ferner das dritte Element mit allen Binionen der dritten und der folgenden Ordnungen u. s. w. allgemein das r^{te} Element mit allen Binionen der r^{ten} und jeder höhern Ordnung, so erhält man sämmtliche Combinationen der dritten Classe, und zwar wieder nach Gruppen in Bezug auf das Anfangselement abgetheilt.

4) Auf dieselbe Art leitet man aus den Ternionen die Combinationen der vierten Classe, aus diesen jene der fünften Classe u. s. w. ab, und allgemein aus den Combinationen der $(p-1)^{ten}$ Classe jene der p^{ten} Classe.

Um anzudeuten, daß für die Elemente a, b, c, d die ersten vier Combinationsclassen mit uneingeschränkten Wiederholungen gebildet werden sollen, wollen wir kurz schreiben:

$$\mathfrak{C}_w^{1,\,2,\,3,\,4)}\begin{pmatrix}a, & b, & c, & d\\ 1, & 2, & 3, & 4\end{pmatrix}$$

und dieses Symbol einen combinatorischen Zeiger nennen. Entwickeln wir nun diesen combinatorischen Zeiger, so finden wir, den obigen Vorschriften gemäß:

$\mathfrak{C}_w^1\Big)$ a, b, c, d,

$\mathfrak{C}_w^2\Big)$ aa, ab, ac, ad, erste Ordnung,
bb, bc, bd, zweite „
cc, cd, dritte „
dd, vierte „

C^3_w)	aaa, aab; aac, aad abb, abc, abd acc, acd add	erste Ordnung,
	bbb, bbc, bbd bcc, bcd bdd	zweite „
	ccc, ccd cdd	dritte „
	ddd	vierte „

C^4_w)	aaaa, aaab, aaac, aaad aabb, aabc, aabd aacc, aacd aadd abbb, abbc, abbd abcc, abcd abdd accc, accd acdd addd	erste Ordnung,
	bbbb, bbbc, bbbd bbcc, bbcd bbdd bccc, bccd bcdd bddd	zweite „
	cccc, cccd ccdd cddd	dritte „
	dddd	vierte „

u. s. w.

Man sieht wohl sogleich, daß es in jeder Classe eben so viele Ordnungen gibt, als überhaupt verschiedene Elemente vorkommen, daß aber für jede Menge von Elementen unzählige Classen successive gebildet werden können.

III. Man kann jede beliebige Combinationsklasse für sich unabhängig nach folgender allgemeinen Regel bilden, es mögen Wiederholungen gestattet sein oder nicht.

Man setze so viele der niedrigsten Elemente nach ihrer Rangordnung neben einander, als der Klassenexponent anzeigt, so erhält man die niedrigste Combinationsform der verlangten Classe. Aus jeder einzelnen Combination wird die nächst höhere abgeleitet, wenn man die entfernteste Stelle aufsucht, in welche ein höheres Element gesetzt werden kann, als bereits dort steht, diese Stelle wirklich mit dem nächst höheren Elemente besetzt, und auf dieses die übrigen höhern Elemente, der natürlichen Ordnung gemäß, folgen läßt, wobei man jede erlaubte Wiederholung benutzen muß.

Wäre z. B. für die Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die Quinterne 24679 gegeben, und man sollte die nächst höhere Quinterne bilden, so ist hier die vierte Stelle die letzte, in welche ein höheres Element gesetzt werden kann; das nächst höhere ist 8, daher ist 24688 die verlangte Quinterne, wenn Wiederholungen gestattet sind; im entgegengesetzten Falle aber ist 24689 die gesuchte Combination.

Wendet man nun diese Vorschrift auf die niedrigste Combination der verlangten Classe an, und dann stufenweise auf die jedesmal zuletzt gefundene, so erhält man alle zu einer bestimmten Classe gehörigen Combinationen wohl geordnet; und wenn man endlich auf die Combination kommt, in welcher die höchsten der gegebenen Elemente erscheinen, so ist die ganze Operation geschlossen.

Soll für die Elemente a, b, c, d, e, f die vierte Combinationsklasse ohne Wiederholung, für die Elemente a, b, c, d aber die vierte Combinationsklasse mit Wiederholung gebildet werden, so deuten wir dieß kurz durch die Symbole

$$C^4 \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{pmatrix} \text{ und } C^4_w \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

an, wo wir dann die Operation entweder mit den Elementen a, b, c... selbst, oder mit ihren Zeigern 1, 2, 3... ausführen können.

Nach der eben aufgestellten Regel erhalten wir also:

α) $C^4 \begin{pmatrix} a, b, c, d, e, f \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix}$	β) $C^4_w \begin{pmatrix} a, b, c, d \\ 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}$	
abcd	1111	1444
abce	1112	2222
abcf	1113	2223
abde	1114	2224
abdf	1122	2233
abef	1123	2234
acde	1124	2244
acdf	1133	2333
acef	1134	2334
adef	1144	2344
bcde	1222	2444
bcdf	1223	3333
bcef	1224	3334
bdef	1233	3344
cdef	1234	3444
	1244	4444.
	1333	
	1334	
	1344	

Es ist für sich einleuchtend, daß, wenn ohne Wiederholung combinirt wird, nicht mehrere Klassen denkbar seien, als Elemente gegeben sind, oder, daß der höchste Klassenexponent die Anzahl der Elemente nicht überschreiten könne.

IV. Bei der Bestimmung der Anzahl der Combinationen in einer bestimmten Klasse hat man zu unterscheiden, ob ohne Wiederholungen, oder mit Wiederholungen combinirt wird.

Erster Fall. Die Menge der Combinationen ohne Wiederholung, welche n verschiedene Elemente in der p^{ten} Klasse geben, zu suchen.

Wir wollen diese Menge durch das Symbol $\binom{n}{p}$ bezeichnen, und es mit den Worten „n über p" aussprechen. Dieser Bezeichnung gemäß geben n Elemente in der nächst niedrigern Klasse offenbar $\binom{n}{p-1}$ verschiedene Combinationen.

Man denke sich nun alle Combinationen der n Elemente in der nächst niedrigern $(p-1)^{ten}$ Klasse gebildet, deren Anzahl also $= \binom{n}{p-1}$ ist, und jede dieser $\binom{n}{p-1}$ Complexionen mit jedem der in ihr nicht vorkommenden $[n-(p-1)]$ Elemente verbunden, so erhält man, weil auf diese Art jede einzelne Complexion $n-(p-1)$ Verbindungen gibt, in Allem $\binom{n}{p-1}[n-(p-1)]$ Combinationen der p^{ten} Klasse, unter welchen aber jede nothwendig p mal vorkommen muß. Denn welches Element man auch absondern mag, so erhält man immer eine Combination der $(p-1)^{ten}$ Klasse, welche also unter den obigen Complexionen der $(p-1)^{ten}$ Klasse erscheinen muß; und da sich bei einer p stelligen Combination stufenweise p Elemente absondern lassen, so kann auch jede p stellige Combination auf p verschiedene Arten aus einer $(p-1)$ stelligen abgeleitet werden. Man muß daher die obige Anzahl der erhaltenen p stelligen Combinationen noch durch p dividiren, um die Anzahl der verschiedenen Combinationen der p^{ten} Klasse zu erhalten; also findet man

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}\frac{n-(p-1)}{p} = \binom{n}{p-1}\cdot\frac{n-p+1}{p}.$$

Da nun in der ersten Combinationsklasse jedes Element nur einzeln dasteht, so ist $\binom{n}{1} = n$, also erhält man für

$$p = 2, \binom{n}{2} = \binom{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 . 2}$$

$$p = 3, \binom{n}{3} = \binom{n}{2}\cdot\frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}$$

$$p = 4, \binom{n}{4} = \binom{n}{3}\cdot\frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$$

$$p = 5, \binom{n}{5} = \binom{n}{4}\cdot\frac{n-4}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$$

. . . .

und allgemein

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(p-1)]}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots . p}.$$

Zweiter Fall. Die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse mit Wiederholungen zu bestimmen.

Hier kann p jede beliebige ganze positive Zahl bezeichnen. Wir wollen die gesuchte Zahl durch das Symbol C_p ausdrücken, und aus den gegebenen n Elementen alle Combinationen mit Wiederholungen in

der nächst niedrigern, also in der $(p-1)^{ten}$ Klasse gebildet denken, so ist nach der gewählten Bezeichnung ihre Anzahl $= C_{p-1}$. Man verbinde jede dieser Complexionen mit jedem der gegebenen n Elemente, und überdieß noch mit jedem der in ihr schon vorhandenen $(p-1)$ Elemente, diese mögen verschieden oder gleich sein, so erhält man

$$n \,.\, C_{p-1} + (p-1)\, C_{p-1} = (n + p - 1) \,.\, C_{p-1}$$

Combinationen der p^{ten} Klasse, unter welchen jede mögliche Combination nothwendig p mal vorkommen muß. Denn verbindet man jede Combination der $(p-1)^{ten}$ Klasse mit jedem der gegebenen n Elemente, so kommen allerdings jene Complexionen, die aus lauter verschiedenen Elementen bestehen, p mal zum Vorscheine, was aber bei jenen Complexionen nicht der Fall ist, welche gleiche Elemente enthalten. Damit nun auch diese p mal erscheinen, muß man jede Combinationsform der $(p-1)^{ten}$ Klasse stufenweise auch noch jene Elemente aufnehmen lassen, welche sie bereits enthält, und somit erhalten wir $(n + p - 1)\, C_{p-1}$ Complexionen, welche Zahl die p fache Anzahl aller Combinationen der p^{ten} Klasse bezeichnet, folglich ist

$$C_p = C_{p-1} \,.\, \frac{n+p-1}{p}.$$

Aus der Natur der Sache erhellt von selbst, daß $C_1 = n$ sei, also ist für

$$p = 2;\; C_2 = C_1 \,.\, \frac{n+1}{2} = \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2},$$

$$p = 3;\; C_3 = C_2 \,.\, \frac{n+2}{3} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$p = 4;\; C_4 = C_3 \,.\, \frac{n+3}{4} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

. . . .

und allgemein

$$C_p = C_{p-1} \,.\, \frac{n+p-1}{p} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\,.\,2\,.\,3\;\ldots\;p}.$$

Nun ist aber auch

$$\binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)\,(n+p-2)\,.\,.\,.\,.\,(n+1)\,n}{1 \quad 2 \quad .\,.\,.\,.\,(p-1)\,p};$$

folglich besteht die Gleichung

$$C_p = \binom{n+p-1}{p},$$

d. h. die Anzahl der Combinationen von n Elementen der p^{ten} Klasse mit Wiederholungen ist gleich der Anzahl der Combinationen von $n + p - 1$ Elementen zur p^{ten} Klasse ohne Wiederholungen.

§. 114.

Wir wollen nun aus den gefundenen symbolischen Bezeichnungen einige Folgerungen ableiten, die sich unmittelbar durch die Rechnung ergeben, obgleich sie sich ohne große Mühe auch auf combinatorischem Wege auffinden lassen.

1. Es ist (§. 113, IV.)

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+2)\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(p-1)\,.\,p},$$

wobei der Natur der Sache gemäß p stets eine ganze positive Zahl sein muß. Wir betrachten hier das Symbol $\binom{n}{p}$ als die bequeme Bezeichnung eines Bruches von der angegebenen Form bloß in arithmetischer Beziehung, stellen uns aber vor der Hand auch unter n eine beliebige ganze Zahl vor.

Für $p = n$ wird $\binom{n}{n} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)\,n} = 1,$

und für $p > n$ wird $\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1\,.\,0\,(-1)\,(-2)\,\ldots}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(p-1)\,p} = 0$

nämlich $\binom{n}{n+\alpha} = 0$, wenn $p = n + \alpha$ gesetzt wird.

Ferner ist

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+1)}{1\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,p}\,.\,\frac{(n-p)\,(n-p-1)\,(n-p-2)\,\ldots\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-p-1)\,(n-p)}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+1)\,(n-p)\,(n-p-1)\,(n-p-2)\,\ldots\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,p\times 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-p)}$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

2. Es ist

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-p+2)}{1\,.\,2\,\ldots\,(p-1)}\,.\,\frac{n-p+1}{p} = \binom{n}{p-1}\frac{n-p+1}{p}\ (\text{§. 113, IV.})$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p+2)\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(p-2)\,(p-1)}\,.\,\frac{n}{p} = \binom{n-1}{p-1}\,.\,\frac{n}{p}.$$

3. Ferner ist

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\quad(1)$$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(p+2)\,(p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(n-p)}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\ldots(p+2)\,(p+1) \times p\,(p-1)\,(p-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,(n-p) \times 1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)\,p}$$

$$= \frac{n!}{(n-p!)\,p!},$$

folglich ist auch $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

4. Hieraus ergibt sich also:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \frac{n\,(n-1)\ldots(p+1)}{1\,.\,2\ldots(n-p)}$$

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(p+1)}{1\,.\,2\ldots(n-p-1)} \cdot \frac{n}{n-p} = \binom{n-1}{n-p-1} \cdot \frac{n}{n-p};$$

allein nach Nr. 3 ist auch

$$\binom{n-1}{n-p-1} = \binom{n-1}{(n-1)-p} = \binom{n-1}{p},$$

wenn man daselbst n — 1 statt n schreibt, daher findet man durch Substitution dieses Werthes

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} \frac{n}{n-p}.$$

5. Aus Nr. 2 folgt $\binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n} \cdot \binom{n}{p}$, und

aus Nr. 4 folgt $\binom{n-1}{p} = \frac{n-p}{n} \binom{n}{p}$.

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich demnach

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \left(\frac{p}{n} + \frac{n-p}{n}\right)\binom{n}{p} = \binom{n}{p}.$$

6. Aus der Gleichung $\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} \frac{n-p+1}{p}$ folgt ferner

$$\binom{n}{p-1} = \frac{p}{n-p+1} \cdot \binom{n}{p}.$$

Diese Formel geht

für $p = 1$ über in $\binom{n}{0} = \frac{1}{n} \cdot \binom{n}{1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1} = 1$,

$p = 0$ „ „ $\binom{n}{-1} = \frac{0}{n+1} \cdot \binom{n}{0} = 0$,

$p = -1$ „ „ $\binom{n}{-2} = \frac{-1}{n+2} \cdot \binom{n}{-1} = 0$, u. s. f.

folglich ist allgemein $\binom{n}{-\alpha} = 0$.

7. Es ist allgemein $\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p} \cdot \binom{n}{p-1}$; folglich ist auch für jeden beliebigen Werth von a und b:

$\alpha \binom{a}{\alpha} = (a - \alpha + 1 \binom{a}{\alpha - 1}$ und $\beta \binom{b}{\beta} = (b - \beta + 1) \binom{b}{\beta - 1}$,

also auch

$$\alpha \binom{a}{\alpha} \binom{b}{\beta} = (a - \alpha + 1) \binom{a}{\alpha - 1} \binom{b}{\beta} \text{ und}$$

$$\beta \binom{b}{\beta} \binom{a}{\alpha} = (b - \beta + 1) \binom{b}{\beta - 1} \binom{a}{\alpha}$$

und demnach erhält man durch Addition der beiden letzten Gleichungen:

$$(\alpha + \beta)\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta} = (a - \alpha + 1)\binom{a}{\alpha - 1}\binom{b}{\beta} + (b - \beta + 1)\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta - 1}$$

oder, wenn man $\alpha + \beta = \rho$, also $\beta = \rho - \alpha$ setzt:

$$\rho \binom{a}{\alpha} \binom{b}{\rho - \alpha} =$$

$$= (a - \alpha + 1) \binom{a}{\alpha - 1} \binom{b}{\rho - \alpha} + (b - \rho + \alpha + 1 \binom{a}{\alpha} \binom{b}{\rho - \alpha - 1} \ldots (A).$$

Aus dieser allgemeinen Gleichung erhält man nun wegen $\binom{a}{-1} = 0$, für

$\alpha = 0;\ \rho \binom{a}{0} \binom{b}{\rho} = 0 + (b - \rho + 1) \binom{a}{0} \binom{b}{\rho - 1}$,

$\alpha = 1;\ \rho \binom{a}{1} \binom{b}{\rho - 1} = a \cdot \binom{a}{0} \binom{b}{\rho - 1} +$
$+ (b - \rho + 2) \binom{a}{1} \binom{b}{\rho - 2}$,

$\alpha = 2;\ \rho \binom{a}{2} \binom{b}{\rho - 2} = (a - 1) \binom{a}{1} \binom{b}{\rho - 2} +$
$+ (b - \rho + 3) \binom{a}{2} \binom{b}{\rho - 3}$,

$\alpha = 3;\ \rho \binom{a}{3} \binom{b}{\rho - 3} = (a - 2) \binom{a}{2} \binom{b}{\rho - 3} +$
$+ (b - \rho + 4) \binom{a}{3} \binom{b}{\rho - 4}$,

$\alpha = 4;\ \rho \binom{a}{4} \binom{b}{\rho - 4} = (a - 3) \binom{a}{3} \binom{b}{\rho - 4} +$
$+ (b - \rho + 5) \binom{a}{4} \binom{b}{\rho - 5}$,

. . . .

$$\alpha = \rho - 2;\ \rho \binom{a}{\rho - 2}\binom{b}{2} = (a - \rho + 3)\binom{a}{\rho - 3}\binom{b}{2} +$$
$$+ (b - 1)\binom{a}{\rho - 2}\binom{b}{1},$$

$$\alpha = \rho - 1;\ \rho \binom{a}{\rho - 1}\binom{b}{1} = (a - \rho + 2)\binom{a}{\rho - 2}\binom{b}{1} +$$
$$+ b\,.\binom{a}{\rho - 1}\binom{b}{0},$$

$$\alpha = \rho;\ \rho \binom{a}{\rho}\binom{b}{0} = (a - \rho + 1)\binom{a}{\rho - 1}\binom{b}{0} + 0,$$
$$\text{wegen } \binom{b}{-1} = 0.$$

Addirt man nun diese Gleichungen, und nimmt rechter Hand sogleich je zwei, in Bezug auf die Symbole gleichartige Glieder zusammen, so findet man, wenn $\binom{a}{0} = \binom{b}{0} = 1$ gesetzt wird:

$$\rho\left[\binom{b}{\rho} + \binom{a}{1}\binom{b}{\rho-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{\rho-2} + \binom{a}{3}\binom{b}{\rho-3} + \binom{a}{4}\binom{b}{\rho-4} + \dots\right.$$
$$\left.+ \dots + \binom{a}{\rho - 2}\binom{b}{2} + \binom{a}{\rho - 1}\binom{b}{1} + \binom{a}{\rho}\right] =$$
$$= (a+b-\rho+1)\left[\binom{b}{\rho-1} + \binom{a}{1}\binom{b}{\rho-2} + \binom{a}{2}\binom{b}{\rho-3} + \binom{a}{3}\binom{b}{\rho-4} + \dots\right.$$
$$\left.+ \dots + \binom{a}{\rho - 2}\binom{b}{1} + \binom{a}{\rho - 1}\right].$$

Setzen wir nun Kürze halber

$$\binom{b}{\rho} + \binom{a}{1}\binom{b}{\rho - 1} + \binom{a}{2}\binom{b}{\rho - 2} + \binom{a}{3}\binom{b}{\rho - 3} + \dots$$
$$+ \dots \binom{a}{\rho - 2}\binom{b}{2} + \binom{a}{\rho - 1}\binom{b}{1} + \binom{a}{\rho} = S_\rho,$$

so ist

$$\binom{b}{\rho - 1} + \binom{a}{1}\binom{b}{\rho - 2} + \binom{a}{2}\binom{b}{\rho - 3} + \binom{a}{3}\binom{b}{\rho - 4} + \dots$$
$$+ \dots + \binom{a}{\rho - 3}\binom{b}{2} + \binom{a}{\rho - 2}\binom{b}{1} + \binom{a}{\rho - 1} = S_{\rho-1},$$

denn dieser Ausdruck entsteht aus dem ersten, wenn wir $\rho - 1$ statt ρ schreiben. Setzen wir diese Werthe in die letzte Gleichung, so erhalten wir

$$\rho S_\rho = (a + b - \rho + 1)\, S_{\rho-1}, \text{ folglich}$$

$$S_\rho = S_{\rho-1}\,.\,\frac{a + b - \rho + 1}{\rho}\ \dots\dots\ (B).$$

Da nun

$$S_1 = \binom{b}{1} + \binom{a}{1} = b + a = \binom{a+b}{1}$$

ist, so erhalten wir durch Substitution in der Gleichung (B)

$$\text{für } \rho=2,\ S_2 = S_1 \cdot \frac{a+b-1}{2} = \frac{(a+b)(a+b-1)}{1 \,.\, 2} = \binom{a+b}{2}$$

$$\text{„ } \rho=3,\ S_3 = S_2 \cdot \frac{a+b-2}{3} = \frac{(a+b)(a+b-1)}{1 \quad 2} \cdot \frac{(a+b-2)}{3} = \binom{a+b}{3}$$

$$\text{„ } \rho=4,\ S_4 = S_3 \cdot \frac{a+b-3}{4} = \binom{a+b}{3} \cdot \frac{a+b-3}{4} = \binom{a+b}{4}$$

. . . .

und allgemein ist $S_\varrho = \binom{a+b}{\varrho}$, oder, wenn für S_ϱ die obige Reihe wieder gesetzt wird:

$$\binom{b}{\varrho} + \binom{a}{1}\binom{b}{\varrho-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{\varrho-2} + \binom{a}{3}\binom{b}{\varrho-3} + \dots$$

$$+ \dots + \binom{a}{\varrho-2}\binom{b}{2} + \binom{a}{\varrho-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{\varrho} = \binom{a+b}{\varrho} \quad \dots \text{(C).}$$

Es ist einleuchtend, daß diese Gleichung nicht allein giltig sei, wenn a und b ganze positive Zahlen bezeichnen, sondern auch dann noch, wenn a und b was immer für ganze oder gebrochene, positive oder negative, reelle oder imaginäre Ausdrücke bedeuten.

8) Man findet nun ohne Schwierigkeit noch folgende für die goniometrische Analysis sehr wichtigen Relationen.

$$\alpha)\ \binom{2m}{2p}\binom{m-p}{q} =$$

$$= \frac{2m\,(2m-2)\,(2m-4)\dots(2m-2p-2q+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ \dots\ (2p+2q-1)} \cdot \binom{\frac{2m-1}{2}}{p}\binom{\frac{2p+2q-1}{2}}{q}$$

$$\beta)\ \binom{2m}{2p-1}\binom{m-p}{q} =$$

$$= \frac{2m\,(2m-2)(2m-4)\dots(2m-2p-2q+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ \dots\ (2p+2q-1)} \cdot \binom{\frac{2m-1}{2}}{p-1}\binom{\frac{2p+2q-1}{2}}{q}$$

$$\gamma)\ \binom{2m+1}{2p}\binom{m-p}{q} =$$

$$= \frac{2m\,(2m-2)\,(2m-4)\dots(2m-2p-2q+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ \dots\ (2p+2q-1)} \cdot \binom{\frac{2m+1}{2}}{p}\binom{\frac{2p+2q-1}{2}}{q}$$

$$\delta)\ \binom{2m+1}{2p+1}\binom{m-p}{q} =$$

$$= \frac{(2m+1)\,.\,2m\,(2m-2)\,(2m-4)\ldots(2m-2p-2q+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2p+2q+1)}\left(\begin{matrix}\frac{2m-1}{2}\\ p\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\frac{2p+2q+1}{2}\\ q\end{matrix}\right).$$

Alle hier abgeleiteten Gleichungen, deren Glieder wir hier bloß als arithmetische Resultate betrachtet haben, stehen in sehr enger Verbindung mit der Combinationslehre; wir überlassen jedoch die nähere Exposition dieser Materie dem mündlichen Vortrage, und verweisen denjenigen, welcher sich über diesen Gegenstand ausführlich unterrichten will, auf Herrn Professor von Ettingshausen's vortreffliche combinatorische Analysis, Wien, 1826.

§. 115.

Aufgabe.

Die Anzahl aller Combinationsformen in allen verschiedenen Klassen für die Elemente

$$a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma\, d^\delta \,\ldots\ldots\, l^\lambda\, m^\mu$$

zu bestimmen, wo α, β, γ, δ, ... λ, μ andeuten, wie oft die entsprechenden Elemente in den einzelnen Combinationen erscheinen dürfen.

Auflösung.

Das Element a, für sich betrachtet, gibt die Verbindungen

$$a,\ aa,\ aaa,\ \ldots \text{ oder } a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ a^{\alpha-1},\ a^\alpha,$$

mithin α verschiedene Combinationen. Eben so erhalten wir β Combinationen durch das Element b, γ Verbindungen durch das Element c, u. s. w. und endlich μ Combinationen durch das Element m. Wir haben also bis jetzt

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda + \mu = A_1,$$

verschiedene Verbindungen. Betrachten wir nun die Elemente a und b allein, so geben sie $\alpha + \beta$ Verbindungen, in welchen nur Ein Element wiederholt erscheint, und verbinden wir alle Formen, die bloß a

enthalten, mit allen Formen, welche von b herrühren, so erhalten wir $\alpha\beta$ Verbindungen, welche nur die zwei verschiedenen Elemente a und b wiederholt erhalten, und so haben wir nun

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = \alpha + (1 + \alpha)\,\beta = A_2$$

Verbindungen. — Vereinen wir mit jeder dieser Combinationen jede einzelne der γ Verbindungen, in welchen bloß c erscheint, so erhalten wir offenbar $\gamma\,[\alpha + (1 + \alpha)\,\beta]$ Complexionen, in denen bloß die zwei verschiedenen Elemente a und c, oder b und c, oder endlich die drei Elemente a, b und c vereinigt sind, und da γ Verbindungen nur das Element c enthalten, so erscheint das Element c offenbar in

$$\gamma + \gamma\,[\alpha + (1 + \alpha)\beta] = \gamma + \alpha\gamma + (1 + \alpha)\,\beta\gamma = (1 + \alpha)\gamma + (1 + \alpha)\,\beta\gamma$$
$$= (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,\gamma \text{ Complexionen;}$$

also ist die Anzahl aller Verbindungen, die durch a, b und c entstehen,

$$A_3 = \alpha + (1 + \alpha)\,\beta + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,\gamma.$$

Nun gibt das Element d für sich δ Verbindungen, und zu jeder der vorigen Verbindungen hinzugesetzt, erzeugt es ferner

$$\delta\,[\alpha + (1 + \alpha)\,\beta + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,\gamma]$$

neue Formen; mithin ist die Anzahl aller, das Element d enthaltenden Combinationen

$$= \delta + \alpha\delta + (1 + \alpha)\,\beta\delta + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,\gamma\delta$$
$$= [1 + \alpha + (1 + \alpha)\,\beta + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,\gamma]\,\delta$$
$$= (1 + \alpha)\,[1 + \beta + (1 + \beta)\,\gamma]\,\delta = (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)\,\delta,$$

folglich ist die Anzahl sämmtlicher, durch die vier Elemente a, b, c und d erzeugten Formen

$$A_4 = A_3 + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)\,\delta$$
$$= \alpha + (1 + \alpha)\,\beta + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,\gamma + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)\,\delta.$$

Ziehen wir nun auch das Element e in Betrachtung, dessen Wiederholungsexponent $= \varepsilon$ ist, so finden wir durch dieselben Schlüsse die Anzahl aller, durch die fünf Elemente a, b, c, d, e hervorgebrachten Verbindungen

$$A_5 = A_4 + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)\,(1 + \delta)\,\varepsilon$$
$$= \alpha + (1 + \alpha)\,\beta + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,\gamma + (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)\,\delta$$
$$+ (1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)\,(1 + \delta)\,\varepsilon.$$

Nehmen wir auf gleiche Art nach und nach sämmtliche gegebene n Elemente in Anspruch, so finden wir die Anzahl aller möglichen Combinationsformen

$$A_n = \alpha + (1+\alpha)\beta + (1+\alpha)(1+\beta)\gamma + (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\delta$$
$$+ (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)\varepsilon + \ldots$$
$$+ (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\varkappa)\lambda$$
$$+ (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\lambda)\mu$$

oder wenn wir beide Glieder dieser Gleichung um 1 vermehren, nach gehöriger Reduktion

$$1 + A_n = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)\ldots(1+\varkappa)(1+\lambda)(1+\mu).$$

2. Sind die Wiederholungsexponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sämmtlich der Einheit gleich, d. h. sind keine Wiederholungen gestattet, so ist die Anzahl aller Combinationsformen für die gegebenen n Elemente in sämmtlichen n Klassen

$$A_n = (1+1)(1+1)(1+1)\ldots(1+1) - 1 = 2^n - 1.$$

Zusatz.

Ist die Zahl $Z = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots l^\lambda m^\mu$, wo a, b, c, d…l, m lauter absolute Primzahlen, und die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \lambda, \mu$ ganze positive Zahlen bezeichnen sollen, so ist die Anzahl aller, von der Einheit verschiedenen Zahlen, durch welche Z ohne Rest getheilt werden kann, offenbar

$$= (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)\ldots(1+\lambda)(1+\mu) - 1,$$

oder, wenn die Einheit als Divisor mitgerechnet wird,

$$= (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)\ldots(1+\lambda)(1+\mu).$$

§. 116.

Das Combiniren zu bestimmten Summen.

1. Bei der Anwendung der Combinationslehre auf die Arithmetik ereignet es sich sehr oft, daß von den gegebenen Elementen nur jene Combinationen mit uneingeschränkten Wiederholungen verlangt werden, in welchen die Zeiger der Elemente zusammengenommen eine bestimmte Summe geben. Das Verfahren, durch welches diese Combinationen für sich allein erhalten werden, heißt das Combiniren zu bestimmten Summen.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, denn entweder werden alle möglichen Combinationen zur bestimmten Summe verlangt, oder nur eine einzelne Klasse derselben.

2. Im ersten Falle ist offenbar jene Combination die niedrigste, in welcher bloß das erste Element so oft vorkommt, als die vorgeschriebene Summe Einheiten enthält. Um aber zu jeder einzelnen Combination die nächst höhere zu finden, erhöhe man das vorletzte Element um so wenig als möglich, und lasse auf dasselbe so niedrige Elemente nachfolgen, als es die natürliche Ordnung der Zeiger und die vorgeschriebene Summe erlaubt. Zu diesem Ende theile man den um Eins verminderten Zeiger des letzten Elementes in der vorgelegten Verbindung durch den um Eins vermehrten Zeiger des vorletzten Elementes, setze statt der zwei erwähnten Elemente das durch den Divisor angezeigte Element so oft, als der Quotient anzeigt, und lasse hierauf noch ein Element folgen, dessen Index der Summe des Divisors und des Restes gleich ist. Haben die beiden letzten Elemente denselben Zeiger, oder sind die Zeiger derselben nur um Eins von einander verschieden, so setze man statt dieser beiden Elemente nur ein einziges, dessen Index der Summe jener zwei Zeiger gleichkommt.

So ist z. B. die Complexion $122\overline{13}$ eine Combination zur Summe 18, und daher ist die nächst höhere Verbindung, wegen

$$\frac{13-1}{2+1} = \frac{12}{3} = 4,$$

unserer Regel gemäß 1233333, denn der Rest und der Divisor zusammen sind hier ebenfalls $= 3$.

Für 189 ist die nächst höhere Complexion $1\overline{17}$,

$$\text{weil } \frac{9-1}{8+1} = 0 + \frac{8}{9} \text{ ist;}$$

für $1149\overline{15}$ ist die nächst höhere Complexion $114\overline{10}\,\overline{14}$,

$$\text{weil } \frac{15-1}{9+1} = \frac{14}{10} = 1 + \frac{4}{10} \text{ ist;}$$

für $112\overline{14}$ ist die nächst höhere Complexion 1133334,

$$\text{weil } \frac{14-1}{2+1} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3} \text{ ist.}$$

Durch die wiederholte Anwendung dieser Vorschrift muß man endlich auf eine Combination kommen, die bloß ein Element enthält, dessen Zeiger demnach der festgesetzten Summe gleich sein wird, und also keiner Erhöhung mehr fähig ist; diese Combination ist daher die letzte.

Wir haben hier stillschweigend vorausgesetzt, daß so viele Elemente gegeben seien, als bei dieser Operation mit Berücksichtigung

der bestimmten Summe nur immer verwendet werden können. Hat man demnach alle Combinationsformen zu einer festgesetzten Summe dargestellt, so muß man natürlich alle jene Complexionen außer Acht lassen, in welchen höhere Elemente erscheinen, als wirklich gegeben sind.

Einige Beispiele werden das Ganze erläutern.

Beispiele.

I. Combinationen zur Summe 5.

11111
1112
113
122
14
23
5

II. Combinationen zur Summe 7.

1111111
111112
11113
11122
1114
1123
115
1222
124
133
16
223
25
34
7

III. Combinationen zur Summe 9.

A A′ a
1 1 1111 111
1 1 1111 12
1 1 1111 3 —— b
1 1 11122
1 1 1114
1 1 1123
1 1 115
1 1 1222
1 1 124
1 1 133
1 1 16
1 1 223
1 1 25
1 1 34
1 1 7 —— B′
1 2222
1 224
1 233
1 26
1 35
1 44
1 8 —— B
2223
225
234
27
333
36
45
9

3. Es liegt wohl in der Natur der Sache, daß bei jeder solchen vollständigen Gruppe gut geordneter Combinationsformen zu bestimmten Summen alle jene Complexionen, welche die erste, oder die 2, 3... ersten Stellen mit einerlei Elementen besetzt haben, in den folgenden Stellen ebenfalls gleiche Summen darbieten müssen. Es wird also jede wohl geordnete Gruppe von Combinationen zu irgend einer bestimmten Summe zugleich die Combinationsformen zu allen niedrigern Summen mit enthalten, d. h. jede solche Darstellung ist, wie man sich in der Combinationslehre auszudrücken pflegt, eine Involution. Zieht man demnach an einer beliebigen Zwischenstelle der niedrigsten Combinationsform eine Linie abwärts so weit, bis das zur Linken stehende Element wechselt, und zieht dann von dieser Stelle in horizontaler Richtung gegen die Rechte jene Linie fort, so sondert man durch einen solchen Winkelhaken von der vorgelegten Gruppe ein vollständiges System von Combinationen zu einer niedrigern Summe ab. So trennt im obigen Beispiele III., von den Combinationen zur Summe 9, der Winkelhaken A B sämmtliche Combinationeu zur Summe 8, der Winkelhaken A' B' alle Combinationen zur Summe 7, und der Winkelhaken a b alle Verbindungen zur Summe 3.

4. Wie man aus der vollständigen Darstellung aller Combinationen zu einer bestimmten Summe den Inbegriff aller Verbindungen zu der nächsthöhern Summe ableiten könne, fällt bei der aufmerksamen Betrachtung der oben unter Nro. III. aufgestellten Involution von selbst in die Augen.

5. Wird zu irgend einem Zwecke bloß eine bestimmte, z. B. die r^{te} Klasse von Combinationen zu einer festgesetzten Summe s verlangt, so erhält man die niedrigste Complexion, wenn man die $(r-1)$ ersten Stellen mit dem ersten Elemente besetzt, die r^{te} Stelle aber mit jenem Elemente, dessen Zeiger $= s - (r - 1)$ ist. Um aber aus jeder einzelnen Combination die nächst höhere abzuleiten, gehe man von der Linken gegen die Rechte bis zum entferntesten Elemente, auf welches in der nächsten oder in einer der nächsten Stellen noch ein Element folgt, dessen Zeiger wenigstens um zwei Einheiten größer ist, als der Index jenes erstern Elementes; vertausche dieses mit dem nächst höheren Elemente, besetze mit eben diesem Elemente auch alle folgenden Stellen mit Ausnahme der letzten, in welche jenes Element zu setzen ist, dessen Zeiger die schon vorhandene Zeigersumme zur festgesetzten ergänzt. Kommt man endlich auf eine Complexion, in welcher die Zeiger um weniger als zwei Einheiten von einander verschieden sind, so ist mit derselben die Operation geschlossen.

Beispiele.

Dritte Combinationsklasse zur Summe 10.	Fünfte Combinationsklasse zur Summe 10.
118	11116
127	11125
136	11134
145	11224
226	11233
235	12223
244	22222
334	

Sechste Combinationsklasse zur Summe 15.

1111$\overline{10}$	111336	122226
111129	111345	122235
111138	111444	122244
111147	112227	122334
111156	112236	123333
111228	112245	222225
111237	112335	222234
111246	112344	222333.
111255	113334	

6. Wie man zu bestimmten Summen ohne Wiederholung combiniren könne, erhellt aus dem bereits Gelehrten von selbst; übrigens wollen wir ein Beispiel anführen.

Combinationen ohne Wiederholung zur Summe 25.

I. Klasse.	II. Klasse.	
$\overline{25}$	1$\overline{24}$	7$\overline{18}$
	2$\overline{23}$	8$\overline{17}$
	3$\overline{22}$	9$\overline{16}$
	4$\overline{21}$	10$\overline{15}$
	5$\overline{20}$	11$\overline{14}$
	6$\overline{19}$	12$\overline{13}$

Auf dieselbe Art versuche der Anfänger noch die Combinationen ohne Wiederholung zur Summe 25 in der 3., 4., 5. und 6. Klasse zu bilden. Eine höhere als die 6. Klasse ist nicht möglich (?).

7. Zur Berechnung der Anzahl der Combinationen zu bestimmten Summen hat man keine allgemeine Formel.

§. 117.

Das Variiren.

1. Wenn man mehrere abgesonderte Elementenreihen hat, und man bildet alle möglichen Complexionen, in welchen aus jeder Reihe ein einziges Element erscheint, so nennt man diese Operation das **Variiren**, und jede solche Complexion, die aus so vielen Elementen besteht, als Reihen gegeben sind, heißt eine **Variationsform**, oder schlechtweg eine **Variation**.

2. Es ist daher sehr leicht, die Variationen gegebener Elementenreihen zu bilden. Man verbinde nämlich jedes Element der ersten Reihe mit jedem Elemente der zweiten; jede der so gefundenen Binionen verbinde man stufenweise mit jedem Elemente der dritten Reihe, und so fort mit jeder Variation der ersten (r — 1) Reihen jedes Element der r^{ten} Reihe; so findet man sämmtliche Variationen der r gegebenen Reihen. Sind z. B. die drei Elementenreihen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,$$

gegeben; so erhält man nachstehende Variationen:

$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_1 c_2$	$a_1 b_1 c_3$	$a_1 b_1 c_4$
$a_1 b_2 c_1$	$a_1 b_2 c_2$	$a_1 b_2 c_3$	$a_1 b_2 c_4$
$a_1 b_3 c_1$	$a_1 b_3 c_2$	$a_1 b_3 c_3$	$a_1 b_3 c_4$
$a_1 b_4 c_1$	$a_1 b_4 c_2$	$a_1 b_4 c_3$	$a_1 b_4 c_4$
$a_2 b_1 c_1$	$a_2 b_1 c_2$	$a_2 b_1 c_3$	$a_2 b_1 c_4$
$a_2 b_2 c_1$	$a_2 b_2 c_2$	$a_2 b_2 c_3$	$a_2 b_2 c_4$
$a_2 b_3 c_1$	$a_2 b_3 c_2$	$a_2 b_3 c_3$	$a_2 b_3 c_4$
$a_2 b_4 c_1$	$a_2 b_4 c_2$	$a_2 b_4 c_3$	$a_2 b_4 c_4$
$a_3 b_1 c_1$	$a_3 b_1 c_2$	$a_3 b_1 c_3$	$a_3 b_1 c_4$
$a_3 b_2 c_1$	$a_3 b_2 c_2$	$a_3 b . c_3$	$a_3 b_2 c_4$
$a_3 b_3 c_1$	$a_3 b_3 c_2$	$a_3 b_3 c_3$	$a_3 b_3 c_4$
$a_3 b_4 c_1$	$a_3 b_4 c_2$	$a_3 b_4 c_3$	$a_3 b_4 c_4$
$a_4 b_1 c_1$	$a_4 b_1 c_2$	$a_4 b_1 c_3$	$a_4 b_1 c_4$
$a_4 b_2 c_1$	$a_4 b_2 c_2$	$a_4 b_2 c_3$	$a_4 b_2 c_4$
$a_4 b_3 c_1$	$a_4 b_3 c_2$	$a_4 b_3 c_3$	$a_4 b_3 c_4$
$a_4 b_4 c_1$	$a_4 b_4 c_2$	$a_4 b_4 c_3$	$a_4 b_4 c_4$

3. Sind die Elementenreihen identisch, so sind die Variationen nichts anderes, als die Permutationen aller Combinationen mit Wiederholungen für die Elemente einer dieser Reihen, und der Klassenexponent dieser Combinationen ist der Anzahl der gegebenen Reihen gleich.

Betrachtet man nun die Elemente einer jeden Complexion als Faktoren; so bilden sämmtliche Permutationen einer und derselben Combination das nämliche Produkt, welches demnach in der Gruppe so oft erscheinen muß, wie oft sich die Elemente dieser Combination versetzen lassen. Die Variationen identischer Elementenreihen bilden also den Inbegriff aller, mit ihren zugehörigen Permutationszahlen multiplicirten, Combinationen mit Wiederholungen für die Elemente einer dieser Reihen, und zwar in der sovielten Klasse, als Elementenreihen gegeben sind.

4. Besteht demnach die erste Reihe aus p Elementen, die zweite aus q, die dritte aus r u. s. w., so ist die Anzahl aller Variationsformen offenbar $= p\,q\,r \ldots$ Sind also n Reihen gegeben, und enthält jede m Elemente, so ist die Anzahl aller möglichen Variationen $= m^n$.

Vierter Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzel=Größen.

Erstes Kapitel.

A. Von den Potenzen eingliederiger Größen.

---

§. 118.

1. Eine Größe potenziren, heißt diese 1, 2, 3, . . . n mal als Faktor setzen, wie schon §. 50 gesagt wurde.

2. Da die Anzahl der Faktoren in einem Produkte durch kein Gesetz beschränkt wird, so kann dieselbe Größe (Wurzel) auf unendlich viele verschiedene Potenzen erhoben werden, die nach der Anzahl der sie bildenden Faktoren benannt werden.

3. Die Exponenten dienen nur, die Potenzen (Würden) kürzer und bequemer auszudrücken.

4. Die Potenzen, so wie die einzelnen Faktoren oder Wurzeln derselben sind immer nur Zahlen; denn nur diese lassen sich mit einander multipliciren, und geben Produkte aus gleichen Faktoren.

5. So oft man auch die Einheit mit sich selbst multiplicirt, so ist immer das Produkt $= 1$, oder es ist $1^m = 1$. Aber es ist

$$10^1 = 10,$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100,$$
$$10^3 = 100 \times 10 = 1000,$$
$$10^4 = 1000 \times 10 = 10000,$$ u. s. w.

Die Zahl 10 wird demnach potenzirt, wenn man der Einheit rechts so viele Nullen anhängt, als der gegebene Potenzexponent Einheiten enthält.

§. 119.

Die Bedeutung der negativen Exponenten erhellt aus §. 55, und die §. 50 und 55 angegebenen Multiplikations- und Divisionsregeln gelten auch, wenn die Potenzexponenten negativ sind. Es ist nämlich:

I. $a^m \times a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

II. $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$;

III. $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^n \cdot a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$;

IV. $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$;

V. $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$= a^{-m+n} = a^{-m-(-n)}$.

§. 120.

Da

$(a^{\pm m})^2 = a^{\pm m} \cdot a^{\pm m} = a^{\pm m \pm m} = a^{\pm 2m} = a^{\pm m \cdot 2}$,

$(a^{\pm m})^3 = (a^{\pm m})^2 \cdot a^{\pm m} = a^{\pm 2m \pm m} = a^{\pm 3m} = a^{\pm m \cdot 3}$,

u. s. w. ist; so muß auch allgemein

$(a^{\pm m})^n = a^{\pm m} \cdot a^{\pm m} \cdot a^{\pm m} \ldots = a^{\pm m \pm m \pm m \pm} \ldots = a^{\pm m \cdot n}$

sein. Ferner ist

$(a^{\pm m})^{-n} = \frac{1}{(a^{\pm m})^n} = \frac{1}{a^{\pm m n}} = a^{-(\pm m n)} = a^{\mp m n} = a^{\pm m \times -n}$.

Also wird eine Potenz auf eine andere Potenz erhoben, deren Exponent positiv oder negativ sein mag, wenn man derselben Wurzel das Produkt der beiden Exponenten als neuen Exponenten beifügt.

Beispiele.

I. $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$; II. $(a^{-3})^2 = a^{-3 \cdot 2} = a^{-6}$.

Zusatz.

Weil

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ und } (a^n)^m = a^{nm} = a^{mn},$$

so ist auch $(a^m)^n = (a^n)^m$. Eben so ist auch

$$((a^m)^n)^p = (a^{mn})^p = a^{mnp} = a^{nmp} = a^{npm} = a^{pnm} = \ldots,$$

also

$$[(a^m)^n]^p = [(a^n)^m]^p = [(a^n)^p]^m = [(a^p)^n]^m = \ldots$$

Z. B.:

$$[(a^3)^2]^{-1} = (a^6)^{-1} = a^{-6};\ [(4^2)^{-2}]^{-1} = (4^{-4})^{-1} = 4^4 = 256.$$

§. 121.

Es ist für jeden ganzen positiven Werth von p:

$$(a^m b^n)^p = a^m b^n \,.\, a^m b^n \,.\, a^m b^n \ldots = a^m a^m a^m \ldots \times b^n b^n b^n \ldots$$
$$= a^{m+m+m+} \ldots \times b^{n+n+n+} \ldots = a^{mp} b^{np}.$$

Eben so ist

$$(a^m b^n c^p d^q)^r = [(a^m b^n)(c^p d^q)]^r = (a^m b^n)^r (c^p d^q)^r = a^{mr} b^{nr} c^{pr} d^{qr}.$$

Also wird ein Produkt potenzirt, wenn man jeden Faktor desselben auf die angezeigte Potenz erhebt, und die erhaltenen Resultate mit einander multiplicirt.

Diese Regel ist auch noch gültig, wenn der gegebene Exponent negativ ist. Denn es ist

$$(a^m b^n)^{-p} = \frac{1}{(a^m b^n)^p} = \frac{1}{a^{mp} b^{np}} = a^{-mp} b^{-np} = a^{m \,.\, -p} b^{n \,.\, -p}.$$

Z. B.:

$$12^3 = (3.4)^3 = 3^3.4^3 = 27.64 = 1728;\ (5a^2b^3)^2 = 5^2a^4b^6 = 25a^4b^6.$$

Zusatz 1.

Da

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = (a^m b^{-n})^p = a^{mp} b^{-np} = \frac{a^{mp}}{b^{np}},$$

so wird ein Bruch potenzirt, wenn man sowohl Zähler als Nenner auf die gegebene Potenz erhebt; welche Regel auch gültig ist, wenn der Potenzexponent negativ ist. Denn

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^{-p} = 1 : \left(\frac{a^m}{b^n}\right)^{+p} = 1 : \frac{a^{mp}}{b^{np}} = \frac{b^{np}}{a^{mp}} = a^{-mp}\, b^{np} = \frac{a^{-mp}}{b^{-np}} = \frac{a^{m \cdot -p}}{b^{n \cdot -p}}.$$

z. B.:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25};\ \left(\frac{4a^2b}{7x^n\, y^3}\right)^3 = \frac{4^3.a^6b^3}{7^3x^{3n}\, y^9} = \frac{64a^6\, b^3}{343x^{3n}\, y^9};$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}.$$

Es ist also auch

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

Zusatz 2.

Hieraus folgt, daß der Werth eines Bruches immer kleiner oder größer werde, je nachdem der Bruch ein ächter oder unächter ist, auf je höhere Potenzen derselbe erhoben wird; denn, wenn z. B. $b > a$, so ist auch $\frac{a}{b} > \frac{a^2}{b^2} > \frac{a^3}{b^3}$, u. s. f.; ist aber $b < a$, so ist auch $\frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < \frac{a^3}{b^3}$, u. s. w. So z. B. ist

$\frac{3}{4} > (\frac{3}{4})^2$ oder $\frac{3}{4} > \frac{9}{16}$, aber $\frac{5}{2} < (\frac{5}{2})^2 < (\frac{5}{2})^3$, oder $\frac{5}{2} < \frac{25}{4} < \frac{125}{8}$.

Zusatz 3.

Zugleich erhellt auch, daß durch das Potenziren eines ächten oder unächten Bruches nie eine ganze Zahl erhalten werden könne; denn es sei z. B. $\frac{a}{b}$ ein zur kleinsten Benennung gebrachter Bruch, so kann $\frac{a^n}{b^n} = \frac{aaaa\ldots}{bbbb\ldots}$ keine ganze Zahl sein (§. 70, 2, s).

§ 122.

1. Da

$(+a)^n = +a^n$ und $(+a)^{-n} = \frac{1}{(+a)^n} = \frac{1}{+a^n} = +a^{-n}$,

also $(+a)^{\pm n} = +a^{\pm n}$,

so sind alle Potenzen einer positiven Wurzel auch positiv, der Exponent n mag positiv oder negativ sein.

2. Anders aber verhält es sich bei den Potenzen negativer Wurzeln. Denn da

$$(-a)^2 = -a \times -a = +a^2,$$ so ist auch
$$[(-a)^2]^{\pm n} = (+a^2)^{\pm n}$$
(denn Gleiches auf gleiche Potenzen erhoben, gibt wieder Gleiches),
oder $(-a)^{\pm 2n} = + a^{\pm 2n}$ (§. 120),
d. h. eine negative Wurzel auf eine gerade Potenz erhoben, gibt ein positives Resultat.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $-a^{\pm 1}$, so erhält man
$$(-a)^{\pm 2n \pm 1} = - a^{\pm 2n \pm 1},$$
d. h. die ungeraden Potenzen einer negativen Wurzel sind negativ.

Zusatz.

Die beiden letzten Formeln lassen sich auch durch folgende darstellen;

1) $(\pm a)^{\pm 2n} = + a^{\pm 2n}$ und

2) $(\pm a)^{\pm 2n+1} = \pm a^{\pm 2n+1}$,

d. h. alle geraden Potenzen sind positiv, und die ungeraden haben das Zeichen der Wurzel.

Beispiele.

I. $(3a^2 b^3)^2 = 3^2 a^4 b^6 = 9a^4 b^6$.

II. $(-5m^3 x^3)^2 = + 25 m^6 x^6$.

III. $\left(-\frac{6m^2 x}{7n^3 y^2}\right)^{-3} = \left(-\frac{7n^3 y^2}{6m^2 x}\right)^3 = -\frac{343 n^9 y^6}{216 m^6 x^3}$.

B. Von den eingliederigen Wurzelgrößen.

§. 123.

1. Aus einer gegebenen Zahl die 2^{te}, 3^{te}, 4^{te} ... n^{te} Wurzel, oder die Wurzel des n^{ten} Grades ausziehen, heißt nichts anderes, als eine solche Zahl finden, die 2, 3, 4 ... nmal als Faktor gesetzt, oder zur 2^{ten}, 3^{ten} 4^{ten} ... n^{ten} Potenz erhoben, die gegebene Zahl hervorbringt. Das Wurzelausziehen ist also dem Potenziren gerade entgegengesetzt; denn Potenziren heißt, Produkte aus vollkommen

gleichen Faktoren bilden, und aus einer gegebenen Zahl die Wurzel des n^{ten} Grades ausziehen, heißt nichts anderes, als diese Zahl in ein Produkt von n vollkommen gleichen Faktoren auflösen, und diesen identischen Faktor angeben.

2. Das Wurzelausziehen wird dadurch angedeutet, daß man der gegebenen Zahl das Zeichen $\sqrt{}$ (gleichsam ein verzogenes r, den Anfangsbuchstaben des Wortes radix, Wurzel) vorsetzt, und in dasselbe die Zahl schreibt, welche anzeigt, die wievielte Wurzel verlangt wird. Diese Zahl heißt Wurzel- oder Radikal-Exponent.

So z. B. bezeichnet $\sqrt[2]{A}$, oder gewöhnlicher $\sqrt{A}$ die 2te, $\sqrt[3]{A}$ die 3te Wurzel aus der Zahl A. Jene heißt auch Quadratwurzel, und diese die Kubikwurzel.

Soll aus einer komplexen Größe, z. B. aus $a^2 + 2ab + b^2$ irgend eine Wurzel, z. B. die 5te gezogen werden, so schreibt man

$$\sqrt[5]{(a^2 + 2ab + b^2)} \text{ oder } \sqrt[5]{a^2 + 2ab + b^2}.$$

3. Jeder Ausdruck, dem das Wurzelzeichen vorgesetzt ist, oder der das Ausziehen der Wurzel irgend eines Grades aus einer beliebigen Zahl fordert, heißt eine Wurzelgröße (Radikalgröße), und Wurzelgrößen mit demselben Wurzelexponenten, wie $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$, heißen gleichnamig. Dagegen heißen gleichnamige Wurzelgrößen gleichartig (homogen), wenn sie unter dem Wurzelzeichen einerlei Zahlen enthalten, wie z. B. $m\sqrt[n]{a}$ und $p\sqrt[n]{a}$. Endlich heißt eine Wurzel gerade oder ungerade, je nachdem der Wurzelexponent gerade oder ungerade ist.

4. Eine Zahl, die sich genau in n vollkommen gleiche Faktoren zerlegen läßt, heißt eine vollkommene Potenz des n^{ten} Grades. Bezieht man irgend eine ganze Zahl A auf die n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen, also auf die Zahlenreihe 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, $5^n \ldots a^n$, $(a+1)^n$, $(a+2)^n$, ... und die Zahl A liegt zwischen a^n und $(a+1)^n$, d. h. wenn $A > a^n$ und $A < (a+1)^n$, so ist A eine unvollkommene Potenz des n^{ten} Grades, und a^n heißt dann die nächst kleinere n^{te} Potenz in Bezug auf A.

Also läßt sich aus vollkommenen Potenzen des n^{ten} Grades auch die n^{te} Wurzel vollkommen genau angeben, und man nennt dann die Wurzel selbst rational (commensurabel).

Eine Wurzel, die sich weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch vollkommen genau ausdrücken läßt, heißt unvollständig oder irrational (incommensurabel).

5. Bezeichnet man die durch $\sqrt[n]{a}$ vorgestellte Zahl durch α, so muß dem aufgestellten Begriffe gemäß $\alpha^n = a$ sein. Ist nämlich

$$\sqrt[n]{a} = \alpha, \text{ so ist auch } a = \alpha^n \text{ und umgekehrt.}$$

Ferner folgt hieraus $(\sqrt[n]{a})^n = \alpha^n = a$, nämlich $(\sqrt[n]{a})^n = a$, und da auch $\sqrt[n]{a^n} = a$, indem $(a)^n = a^n$ ist; so haben wir die Gleichung

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}.$$

Eine Zahl wird daher dem Werthe nach nicht geändert, wenn man aus ihr die Wurzel irgend eines Grades auszieht, und das Resultat wieder zur Potenz desselben Grades erhebt, und umgekehrt.

§. 124.

Lehrsatz.

Gleichnamige Wurzeln aus gleichen Zahlen sind gleich, aus ungleichen Zahlen aber ungleich.

Beweis.

Es sei 1) $a = b$, so ist auch $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$; denn wäre $\sqrt[n]{a} \gtrless \sqrt[n]{b}$ so wäre auch $(\sqrt[n]{a})^n \gtrless (\sqrt[n]{b})^n$; d. h. es wäre $a \gtrless b$, was der Voraussetzung widerspricht.

Es sei 2) $a > b$, so ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; denn wäre $\sqrt[n]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[n]{b}$, so müßte auch $(\sqrt[n]{a})^n \overline{\overline{<}} (\sqrt[n]{b})^n$, d. h. es müßte $a \overline{\overline{<}} b$ sein, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist.

§. 125.

Lehrsatz.

1. Die Wurzel irgend eines Grades aus einem Produkte AB ist gleich dem Produkte der gleichnamigen Wurzeln aus den Faktoren desselben.

2) Die Wurzel aus einem Bruche oder Quotienten ist gleich der gleichnamigen Wurzel aus dem Zähler, dividirt durch die gleichnamige Wurzel aus dem Nenner.

Es ist nämlich

$$\sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \text{ und } \sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Beweis.

1) Es ist $(\sqrt[n]{AB})^n = AB$ (§. 123, 5); aber auch

$$(\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B})^n = (\sqrt[n]{A})^n (\sqrt[n]{B})^n \text{ (§. 124)} = A \cdot B, \text{ also ist}$$

$$(\sqrt[n]{AB})^n = (\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B})^n.$$

Sind aber die gleichnamigen Potenzen zweier Zahlen einander gleich, so müssen diese Zahlen selbst einander gleich sein, folglich ist

$$\sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}.$$

2) Nach §. 123, 5, ist ferner

$$\left(\sqrt[n]{\frac{A}{B}}\right)^n = \frac{A}{B} \text{ und (n. §. 121, Zus. 1) } \left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n} = \frac{A}{B},$$

also ist auch

$$\left(\sqrt[n]{\frac{A}{B}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n, \text{ folglich } \sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Zusätze.

1. Da $\sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ und $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ ist, so ist auch umgekehrt

$$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB} \text{ und } \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}};$$

d. h. zwei gleichnamige Wurzelgrößen, oder Wurzelgrößen desselben Grades, werden mit einander multiplicirt, wenn man dem Produkte aus den Zahlen unter dem Wurzelzeichen dasselbe Wurzelzeichen vor-

setzt; und zwei gleichnamige Wurzeln werden durch einander dividirt, wenn man die Zahlen unter dem Wurzelzeichen durch einander dividirt, und aus dem gefundenen Quotienten die Wurzel desselben Grades auszieht. So z. B. ist

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2,$$

weil $2^3 = 8$ ist, und

$$\sqrt[5]{2240} : \sqrt[5]{70} = \sqrt[5]{\tfrac{2240}{70}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2.$$

2. Es ist also auch

$$\sqrt[n]{ABCD \ldots} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C} \cdot \sqrt[n]{D} \ldots$$

und umgekehrt

$$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C} \cdot \sqrt[n]{D} = \sqrt[n]{ABCD}.$$

3. Da $A = \sqrt[n]{A^n}$ (nach §. 123, 5) ist, so ist auch unserem Satze gemäß

$$A \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n \cdot B},$$

d. h. der rationale Koefficient einer Wurzelgröße wird unter das Wurzelzeichen gebracht, wenn man denselben auf die Potenz vom Grade des Wurzelexponenten erhebt, und aus dem Produkte dieser Potenz in die Größe unter dem Wurzelzeichen die Wurzel desselben Grades auszieht. So z. B. ist

$$n\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{an^3},\ 3\sqrt{2a^3} = \sqrt{3^2 \cdot 2a^3} = \sqrt{18a^3},$$

$$6\sqrt{\tfrac{5}{12}} = \sqrt{6^2 \cdot \tfrac{5}{12}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 5}{12}} = \sqrt{15},\ a^2\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{2n} b}$$

und $2a^3b^2\sqrt[n]{\dfrac{a^4}{2b^3}} = \sqrt[n]{2^n a^{3n} b^{2n} \cdot \dfrac{a^4}{2b^3}} = \sqrt[n]{2^{n-1} a^{3n+4} b^{2n-3}}$

4. Setzen wir in der Gleichung $A\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n B}$ statt A den Werth $\frac{1}{a}$, so wird

$$\frac{1}{a}\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n B} = \sqrt[n]{\frac{B}{a^n}},\ \text{nämlich}\ \frac{\sqrt[n]{B}}{a} = \sqrt[n]{\frac{B}{a^n}}.$$

So z. B. ist $\frac{1}{3}\sqrt{54} = \sqrt{\frac{54}{9}} = \sqrt{6}$.

5. Es ist $\sqrt[n]{A^{nr}} = \sqrt[n]{(A^r)^n} = A^r$ (§. 123, 5).

6. Ist in dem Ausdrucke $\sqrt[n]{A^s}$ der Exponent $s = nr + \nu$, wo $\nu < n$ sein soll, so erhalten wir

$$\sqrt[n]{A^s} = \sqrt[n]{A^{nr+\nu}} = \sqrt[n]{A^{nr}.A^\nu} = \sqrt[n]{A^{nr}}.\sqrt[n]{A^\nu} = \sqrt[n]{(A^r)^n}.\sqrt[n]{A^\nu}$$
$$= A^r.\sqrt[n]{A^\nu} \text{ (Zus. 5)},$$

Eben so folgt aus der Gleichung $A.\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^nB}$ (Zus. 3). umgekehrt $\sqrt[n]{A^nB} = A.\sqrt[n]{B}$. Wir können also in vielen Fällen eine Wurzelgröße in ein Produkt aus zwei Faktoren auflösen, deren einer wenigstens eine rationale Zahl ist.

7. Es ist $\sqrt[n]{A^{-r}} = \sqrt[n]{\frac{1}{A^r}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{A^r}} = \frac{1}{\sqrt[n]{A^r}}$.

8. Es ist für jeden ganzen positiven Werth von r

$$(\sqrt[n]{A})^r = \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{A}\ldots\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(A.A.A\ldots A)} = \sqrt[n]{A^r}$$

und daher

$$(\sqrt[n]{A})^{-r} = \frac{1}{(\sqrt[n]{A})^r} = \frac{1}{\sqrt[n]{A^r}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{A^r}} = \sqrt[n]{\frac{1}{A_r}} = \sqrt[n]{A^{-r}}$$

oder, wenn wir beide Fälle zusammen nehmen,

$$(\sqrt[n]{A})^{\pm r} = \sqrt[n]{A^{\pm r}};$$

d. h. eine Wurzelgröße wird potenzirt, wenn man die Zahl unter dem Radikalzeichen zur angezeigten Potenz erhebt, und das Wurzelzeichen ungeändert läßt.

So z. B. ist

$$(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} \text{ und } (\sqrt[5]{\tfrac{2}{3}})^{-2} = \sqrt[5]{(\tfrac{2}{3})^{-2}} = \sqrt[5]{(\tfrac{3}{2})^2} = \sqrt[5]{\tfrac{9}{4}}.$$

§. 126.

Wir wollen nun untersuchen, was eine Wurzelgröße mit negativem Radikalexponenten bedeute. Es sei a was immer für eine positive Zahl, n aber bezeichne eine beliebige ganze Zahl, so ist, wenn wir $\sqrt[-n]{a^r} = b$ setzen, dem aufgestellten Begriffe gemäß $a^r = (b)^{-n} = b^{-n}$,

also auch $(a^r)^{-1} = (b^{-n})^{-1}$, oder $a^{-r} = b^n$, und hieraus folgt $b = \sqrt[n]{a^{-r}}$; vermöge der Voraussetzung aber ist $b = \sqrt[-n]{a^r}$, also ist auch

$$\sqrt[-n]{a^r} = \sqrt[n]{a^{-r}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^r}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^r}}.$$

Man kann demnach das Zeichen des negativen Wurzelexponenten ändern, wenn man zugleich das Zeichen des Potenzexponenten in das entgegengesetzte verwandelt, So z. B. ist

$$\sqrt[-3]{64} = \sqrt[-3]{4^3} = \sqrt[3]{4^{-3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^3}} = \tfrac{1}{4}.$$

Zusatz.

Es ist demnach auch $\sqrt[-n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{a^m}$, und setzen wir hier $m = n$, so wird $\sqrt[-n]{a^{-n}} = \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$. Es ist also allgemein

$$(\sqrt[\pm n]{a})^{\pm n} = a.$$

§. 127.

1. Da $A = \sqrt[n]{A^n} = (\sqrt[n]{A})^n$ ist, es mag n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnen, so wird, wenn $A = a^m$ gesetzt wird, wo auch m eine beliebige ganze Zahl sein mag,

$$a^m = \sqrt[n]{(a^m)^n} = \sqrt[n]{a^{mn}}.$$

2. Nimmt man nun $mn = p$, also $m = \frac{p}{n}$, so geht die letzte Gleichung über in

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}, \text{ oder umgekehrt } \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}.$$

Dividirt man demnach den Potenzexponenten p durch n, d. i. durch einen seiner Faktoren, so ist dieß eben so viel, als wenn man aus der vorgelegten Potenz die n^te Wurzel auszieht. Ist also der Potenzexponent p ein Vielfaches des Wurzelexponenten n, so wird die n^te Wurzel aus a^p ausgezogen, wenn man den Potenzexponenten durch den

Wurzelexponenten dividirt, und den Quotienten $\frac{p}{n}$ als Exponenten von a nimmt. So z. B. ist

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6\,:\,} = a^2,\ \sqrt[4]{a^{12}} = a^{12\,:\,4} = a^3,$$

denn $(a^2)^3 = a^6$ und $(a^3)^4 = a^{12}$.

3. Aus der Gleichung $a^m = \sqrt[n]{a^{mn}} = (\sqrt[n]{a})^{mn}$ folgt ferner $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$, oder umgekehrt $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, oder wenn wir $a = b^r$, also $a^m = (b^r)^m = b^{mr}$ setzen,

$$\sqrt[n]{b^r} = \sqrt[mn]{b^{r\,.\,m}};$$

d. h. *eine Wurzel wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man den Wurzelexponenten und den Potenzexponenten mit einer beliebigen ganzen Zahl m multiplicirt.*

Nehmen wir diese Gleichung umgekehrt, so wird $\sqrt[mn]{b^{mr}} = \sqrt[n]{b^r}$, oder wenn $mn = \alpha$ und $mr = \beta$, mithin $n = \alpha : m$ und $r = \beta : m$ gesetzt wird:

$$\sqrt[\alpha]{b^\beta} = \sqrt[\alpha:m]{b^{\beta\,:\,m}};$$

d. h. *eine Wurzel wird der Quantität nach nicht geändert, wenn man den Wurzelexponenten und den Potenzexponenten derselben durch einen gemeinschaftlichen Faktor dividirt.*

Der erste Satz zeigt uns demnach eine Wurzel von einem beliebigen Grade in eine andere zu transformiren, deren Wurzelexponent ein beliebiges Vielfaches des gegebenen Wurzelexponenten ist; er lehrt uns demnach auch, gegebene Radikalgrößen auf denselben Wurzelexponenten zurück führen; der letztere Satz aber gibt uns ein Mittel an die Hand, eine Radikalgröße in ihrer einfachsten Gestalt darzustellen.

Beispiele.

α) Man bringe $\sqrt{a^3}$ auf den Wurzelexpenenten 6. Da $6 = 2.3$, so ist $\sqrt{a^3} = \sqrt[2\cdot3]{a^{3\,\cdot\,3}} = \sqrt[6]{a^9}$.

β) Man bringe $\sqrt[3]{a^2\,b^5}$ auf den Wurzelexponenten 12. Weil $12 = 3\ .\ 4$, so ist $\sqrt[3]{a^2\,b^5} = \sqrt[3\cdot4]{(a^2\,b^5)^4} = \sqrt[12]{a^8\,b^{20}}$.

γ) Man bringe die Ausdrücke $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt[4]{ab}$ und $\sqrt[6]{\frac{a^5 b^2}{c^5}}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Wurzelexponenten. — Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Wurzelexponenten 3, 2, 4 und 6 ist 12, also sind sämmtliche Ausdrücke auf den Exponenten 12 zu reduciren. Es ist aber

$$\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3\cdot 4]{a^{2\cdot 4}}=\sqrt[12]{a^8};\ \sqrt{b}=\sqrt[2\cdot 6]{b^6}=\sqrt[12]{b^6};\ \sqrt[4]{ab}=\sqrt[3\cdot 4]{(ab)^3}=\sqrt[12]{a^3 b^3}$$

und endlich

$$\sqrt[6]{\frac{a^5 b^2}{c^5}}=\sqrt[6\cdot 2]{\left(\frac{a^5 b^2}{c^5}\right)^2}=\sqrt[12]{\frac{a^{10} b^4}{c^{10}}}.$$

δ) Man bringe $\sqrt[30]{a^{10} b^{15}}$ auf die einfachste Form. Es ist

$$\sqrt[30]{a^{10} b^{15}}=\sqrt[30]{(a^2 b^3)^5}=\sqrt[6]{(a^2 b^3)}.$$

4. Setzt man in der Gleichung $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$ (Nro. 3) nun $a=\sqrt[m]{A}$, also $a^m=A$; so wird

$$\sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})}=\sqrt[nm]{A}.$$

Soll man demnach aus einer Wurzel $\sqrt[m]{A}$ wieder die Wurzel des n^{ten} Grades ausziehen, so erhält man dasselbe Resultat, wenn man aus A die so vielte Wurzel auszieht, als das Produkt mn der beiden Wurzelexponenten anzeigt.

So z. B. ist $\sqrt[3]{(\sqrt{64})}=\sqrt[6]{64}=2$, weil $2^6=64$ ist.

Durch die wiederholte Anwendung dieser Regel findet man auch, daß

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{(\sqrt[p]{A})}}=\sqrt[mn]{(\sqrt[p]{A})}=\sqrt[mnp]{A}$$

sei, und da mn = nm, ferner

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})}=\sqrt[mn]{A} \text{ und } \sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})}=\sqrt[nm]{A}=\sqrt[mn]{A}$$

ist, so ist auch

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})}=\sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})};$$

d. h. es ist einerlei, in welcher Ordnung die angedeuteten Wurzelexponenten genommen werden.

5. Da $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})} = \sqrt[mn]{A}$ ist, so muß auch umgekehrt

$$\sqrt[mn]{A} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})}$$

sein. Läßt sich demnach ein Wurzelexponent in Faktoren zerlegen, so kann man die verlangte Wurzel als Wurzel aus einer andern Wurzelgröße darstellen, wodurch die Rechnung nicht selten bedeutend erleichtert und vereinfacht wird. So z. B. ist

$$\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{(\sqrt[3]{a^9})} = \sqrt{(\sqrt[3]{a^3})^3} = \sqrt{(a)^3} = \sqrt{a^3} \text{ und}$$

$$\sqrt[15]{32} = \sqrt[3]{(\sqrt[5]{32})} = \sqrt[3]{(\sqrt[5]{2^5})} = \sqrt[3]{2}.$$

6. Wenn n durch r theilbar ist, so erhält man

$$(\sqrt[n]{a})^r = \sqrt[n]{(a)^r} = \sqrt[n]{a^r} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{r:r}} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a}, \text{ nämlich } (\sqrt[n]{a})^r = \sqrt[\frac{n}{r}]{a}:$$

d. h. eine Wurzel wird auch zur r^{ten} Potenz erhoben, wenn man den Wurzelexponenten durch den Potenzexponenten dividirt, und die Größe unter dem Wurzelzeichen ungeändert läßt. So z. B. ist

$$(\sqrt[6]{a})^3 = \sqrt[6:3]{a} = \sqrt{a}.$$

§. 128.

Wir haben (§. 127, 2) gesehen, daß, wenn p ein Vielfaches von n ist, $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ sei. Allein wenn auch p nicht theilbar ist durch n, pflegt man dennoch den Werth von $\sqrt[n]{a^p}$ ebenfalls durch $a^{\frac{p}{n}}$ anzudeuten, und nennt dann einen solchen Ausdruck eine **Potenz mit gebrochenem Exponenten** oder eine **Bruchpotenz**, obgleich der Ausdruck $a^{\frac{p}{n}}$ dem aufgestellten Begriffe einer **Potenz** nicht mehr ganz entspricht. Ist also $\frac{p}{n}$ keine ganze Zahl, so verstehen wir unter $a^{\frac{p}{n}}$ den Werth von $\sqrt[n]{a^p}$, oder der Ausdruck $a^{\frac{p}{n}}$ sagt nichts anderes, als wir sollen die Potenz a^p als ein Produkt aus n identischen Faktoren betrachten und diesen Faktor bestimmen. Ob und in wie fern dieß möglich sei, werden wir später sehen. Daß übrigens diese willkürliche Bezeichnungsart nicht nur bequem, sondern auch zweckmäßig sei, erhellt aus folgender Betrachtung. Da das Wurzelausziehen eine dem Po-

tenziren gerade entgegengesetzte Rechnungsoperation ist (§. 123), so werden wir bei demselben auch eine dem beim Potenziren erforderlichen Verfahren entgegengesetzte Operation vornehmen müssen. Nun werden beim Potenziren die Exponenten mit einander multiplicirt, nämlich es ist

$$(a^p)^n = a^{p \cdot n},$$

folglich werden wir beim Wurzelextrahiren den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiren — denn die Division ist der Multiplikation entgegengesetzt —, oder wir werden $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ setzen müssen.

Wir werden demnach die Ausdrücke $\sqrt[n]{a^p}$ und $a^{\frac{p}{n}}$ in der Folge immer als identisch betrachten.

Ist $\frac{p}{n}$ eine ganze Zahl, so nennt man die Wurzelgröße $\sqrt[n]{a^p}$ oder $a^{\frac{p}{n}}$ eine rationale oder meßbare (commensurable) Zahl, im entgegengesetzten Falle aber eine irrationale oder unausmeßbare (incommensurable) Zahl (§. 123, 4).

Die irrationalen Wurzeln lassen sich demnach als Bruchpotenzen oder gebrochene Potenzen darstellen.

Zusätze.

1. Wenn $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$, ohne daß $p = q$ und $n = m$ ist, so ist dennoch $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{q}{m}}$ oder $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$. Denn aus der Voraussetzung $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ folgt $mp = nq$, mithin ist auch $a^{mp} = a^{nq}$, folglich auch $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[mn]{a^{nq}}$, d. i. $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ (nach §. 127, 3), oder $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{q}{m}}$.

2. Ist p eine absolute Primzahl, und n eine von der Einheit verschiedene ganze Zahl, so hat $\sqrt[n]{a^p}$ nur dann einen rationalen oder vollkommen genau angebbaren Werth, wenn $n = p$ ist. Bezeichnet aber p eine zusammengesetzte Zahl, so lassen sich aus der Größe a^p so viele verschiedene rationale Wurzeln ausziehen, wie viele verschiedene Divisoren der Exponent p hat. Für $p = 6$ z. B. sind drei rationale Wurzeln möglich, nämlich die zweite, dritte und sechste, weil 2, 3 und 6 Divisoren von 6 sind. Es ist also

$$\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3,\ \sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2 \text{ und } \sqrt[6]{a^6} = a^{\frac{6}{6}} = a^1 = a.$$

3. Da $\frac{p}{n} = \frac{mp}{mn} = \frac{p:\nu}{n:\nu}$ ist, so ist nach Nro. 1 auch

$$a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{mp}{mn}} = a^{\frac{p:\nu}{n:\nu}},$$

oder nach der andern Schreibart:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[\frac{n}{\nu}]{a^{\frac{p}{\nu}}};$$

d. h. eine Wurzelgröße bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man ihren Potenzexponenten und Wurzelexponenten durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt (vergl. §. 127, 3).

4. Es ist also

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a^p} = \sqrt[\frac{n}{m}.m]{a^{p.m}} = \sqrt[n]{a^{mp}},$$

woraus die Bedeutung des gebrochenen Wurzelexponenten von selbst erhellt.

§. 129.

Lehrsatz.

Stellt man die Wurzelgrößen als Bruchpotenzen dar, so lassen sich alle Rechnungsoperationen mit denselben eben so ausführen, wie mit Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, und die erhaltenen Resultate lassen sich wieder als Wurzelgrößen ausdrücken.

Beweis.

Es kommt hier nur darauf an, zu zeigen, daß die Resultate, welche man erhält, wenn man die Wurzelgrößen als Bruchpotenzen darstellt, und sie wie Potenzen mit ganzen Exponenten behandelt, gleich seien den Resultaten, welche wir (§. 125 — 128) gefunden haben.

1. Rücksichtlich der Multiplikation ist

$$\sqrt[n]{a^r} . \sqrt[m]{a^\nu} = \sqrt[mn]{a^{mr}} . \sqrt[mn]{a^{n\nu}} = \sqrt[mn]{a^{mr+n\nu}} \text{ und}$$

$$a^{\frac{r}{n}} . a^{\frac{\nu}{m}} = a^{\frac{r}{n}+\frac{\nu}{m}} = a^{\frac{mr+n\nu}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{mr+n\nu}},$$

welches Resultat mit dem vorigen übereinstimmt.

2. Rücksichtlich der Division ist

$$\sqrt[n]{a^r} : \sqrt[m]{a^\nu} = \sqrt[mn]{a^{mr}} : \sqrt[mn]{a^{n\nu}} = \sqrt[mn]{a^{mr} : a^{n\nu}} = \sqrt[mn]{a^{mr-n\nu}}$$

und

$$a^{\frac{r}{n}} : a^{\frac{\nu}{m}} = a^{\frac{r}{n}-\frac{\nu}{m}} = a^{\frac{mr-n\nu}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{mr-n\nu}},$$

welcher Ausdruck mit dem vorigen identisch ist.

3. Es ist ferner

$$(\sqrt[n]{ab})^m = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} \text{ und}$$

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}.$$

Es stimmen also auch hier die Resultate überein

4. Ferner ist

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^r = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^r = \frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}},$$

und wenn man sich der gebrochenen Exponenten bedient,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{n}} = \frac{a^{\frac{r}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}},$$

welcher Quotient derselbe ist wie vorhin.

5. Endlich ist

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^\nu})^r} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^{r\nu}})} = \sqrt[mn]{a^{r\nu}},$$

und nach der andern Bezeichnungsart ist

$$(a^{\frac{\nu}{n}})^{\frac{r}{m}} = a^{\frac{\nu}{n} \cdot \frac{r}{m}} = a^{\frac{r\nu}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{r\nu}},$$

also dasselbe Resultat wie vorhin.

Auf dieselbe Art zeigt man auch, daß diese Regeln noch giltig seien, wenn die Exponenten negative gebrochene Zahlen bezeichnen. Die für die Multiplikation, Division, das Potenziren und das Wurzelausziehen gegebenen Regeln gelten also für alle positive und negative, ganze oder gebrochene Werthe der Exponenten.

§. 130.

1. Wurzelgrößen werden addirt oder subtrahirt, wenn man dieselben durch das Additions- oder Subtraktionszeichen verbindet, und die etwaigen gleichartigen Größen reducirt.

B e i s p i e l e.

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} &(3\sqrt{2} - 5\sqrt[3]{3} + 7\sqrt{5}) \\ +\,&(4\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} - 5\sqrt{5}) \\ \hline =\,&7\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} + 2\sqrt{5} \text{ Summe.} \end{aligned}$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} &(5\sqrt{3} + 7\sqrt[3]{16} - 4\sqrt{3}\sqrt[3]{32}) \text{ Min.} \\ -\,&(2\sqrt{12} - 3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{48}\sqrt[3]{4}) \text{ Subt.} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{aligned} &5\sqrt{3} + 14\sqrt[3]{2} - 8\sqrt{3}\sqrt[3]{4} \text{ (Min.} \\ -\,&(4\sqrt{3} - 3\sqrt[3]{2} - 24\sqrt{3}\sqrt[3]{4}) \text{ Subt.} \\ &- \quad + \quad + \end{aligned}\right\} (\S.\ 125,\ 6).$$

$$= \sqrt{3} + 17\sqrt[3]{2} + 16\sqrt{3}\sqrt[3]{4} \text{ (Rest).}$$

2. Die Regeln für die Multiplikation der Radikalgrößen sind in den §§. 125 Zus. und 129 enthalten, und es ist nur noch zu bemerken, daß die rationalen Koefficienten auch mit einander multiplicirt werden müssen: es ist nämlich

$$a\sqrt[m]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[m]{b}\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[mn]{b^n d^m}.$$

B e i s p i e l e.

$$\text{I. } 3\sqrt{2}\,.\,5\sqrt{18} = 3\,.\,5\sqrt{2\,.\,18} = 15\sqrt{36} = 15\,.\,6 = 90;$$

$$\text{II. } 4\sqrt[3]{12}\,.\,3\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{12\,.\,2} = 12\sqrt[3]{24} = 12\sqrt[3]{8\,.\,3} = 24\sqrt[3]{3};$$

$$\text{III. } 5\sqrt{6} \times 4\sqrt[3]{9} = 20\sqrt[6]{6^3\,.\,9^2} = 20\sqrt[6]{(2\,.\,3)^3\,.\,(3^2)^2}$$

$$= 20\sqrt[6]{2^3\,.\,3^3\,.\,3^4} = 20\sqrt[6]{2^3\,3^7} = 60\sqrt[6]{2^3\,.\,3} = 60\sqrt[6]{24};$$

$$\text{IV. } \tfrac{4}{5}\sqrt[3]{18\sqrt{1000}} \times \tfrac{7}{6}\sqrt[3]{15\sqrt{10}} = \frac{4\,.\,7}{5\,.\,6}\sqrt[3]{18\sqrt{10^3}\,.\,15\sqrt{10}}$$

$$= \tfrac{14}{15}\sqrt[3]{270\sqrt{10^4}} = \tfrac{14}{15}\sqrt[3]{27\,.\,10\,.\,10^2} = \tfrac{14}{15}\sqrt[3]{3^3\,.\,10^3} = \tfrac{14}{15}\,.\,3\,.\,10 = 28.$$

Sind die Faktoren mehrnamig, so bleibt die Regel dieselbe, indem man nur nach §. 51 oder 52 verfährt. Z. B.:

$$(6 + 5\sqrt{2})\,.\,6\sqrt{6} = 36\sqrt{6} + 30\sqrt{12} = 36\sqrt{6} + 30\sqrt{4\,.\,3}$$

$$= 36\sqrt{6} + 60\sqrt{3} = 12\,(3\sqrt{6} + 5\sqrt{3});$$

$$(3 - 2\sqrt{2})\,(5\sqrt{18} - 4) = 15\sqrt{18} - 10\sqrt{2\,.\,18} - 12 + 8\sqrt{2}$$

$$= 15\sqrt{9\,.\,2} - 10\sqrt{36} - 12 + 8\sqrt{2} = 45\sqrt{2} - 60 - 12 + 8\sqrt{2}$$

$$= 53\sqrt{2} - 72;$$

$$(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})\,(m\sqrt{a}-n\sqrt{b}) = (m\sqrt{a})^2 - (n\sqrt{b})^2$$
$$= m^2\sqrt{a^2} - n^2\sqrt{b^2} = m^2 a - n^2 b;$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1;$$
$$(a\sqrt{x} - b\sqrt{y})^2 = (a\sqrt{x})^2 - 2ab\sqrt{xy} + (b\sqrt{y})^2$$
$$= a^2 x - 2ab\sqrt{xy} + b^2 y \text{ und}$$
$$(2 - 5\sqrt{3})^3 = 2^3 - 3\ 2^2 . 5\sqrt{3} + 3 . 2\,(5\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{3})^3$$
$$= 8 - 60\sqrt{3} + 3.2.25.3 - 125\sqrt{3^3}$$
$$= 8 - 60\sqrt{3} + 450 - 375\sqrt{3} = 458 - 435\sqrt{3}.$$

3. Die Regel für die Division der Wurzelgrößen ist §. 125, Zus. angegeben worden, welche wir hier auf einige Beispiele anwenden wollen.

I. $$a\sqrt[m]{b} : c\sqrt[n]{d} = \frac{a\sqrt[m]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c} . \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c} . \sqrt[mn]{\frac{b^n}{d^m}}.$$

II. $$\sqrt{18} : \sqrt{6} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\tfrac{18}{6}} = \sqrt{3}.$$

III. $$(\sqrt{48} - 8\sqrt{128}) : 2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{48}}{2\sqrt{6}} - \frac{8\sqrt{128}}{2\sqrt{6}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{48}{6}} - 4\sqrt{\frac{128}{6}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{8} - 4\sqrt{\tfrac{64}{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4.2} - 4\sqrt{\frac{64 . 3}{3^2}}$$
$$= \sqrt{2} - \tfrac{32}{3}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2} - 32\sqrt{3}}{3}.$$

IV. $$6\sqrt{150} : 3\sqrt[3]{25} = \frac{6\sqrt{150}}{3\sqrt[3]{25}} = 2\sqrt[6]{\frac{150^3}{25^2}} = 2\sqrt[6]{150.(\tfrac{150}{25})^2}$$
$$= 2\sqrt[6]{150.6^2} = 2\sqrt[6]{25.6.6^2} = 2\sqrt[6]{5^2\,6^3} = 2\sqrt{6}.\sqrt[3]{5}.$$

V. $$\sqrt{36 - 4x^2} : \sqrt{\frac{3-x}{2}} = \sqrt{\frac{(36 - 4x^2) . 2}{3 - x}}$$
$$= \sqrt{\frac{4\,(9 - x^2) . 2}{(3 - x)}} = 2\sqrt{2\,(3+x)}$$

VI. $$24a^2 : \sqrt[3]{36a^2} = \frac{24a^2}{\sqrt[3]{6^2a^2}} = \sqrt[3]{\frac{24^3 a^6}{6^2 a^2}} = \sqrt[3]{\frac{4^3.6^3.a^4}{6^2}}$$
$$= \sqrt[3]{4^3 . 6 . a^3 . a} = 4a\sqrt[3]{6a}.$$

Da Größen mit gebrochenen Exponenten sich als Wurzelgrößen darstellen lassen, so kann der Anfänger ohne Schwierigkeit die vier Rechnungsarten mit denselben vornehmen.

§. 131.

Aufgabe.

Einen Bruch, dessen Nenner ein irrationales Monom oder Binom ist, in einen andern Bruch von gleichem Werthe mit rationalem Nenner zu verwandeln.

Auflösung.

Der vorgelegte Bruch kann eine von folgenden Formen haben:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^r}}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt[m]{b^r}}}, \quad \frac{Z}{\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}}, \text{ oder endlich } \frac{Z}{\sqrt[q]{(\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s})}}.$$

1. Den Bruch $\frac{a}{\sqrt[n]{b^r}}$ mit rationalem Nenner darzustellen. — Es ist hier $r \gtrless n$.

Ist $r > n$, also z. B. $r = n\beta + \alpha$, wo $\alpha < n$ sein soll, so multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sqrt[n]{b^{n-\alpha}}$, so wird

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^r}} = \frac{a \,.\, \sqrt[n]{b^{n-\alpha}}}{\sqrt[n]{b^r} \,.\, \sqrt[n]{b^{n-\alpha}}} = \frac{a \,.\, \sqrt[n]{b^{n-\alpha}}}{\sqrt[n]{b^r \,.\, b^{n-\alpha}}} = \frac{a \,,\, \sqrt[n]{b^{n-\alpha}}}{\sqrt[n]{b^{n\beta+\alpha} \,.\, b^{n-\alpha}}}$$

$$= \frac{a \,.\, \sqrt[n]{b^{n-\alpha}}}{\sqrt[n]{b^{n\beta+n}}} = \frac{a \,.\, \sqrt[n]{b^{n-\alpha}}}{b^{\beta+1}},$$

also der Nenner rational.

Ist $r < n$, und z. B. $n = r + \alpha$, so multiplicire man den Zähler und Nenner durch $\sqrt[n]{b^\alpha} = \sqrt[n]{b^{n-r}}$, so wird

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^r}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-r}}}{\sqrt[n]{b^r} \,.\, \sqrt[n]{b^{n-r}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-r}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-r}}}{b},$$

also der Nenner rational.

Wir dürfen demnach nur in beiden Fällen Zähler und Nenner mit $\sqrt[n]{b^\alpha}$ multipliciren, wo α die Zahl bezeichnet, welche den Potenzexponenten r zu einem Vielfachen des Wurzelexponenten ergänzt, so daß also $r + \alpha = \nu n$ und $\sqrt[n]{b^{r+\alpha}} = \sqrt[n]{b^{\nu n}} = b^\nu$ wird. Daß die Rechnung am einfachsten wird, wenn man für α den möglich kleinsten

Werth, also $\alpha < n$ nimmt, versteht sich von selbst, und diese Bedeutung soll α bei der ganzen gegenwärtigen Untersuchung haben.

2. Den Nenner des Bruches $\sqrt[n]{\dfrac{a}{\sqrt[m]{b^r}}}$ rational zu machen. — Es ist hier

$$\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt[m]{b^r}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[mn]{b^r}} = \frac{\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[mn]{b^\alpha}}{\sqrt[mn]{b^r}\,.\sqrt[mn]{b^\alpha}} = \frac{\sqrt[mn]{a^m}\,\sqrt[mn]{b^\alpha}}{\sqrt[mn]{b^{r+\alpha}}} = \frac{\sqrt[mn]{a^m b^\alpha}}{\sqrt[mn]{b^{mn.\nu}}} = \frac{\sqrt[mn]{a^m\,b^\alpha}}{b^\nu},$$

wenn $\alpha = mn.\nu - r$ genommen wird.

3. Um den Bruch $\dfrac{Z}{\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}}$ mit rationalem Nenner darzustellen, verfahre man wie folgt. Es ist

$$\frac{Z}{\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}} = \frac{Z}{\sqrt[pm]{a^{rm}} \pm \sqrt[mp]{b^{sp}}} = \frac{Z}{\sqrt[n]{A} \pm \sqrt[n]{B}},$$

wenn Kürze halber $mp = pm = n$, $a^{rm} = A$ und $b^{sp} = B$ gesetzt wird.

Nun haben wir (§. 58, Anm. 2) gesehen, daß

$$(x - y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$$

und

$$(x + y)\,(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm x^2y^{n-3} \mp xy^{n-2} \pm y^{n-1}) = x^n \pm y^n$$

sei, wo in der letztern Gleichung das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Setzen wir in diesen beiden Gleichungen $x = \sqrt[n]{A}$, also $x^n = A$ und $y = \sqrt[n]{B}$ also $y^n = B$, so finden wir

$$(\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B})[\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}}.\sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{A^{n-3}}\sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{A^{n-4}}.\sqrt[n]{B^3} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt[n]{A^2}.\sqrt[n]{B^{n-3}} + \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B^{n-2}} + \sqrt[n]{B^{n-1}}] = A - B,$$

oder

$$(\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B})[\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}B} + \sqrt[n]{A^{n-3}B^2} + \sqrt[n]{A^{n-4}B^3} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt[n]{A^2.B^{n-3}} + \sqrt[n]{A\,B^{n-2}} + \sqrt[n]{B^{n-1}}] = A - B,$$

und eben so

$$(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})\,[\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^{2}}-\sqrt[n]{A^{n-4}B^{3}}+\dots$$
$$\dots\pm\sqrt[n]{A^{2}.B^{n-3}}\mp\sqrt[n]{AB^{n-2}}\pm\sqrt[n]{B^{n-1}}]=A\pm B.$$

Um also den Bruch $\frac{Z}{\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}}$ oder $\frac{Z}{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}}$ ohne Veränderung seines inneren Werthes mit rationalem Nenner darzustellen, multiplicire man Zähler und Nenner im ersten Falle mit

$$(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^{2}}+\dots\dots$$
$$\dots+\sqrt[n]{A^{2}B^{n-3}}+\sqrt[n]{AB^{n-2}}+\sqrt[n]{B^{n-1}})=F,$$

und im zweiten Falle mit

$$(\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^{2}}-\dots\dots$$
$$\dots\pm\sqrt[n]{A^{2}B^{n-3}}\mp\sqrt[n]{AB^{n-2}}\pm\sqrt[n]{B^{n-1}})=F',$$

so erhält man

$$\text{a)}\quad \frac{Z}{\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}}=\frac{ZF}{(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})F}=\frac{ZF}{A-B}\ \text{und}$$

$$\text{b)}\quad \frac{Z}{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}}=\frac{ZF'}{(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}).F'}=\frac{ZF'}{A\pm B},$$

oder wenn wir hier die beiden Fälle rücksichtlich des Wurzelexponenten trennen:

$$\text{c)}\quad \frac{Z}{\sqrt[2r+1]{A}+\sqrt[2r+1]{B}}=\frac{\left\{\begin{matrix}Z\,[\sqrt[2r+1]{A^{2r}}-\sqrt[2r+1]{A^{2r-1}B}+\sqrt[2r+1]{A^{2r-2}B^{2}}-\dots\\ \dots+\sqrt[2r+1]{A^{2}B^{2r-2}}-\sqrt[2r+1]{AB^{2r-1}}+\sqrt[2r+1]{B^{2r}}\,]\end{matrix}\right\}}{(\sqrt[2r+1]{A}+\sqrt[2r+1]{B}).F'}=\frac{Z.F'}{A+B.}$$

und

$$\text{d)}\quad \frac{Z}{\sqrt[2r]{A}+\sqrt[2r]{B}}=\frac{\left\{\begin{matrix}Z\,[\sqrt[2r]{A^{2r-1}}-\sqrt[2r]{A^{2r-2}B}+\sqrt[2r]{A^{2r-3}B^{2}}-\dots\\ \dots-\sqrt[2r]{A^{2}B^{2r-3}}+\sqrt[2r]{AB^{2r-2}}-\sqrt[2r]{B^{2r-1}}\,]\end{matrix}\right\}}{(\sqrt[2r]{A}+\sqrt[2r]{B}).F'}=\frac{Z.F'}{A-B.}$$

Für $n = 2$ findet man

$$\frac{Z}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{Z\,(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{(\sqrt{A}-\sqrt{B})\,(\sqrt{A}+\sqrt{B})}=\frac{Z\,(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}$$

und

$$\frac{Z}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{Z\,(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})\,(\sqrt{A}-\sqrt{B})}=\frac{Z\,(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}.$$

Kommen nämlich im Nenner bloß Wurzeln des zweiten Grades vor, so multiplicire man Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit dem Nenner, nachdem man zuvor das Zeichen eines Gliedes in das entgegengesetzte verwandelt hat. Diese Regel kann auch dann noch ohne Schwierigkeit angewendet werden, wenn der Nenner eine dreigliedrige oder eine viergliedrige irrationale Größe ist, denn es ist

$$\frac{Z}{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{Z[\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}]}{(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})}$$

$$= \frac{Z(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})}{A+B+2\sqrt{AB}-C} = \frac{Z(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})}{(A+B-C)+\sqrt{4AB}},$$

und man hat nun den vorigen Fall. Daß es übrigens ganz gleichgiltig sei, von welchem Gliede das Zeichen geändert wird, fällt von selbst in die Augen. Eben so erhellt für sich, daß ein oder das andere Glied des Nenners eine rationale Zahl sein könne. — Ferner ist

$$\frac{Z}{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}} = \frac{Z(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D})}{(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D})(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D})}$$

$$= \frac{Z(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D})}{A+B+2\sqrt{AB}-C-D-2\sqrt{CD}} = \frac{Z(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D})}{(A+B-C-D)+\sqrt{4AB}-\sqrt{4CD}},$$

welcher Bruch, nach dem unmittelbar vorhergehenden Falle, mit rationalem Nenner dargestellt werden kann.

4. Den Bruch $\frac{Z}{\sqrt[p]{(\sqrt[q]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s})}}$ mit rationalem Nenner anzugeben. — Es ist

$$\frac{Z}{\sqrt[q]{[\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}]}} = \frac{Z\sqrt[q]{[\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}]^{q-1}}}{\sqrt[q]{[\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}]^q}} = \frac{Z\sqrt[q]{[\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}]^{q-1}}}{\sqrt[p]{a^r} \pm \sqrt[m]{b^s}},$$

und nun hat man den Fall Nro. 3.

Zur Erläuterung dieser allgemeinen Vorschriften dienen folgende

Beispiele.

I. $$\frac{a}{\sqrt[3]{b^7}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^7}.\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^9}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b^3}.$$

II. $$\frac{a}{\sqrt[6]{b^5}} = \frac{a\sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{b^5}.\sqrt[6]{b}} = \frac{a\sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{b^6}} = \frac{a\sqrt[6]{b}}{b}.$$

$$\text{III.}\ \sqrt[3]{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^2.3}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{12}} = \frac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{12^5}}{\sqrt[6]{12^6}} = \frac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{12^5}}{12},$$

$$\text{oder einfacher} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{2^2.3}} = \frac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{2^4 3^5}}{\sqrt[6]{2^6 3^6}} = \frac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{2^4.3^5}}{6}.$$

Dieses Beispiel läßt sich auch noch auf folgende Art behandeln:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{a.\sqrt{3}}{2.\sqrt{3^2}}} = \sqrt[3]{\frac{a.\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{3}.\sqrt[6]{6^2}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{36a}.\sqrt[6]{3}}{6}.$$

Wie läßt sich die Identität dieser scheinbar verschiedenen Resultate nachweisen?

$$\text{IV.}\ \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{5^3}-\sqrt[6]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{125}-\sqrt[6]{4}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{125^5}+\sqrt[6]{125^4 4}+\sqrt[6]{125^3 4^2}+\sqrt[6]{125^2 4^3}+\sqrt[6]{125.4^4}+\sqrt[6]{4^5}}{125-4}$$

$$= \frac{25\sqrt{5}+25\sqrt[3]{2}+5\sqrt[6]{2000}+10+2\sqrt[6]{500}+2\sqrt[3]{4}}{121}.$$

$$\text{V.}\ \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{6}\,[\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2.3}+\sqrt[3]{3^2}]}{2+3} = \frac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{36}+3\sqrt[3]{2}}{5}.$$

$$\text{VI.}\ \frac{z}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{5})}} = \frac{z\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{5})^2}}{\sqrt[4]{2^2}-\sqrt[4]{5}} = \frac{z\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{5})^2}}{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{5}}$$

$$= \frac{z\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{5})^2}\,[\sqrt[4]{4^3}+\sqrt[4]{4^2.5}+\sqrt[4]{4.5^2}+\sqrt[4]{5^3}]}{4-5}$$

$$= -z\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{5})^2}\,[2\sqrt{2}+2\sqrt[4]{5}+\sqrt{10}+\sqrt[4]{125}].$$

$$\text{VII.}\ \frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-2} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{6+2\sqrt{15}}$$

$$= \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(-3+\sqrt{15})}{2(3+\sqrt{15})(-3+\sqrt{15})} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{15}-3)}{2(15-9)}$$

$$= \frac{5(2.\sqrt{3}+\sqrt{30}-3\sqrt{2})}{12}.$$

$$\text{VIII. } \frac{6}{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{6\,(4-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3})}{[(4-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})]\,[(4-\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{3})]}$$

$$= \frac{6\,(4-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} = \frac{6\,(4-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3})}{9-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6(4-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3})\,(9+2\sqrt{2})}{(9-2\sqrt{2})\,(9+2\sqrt{2})} = \frac{6(32-\sqrt{2}-7\sqrt{6}+5\sqrt{3})}{9^2-(2\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{6\,(32-\sqrt{2}-7.\sqrt{6}+5\sqrt{3})}{73}.$$

Zusatz.

Es ist leicht einzusehen, daß man auf ähnliche Art einen Bruch, dessen Zähler ein irrationales Monom oder Binom ist, mit rationalem Zähler darstellen könne.

§. 132.

1. Da (nach §. 122, Zus.)

$$(\pm a)^{\pm 2n \pm 1} = \pm a^{\pm 2n \pm 1} = \pm A,$$

wenn man $a^{\pm 2n \pm 1} = A$ setzt, so ist auch umgekehrt $\sqrt[\pm 2n \pm 1]{\pm A} = \pm a$, d. h. jede Wurzel, deren Exponent eine ungerade Zahl ist, ist positiv oder negativ, je nachdem die Größe, aus welcher sie genommen wird, positiv oder negativ ist. Z. B.:

$$\sqrt[3]{-27} = -3;\ \sqrt[3]{+8} = +2;\ \sqrt[3]{-125\,a^6} = -5\,a^2;$$

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{+a} = -\sqrt[3]{a}.$$

4. Ebendaselbst wurde gezeigt, daß $(\pm a)^{\pm 2n} = +a^{\pm 2n}$ sei, also ist umgekehrt $\sqrt[\pm 2n]{a^{\pm 2n}} = \pm a$, oder wenn man $a^{\pm 2n} = A$ setzt, $\sqrt[\pm 2n]{A} = \pm a$, d. h. jede Wurzel, deren Exponent eine gerade Zahl ist, hat einen doppelten Werth, nämlich einen positiven und einen negativen. Z. B.:

$$\sqrt{25} = \pm 5;\ \sqrt{16} = \pm 4;$$

$$\sqrt[6]{729\,a^8 x^{12}} = \sqrt[6]{3^6 a^8 x^{12}} = \pm 3\,a x^2 \sqrt[6]{a^2} = \pm 3\,a x^2 \sqrt[3]{a}.$$

3. Wäre aus einer negativen Größe $-A$ eine gerade Wurzel möglich, so müßte diese entweder positiv oder negativ sein. Man setze also, es sei $\sqrt[2n]{-A} = \pm a$, so müßte umgekehrt $(-A) = (\pm a)^{2n}$ sein; allein $(\pm a)^{2n} = +a^{2n}$, also kann die Gleichung $\sqrt[2n]{-A} = \pm a$ oder $-A = (\pm a)^{2n}$ nicht wahr sein.

Weil sich also keine Größe, sie sei positiv oder negativ, denken läßt, welche, auf eine gerade Potenz erhoben, ein negatives Resultat gibt; so ist umgekehrt jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl nicht denkbar. Ausdrücke von der Form $\sqrt[2n]{-A}$ nennt man daher im Gegensatze der reellen (positiven oder negativen) Größen, unmögliche, eingebildete oder imaginäre Größen, obgleich sie eigentlich keine Zahlen, sondern bloße Zahlformen sind, und wenn die Auflösung einer Aufgabe auf solche Ausdrücke führt, so zeigen diese nichts anderes an, als daß in der Aufgabe irgend eine Absurdität liege, oder daß etwas Ungereimtes, etwas Unmögliches verlangt werde. Solche Aufgaben werden wir in der Folge kennen lernen.

Ausdrücke, in welchen Größen von der Form $\sqrt[2n]{-A}$ unter sich und mit reellen Größen durch was immer für Rechnungsoperationen verbunden erscheinen, werden ebenfalls imaginäre Ausdrücke genannt.

Da $\sqrt[2n]{-A} = \sqrt[2n]{A \times -1} = \sqrt[2n]{A} \,.\, \sqrt[2n]{-1} = a\sqrt[2n]{-1}$, wenn man $\sqrt[2n]{A} = a$ setzt, so kann man $a\sqrt[2n]{-1}$, wo a eine reelle Größe bezeichnet, als die allgemeine Form der imaginären Größen annehmen.

Weil aber jede gerade Zahl in der Form $(2p+1).2^m$, wo m eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet, enthalten ist, so können wir

$$a\sqrt[2n]{-1} = a\,.\sqrt[(2p+1).2^m]{-1} = a\sqrt[2^m]{\sqrt[2p+1]{-1}} = a\sqrt[2^m]{-1}$$

setzen, denn $\sqrt[2p+1]{-1} = -1$, und wir werden in der Folge sehen, daß sich $a\sqrt[2^m]{-1}$ stets auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ zurückführen lasse, wobei p und q was immer für reelle Zahlen bezeichnen können.

Zusatz.

Also ist $-a^2$ kein Quadrat, sondern ein bloßes Produkt, denn $-a^2 = +a \times -a$, und allgemein kann $-a^{2n}$ nicht als Potenz angesehen werden.

§. 133.

Wenn eine Rechnung auf imaginäre Größen führt, so darf man dieselbe nicht sogleich aufgeben; denn bei fortgesetzter Rechnung heben

sich oft derlei Größen wieder auf, und wenn dieß auch nicht der Fall sein sollte, so sind Ausdrücke, in denen imaginäre Größen erscheinen, als allgemeine Formen — um welche es sich gewöhnlich bloß handelt — doch oft von hoher Wichtigkeit, und für die Analysis nach ihrem jetzigen Standpunkte sogar unentbehrlich.

Da nun die imaginären Ausdrücke unter der allgemeinen Form der Wurzeln erscheinen, so unterwirft man dieselben allen Rechnungsoperationen, und rechnet mit ihnen gerade so, wie mit reellen Größen.

Geschieht aber gleichwohl die Multiplikation und Division der imaginären Größen nach den bereits bekannten Regeln, so scheinen sich bei diesen beiden arithmetischen Operationen dem Anfänger dennoch Schwierigkeiten darzubieten, die aber leicht zu beseitigen sind. So wie bei der Addition und Subtraktion die Reduktion in den Koefficienten vorgenommen wird, so geschieht die Reduktion in den Exponenten bei der Multiplikation und Division. Nach Beendigung dieser Reduktion erst berücksichtigt man das Qualitätszeichen, wie folgende Beispiele deutlich zeigen. Es ist

I. $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\,.\,\sqrt{-1}=\sqrt{ab}\,.\,\sqrt{(-1)^2}$
$= -\sqrt{ab}$.

II. $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}\,.\,\sqrt{-c}=-\sqrt{ab}\sqrt{c}\sqrt{-1}=-\sqrt{abc}\sqrt{-1}$,
oder $=\sqrt{abc}\,.\,\sqrt{(-1)^3}=\sqrt{abc}\sqrt{(-1)^2\,(-1)}$
$=\sqrt{abc}\,.\,\sqrt{(-1)^2}\,.\,\sqrt{-1}=-\sqrt{abc}\sqrt{-1}$.

III. $\sqrt[4]{-a}\,.\,\sqrt[4]{-a}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}$.

IV. $\sqrt[6]{-a}\,.\,\sqrt[6]{-a}=\sqrt[6]{(-a)^2}=\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

V. $\sqrt{-a^2}:\sqrt{-a}=\sqrt{\frac{-a^2}{-a}}=\sqrt{+a}=\sqrt{a}$.

VI. $\sqrt[4]{-a^2}:\sqrt{-a}=\frac{\sqrt[4]{-a^2}}{\sqrt[4]{(-a)^2}}=\sqrt[4]{\frac{-a^2}{(-a)^2}}=\sqrt[4]{\frac{-a^2}{+a^2}}=\sqrt[4]{-1}$,

Dieselben Resultate werden erhalten, wenn man diese Radikalen als Bruchpotenzen darstellt. Aus diesen Beispielen sieht man, daß sowohl das Produkt, als der Quotient aus zwei unmöglichen Größen eine mögliche Größe werden könne (siehe Beispiel I., IV. und V.), aber nicht immer werden müsse (siehe Beispiel III. und VI).

Weiß man, daß eine Größe aus der Multiplikation von unmöglichen Faktoren entstanden sei, welche wieder aufgefunden werden sollen,

und das Produkt ist negativ, oder mit dem Koefficienten (-1) behaftet, so bringe man diesen wieder unter das Wurzelzeichen, und zerlege dann erst das Produkt in Faktoren. So z. B. wurde oben gezeigt, daß $\sqrt{-a}\,\sqrt{.-b} = -\sqrt{ab}$ sei; also muß

$$\sqrt{-a} = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}} = (-1)\sqrt{\frac{ab}{-b}} = \sqrt{\frac{(-1)^2 . ab}{-b}}$$
$$= \sqrt{\frac{ab}{-b}} = \sqrt{-a}$$

sein. Hätte man den Koefficienten (-1) nicht unter das Radikalzeichen gebracht, so hätte man

$$\frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}} = -\sqrt{\frac{ab}{-b}} = -\sqrt{-a}$$

gefunden, was offenbar in unserem Falle unrichtig wäre. Dasselbe gilt in Bezug auf die Division.

§. 134.

Wenn eine imaginäre Wurzel auf eine gerade Potenz zu erheben ist, so muß man noch vor der Entwickelung Wurzelexponenten und Potenzexponenten durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß dividiren. Z. B.:

$$(\sqrt{-a})^2 = (-a)^{\frac{2}{2}} = -a;\ (\sqrt[4]{-a})^4 = (-a)^{\frac{4}{4}} = -a;$$

und allgemein

$$(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a;\ (\sqrt{-3})^4 = (-3)^2 = +9;$$
$$(\sqrt[4]{-2a})^6 = (\sqrt{-2a})^3 = (-2a)^{\frac{3}{2}} = (-2a)\,(-2a)^{\frac{1}{2}} = -2a\sqrt{-2a}$$
$$\text{und } (\sqrt[2n]{-a})^{2m} = (\sqrt[n]{-a})^m = \sqrt[n]{(-a)^m}.$$

Ist hier n eine ungerade Zahl, so ist $\sqrt[n]{(-a)^m}$ immer möglich, m mag gerade oder ungerade sein.

Erhebt man aber eine imaginäre Wurzel auf eine ungerade Potenz, so ist das Resultat immer wieder unmöglich, denn es ist

$$(\sqrt[2n]{-a})^{2m+1} = \sqrt[2n]{(-a)^{2m+1}} = \sqrt[2n]{-a^{2m+1}},\ \text{z. B.}$$
$$(\sqrt{-1})^3 = (-1)^{\frac{3}{2}} = (-1)\,(-1)^{\frac{1}{2}} = -1\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt[4]{-1})^5 = (\sqrt[4]{-1})^4\,(\sqrt[4]{-1}) = -\sqrt[4]{-1};\ \text{aber}$$
$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4\,\sqrt{-1} = (-1)^2\sqrt{-1} = +\sqrt{-1}.$$

Erhebt man den Ausdruck $\sqrt{-1}$, welchen die neueren Analysten fast durchgehends durch den Buchstaben i bezeichnen, auf die nach einander folgenden Potenzen, so entdeckt man folgende Gesetze:

1. Alle geraden Potenzen von $\sqrt{-1}$ sind reelle Größen, welche positiv oder negativ sind, je nachdem der Potenzexponent durch 4 oder bloß durch 2 theilbar ist.

2. Aber ungerade Potenzen von $\sqrt{-1}$ sind unmögliche Größen, und zwar wieder positiv oder negativ, je nachdem der Potenzexponent durch 4 getheilt, 1 oder 3 zum Reste läßt.

Diese Gesetze sind in folgenden vier Formeln enthalten:

I. $$(\sqrt{-1})^{4p} = (-1)^{2p} = +1;$$

II. $$(\sqrt{-1})^{4p+2} = (-1)^{2p+1} = -1:$$

III. $$(\sqrt{-1})^{4p+1} = (\sqrt{-1})^{4p} \,.\, \sqrt{-1} = +\sqrt{-1};$$

IV. $$(\sqrt{-1})^{4p+3} = (\sqrt{-1})^{4p+2}\,(\sqrt{-1})^{1} = (-1)^{2p+1}\,.\,\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.$$

Zusatz 1.

Zwei imaginäre Größen von der Form $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$ heißen zusammengehörige oder conjugirte imaginäre Größen, und die reelle Größe $M = \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{p^2+(-q)^2}$ wird ihr gemeinschaftlicher Modul genannt.

Es ist $[p+q\sqrt{-1}]\,[p-q\sqrt{-1}] = p^2 + q^2 = M^2$, d. h. das Produkt zweier conjugirten imaginären Größen ist gleich dem Quadrate ihres gemeinschaftlichen Modulus.

Es ist ferner

$$\frac{1}{p-q\sqrt{-1}} = \frac{p+q\sqrt{-1}}{p^2+q^2} = \frac{p+q\sqrt{-1}}{M^2}$$

und

$$\frac{1}{p+q\sqrt{-1}} = \frac{p-q\sqrt{-1}}{p^2+q^2} = \frac{p-q\sqrt{-1}}{M^2}$$

Zusatz 2.

Es ist

$$(a+b\sqrt{-1})\,(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = (a\alpha - b\beta) + (a\beta+\alpha b)\sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$$

eben so $(a+b\sqrt{-1})\,(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,(p+q\sqrt{-1}) =$

$$(A+B\sqrt{-1})\,(p+q\sqrt{-1}) = (Ap-Bq)+(Aq+Bp)\sqrt{-1} = P+Q\sqrt{-1}$$

u. s. f. Das Produkt aus beliebig vielen Faktoren von der angegebenen Form ist demnach ein Ausdruck von derselben Form.

Sind alle jene imaginären Binomialfaktoren identisch, so wird man erhalten $(a + b\sqrt{-1})^n = M + N\sqrt{-1}$, d. h. jede Potenz eines Ausdruckes von der Form $a + b\sqrt{-1}$ führt wieder auf ein Resultat von derselben Form.

Der Modul des Produktes $(a + b\sqrt{-1})(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + \alpha b)\sqrt{-1}$ ist offenbar $M = \sqrt{(a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + \alpha b)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)} = \sqrt{mm'}$ wenn die Moduli der beiden gegebenen Faktoren beziehungsweise durch m und m' bezeichnet werden.

Zusatz 3.

Es ist

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha b - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{-1}$$

$$= p + q\sqrt{-1}.$$

Es hat demnach auch der Quotient aus zwei imaginären Größen von derselben Form eben diese Form.

§. 135.

Lehrsatz.

Wenn der Werth von $\sqrt[n]{A}$ zwischen zwei auf einander folgende Zahlen a und a + 1 fällt, wobei A und a ganze Zahlen bezeichnen, so kann der Werth $\sqrt[n]{A}$ durch keine Zahl vollkommen genau angegeben werden.

Beweis.

Denn da, der Voraussetzung gemäß, $\sqrt[n]{A} > a$ und $< a + 1$, so kann $\sqrt[n]{A}$ keine ganze Zahl sein, sondern es müßte $\sqrt[n]{A}$, wenn sich der Werth dieses Ausdruckes vollkommen genau angeben ließe, einen Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ bezeichnen, den wir uns auf die kleinste Benennung

gebracht denken können. Wird nun $\sqrt[n]{A} = \frac{\alpha}{\beta}$ gesetzt, so müßte $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n} = A$ = einer ganzen Zahl sein, was unmöglich ist (§. 121, Zus. 3).

Zusatz 1.

Also kann eine Wurzel aus einer ganzen Zahl, die zwischen zwei nur um Eins verschiedenen Zahlen liegt, d. i. die Wurzel aus einer unvollkommenen Potenz weder von der Einheit noch von einem aliquoten Theile der Einheit gemessen werden, d. h. ihr Verhältniß zur Einheit kann nie genau angegeben werden, und deßhalb heißen solche Wurzeln auch **unausrechenbare**, **incommensurable** oder **irrationale Zahlen**.

Zusatz 2.

Obgleich aber der Werth einer irrationalen Wurzel durch keine Zahl genau dargestellt werden kann, so läßt sich dennoch in allen Fällen eine solche rationale Zahl auffinden, die vom wahren Werthe der gegebenen irrationalen Wurzel nur um eine Größe abweicht, die kleiner als jede angebbare Zahl ist, oder man kann sich jenem Werthe ohne Ende, d. i. so sehr man will, nähern. Denn ist z. B. $\sqrt[n]{A}$ irrational, so ist auch, weil $\sqrt[n]{A} = \frac{10^m \sqrt[n]{A}}{10^m} = \frac{\sqrt[n]{10^{mn} \cdot A}}{10^m}$, der Zähler $\sqrt[n]{10^{mn} A}$ irrational. Man setze also $\sqrt[n]{10^{mn} A} = a + \frac{r}{p}$, wo a was immer für eine ganze Zahl, und $\frac{r}{p}$ einen ächten Bruch bezeichnet. Aus der letzten Gleichung folgt $10^m \sqrt[n]{A} = a + \frac{r}{p}$, oder wenn man beide Ausdrücke durch 10^m dividirt, $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{10^m} + \frac{r}{p \cdot 10^m}$. Da nun der Voraussetzung gemäß $\frac{r}{p} < 1$, so ist auch $\frac{r}{p \cdot 10^m} < \frac{1}{10^m}$. Nimmt man also an, daß $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{10^m}$, so begeht man einen Fehler, der $< \frac{1}{10^m}$, und da man für m jede beliebige ganze Zahl annehmen kann, so wird der Fehler $\frac{1}{10^m}$ immer kleiner, je größer man m nimmt, d. i. $\frac{1}{10^m}$ kann

kleiner werden, als jede noch so kleine Zahl. Will man also den Werth von $\sqrt[n]{A}$ bis auf m Decimalen genau haben, so multiplicire man nur A mit 10^{mn}, oder was dasselbe ist, man hänge der Zahl A rechts mn Nullen an, und ziehe dann die verlangte Wurzel aus, wie wir weiter unten sehen werden.

Zweites Kapitel.

Das Binom.

§. 136.

1. Wenn man mehrere Binome (x + a), (x + b), (x + c), ..., welche einen Theil x gemeinschaftlich haben, stufenweise mit einander multiplicirt, und die Produkte nach den Potenzen von x ordnet, so findet man, wenn die einzelnen Theile der Koefficienten, um Raum zu sparen, unter einander gesetzt, und durch Addition verbunden gedacht werden:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} x + ab$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right\} x + abc$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) =$$

$$= x^4 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} ab + bc \\ ac + bd \\ ad + cd \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} abc \\ abd \\ acd \\ bcd \end{matrix}\right\} x + abcd$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e) =$$

$$= x^5 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} x^4 + \left\{\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} abc \\ abd \\ abe \\ acd \\ ace \\ ade \\ bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \\ bcde \end{matrix}\right\} x + abcde$$

u. s. w.

2. Bei aufmerksamer Betrachtung dieser Produkte bemerken wir folgendes Bildungsgesetz:

Das erste Glied eines jeden Produktes ist eine Potenz von x, deren Exponent der Anzahl der gebrauchten Faktoren gleich ist.

In den folgenden Gliedern nehmen die Exponenten von x nach der Reihe der natürlichen Zahlen ab, bis endlich im letzten Gliede x^0 oder kein x mehr erscheint. Jedes Produkt hat demnach ein Glied mehr, als die Anzahl seiner Faktoren anzeigt.

Der Koefficient des ersten Gliedes ist immer die Einheit, der Koefficient des zweiten Gliedes aber ist die Summe aller zweiten Theile a, b, c, . . . der verwendeten Faktoren, also die Summe der Unionen a, b, c, d...

Der Koefficient des dritten Gliedes ist die Summe aller Verbindungen der zweiten Theile der gegebenen Faktoren zu Amben, oder der Binionen von a, b, c, d, ...

Der Koefficient des vierten Gliedes ist die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung der dritten Klasse von den Elementen a, b, c, d, ...

Der Koefficient des fünften Gliedes ist die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung der vierten Klasse von den Elementen a, b, c, d, ..., u. s. w. f.

Das letzte Glied ist endlich das Produkt aller zweiten Theile a, b, c, d, . . . der gegebenen Faktoren.

3. Nur wird hier erinnert, daß die Elemente

a, b, c, d, ...

als Zahlen, und ihre Combinationen in allen Klassen als Produkte gedacht werden müssen, so also, daß dieselben nun eine arithmetische Bedeutung haben. Wir wollen die Summe der Combinationen der r^{ten} Klasse, diese im eben erklärten Sinne genommen, allgemein durch C_r (a, b, c, d, . . .) oder kurz durch $\overset{(n)}{C_r}$ andeuten, wo n die Anzahl der Elemente bezeichnet, so also, daß z. B.

$$C_3\,(a, b, c, d) = \overset{(4)}{C_3} = abc + abd + acd + bcd \text{ ist.}$$

4. Gilt nun dieses Gesetz bei dem Produkte von n Faktoren

(x + a), (x + b), (x + c), . . . (x + k),

so gilt es auch, wenn man noch einen Faktor x + l mehr nimmt.

Es sei nämlich

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k) = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \ldots$$
$$+ C_r\, x^{n-r} + \ldots + C_{n-1}\, x + C_n \ldots (A),$$

wo wir den oberen Zeiger weglassen, weil wir aus dem Exponenten n des ersten Gliedes die Anzahl der Elemente erkennen.

Multiplicirt man dieses Produkt noch mit dem Faktor $(x + l)$, so wird

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c)\ldots(x + k)\,(x + l) =$$
$$= x^{n+1} + (C_1 + l)\, x^n + (C_2 + l C_1)\, x^{n-1} + (C_3 + l C_2)\, x^{n-2} +$$
$$+ (C_4 + l C_3)\, x^{n-3} + \ldots + (C_r + l \,.\, C_{r-1})\, x^{n-r+1} + \ldots$$
$$\ldots + (C_n + l \,.\, C_{n-1})\, x + l \,.\, C_n \,.$$

Daß in diesem Resultate rücksichtlich der Potenzen von x und der Anzahl der Glieder das oben angeführte Gesetz wirklich Statt finde, ist für sich klar.

Nun ist aber

$$C_1 = a + b + c + \ldots + k,$$

folglich ist hier der Koefficient von x^n

$$\overset{(n)}{C_1} + l = a + b + c + \ldots + k + l \text{ oder } \overset{(n)}{C_1} + l = \overset{(n+1)}{C_1}$$

Ferner ist C_2 die Summe der Binionen von a, b, c, . . . k, und $l C_1$ ist die Summe der Amben, welche man erhält, indem man das neue Element l mit a, b, c,... k verbindet, folglich ist $C_2 + l C_1$ die Summe aller Combinationen der zweiten Klasse von den Elementen a, b, c, .., k, l; nämlich es ist

$$\overset{(n)}{C_2} + l\overset{(n)}{C_1} = \overset{(n+1)}{C_2}$$

Eben so ist einleuchtend, daß

$$\overset{(n)}{C_3} + l\overset{(n)}{C_2} = \overset{(n+1)}{C_3}\;;\; \overset{(n)}{C_4} + l\overset{(n)}{C_3} = \overset{(n+1)}{C_4}\,,\ \text{u. s. w.}$$

und allgemein

$$\overset{(n)}{C_r} + l\overset{(n)}{C_{r-1}} = \overset{(n+1)}{C_r} \text{ sei.}$$

Man erhält also, wenn man aus dem oben angeführten Grunde den oberen Zeiger außer Acht läßt, in der That

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c)\ldots(x + k)\,(x + l) = x^{n+1} + C_1 x^n +$$
$$+ C_2 x^{n-1} + \ldots + C_r\, x^{n-r+1} + \ldots + C_n\, x + C_{n+1}\,.$$

Das oben erwähnte Gesetz gilt also für das Produkt von (n+1) Binomialfaktoren, wenn es für das Produkt von n solchen Faktoren richtig ist. Nun gilt es aber, wie wir (in Nro. 1) gesehen haben, für 2, 3, 4, ... Faktoren, folglich allgemein für jede Anzahl Faktoren.

§. 137.

Setzt man in dem Produkte A (§. 136) alle n Faktoren einander gleich, also auch $a = b = c = d = \ldots = k$, so wird

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots(x+k) = (x+a)^n, \text{ ferner}$$

$$C_1 = a + b + c + \ldots + k = a + a + \ldots + a = \binom{n}{1}\,a$$

$$C_2 = ab + ac + \ldots + bc + \ldots = a^2 + a^2 + \ldots + a^2 = \binom{n}{2}\,a^2$$

$$C_3 = abc + abd + \ldots + hik = a^3 + a^3 + \ldots + a^3 = \binom{n}{3}\,a^3$$

$$C_4 = abcd + abce + \ldots = a^4 + a^4 + \ldots + a^4 = \binom{n}{4}\,a^4$$

. . . .

allgemein

$$C_r = \binom{n}{r} a^r \;(\text{§. } 113, \text{ IV.}) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots[n-(r-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(r-1)\,r}\,a^r\,;$$

folglich wird durch Substitution:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} a\,x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2\,x^{n-2} + \binom{n}{3} a^3\,x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{r} a^r\,x^{n-r} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1}\,x + \binom{n}{n} a^n \ldots (B).$$

Zusätze.

1 Das unbestimmte Glied $\binom{n}{r} a^r x^{n-r}$ heißt das **allgemeine Glied** der Entwicklung, und enthält das Bildungsgesetz der Reihe, denn aus demselben werden alle Glieder der Ordnung nach erhalten, wenn man stufenweise den Index $r = 0, 1, 2, 3, \ldots n$ setzt.

Die Koefficienten $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, . . . $\binom{n}{n}$ heißen **Binomial-Koefficienten**, und die Reihe selbst, welche jede Potenz eines Binomes $x+a$ oder $a+x$ aus den beiden Theilen a, x desselben und dem Exponenten n bilden lehrt, heißt die **Binomialformel**

oder der binomische Lehrsatz, oder auch der Newton'sche Lehrsatz, weil Newton dieses Gesetz zuerst bemerkt hat.

Daß hier n eine ganze positive Zahl bezeichnet, indem es uns ursprünglich die Anzahl der Binomialfaktoren ausdrückte, ist für sich klar.

2. Die Summe der Exponenten von a und x ist in jedem Gliede $= n$; die Exponenten von a wachsen nach der Ordnung der natürlichen Zahlen von 0 bis n, die Exponenten von x nehmen von n bis 0 ab. Endlich sehen wir, daß der Exponent von a immer dem Klassenexponenten in dem Symbole $\binom{n}{r}$ gleich, und demnach um 1 kleiner als der Index des Gliedes sei.

3. Setzt man in der Gleichung (B) — a statt a, so findet man

$$(x - a)^n = x^n - \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \binom{n}{3} a^3 x^{n-3} + \dots$$
$$\dots \pm \binom{n}{r} a^r x^{n-r} \mp \dots \mp \binom{n}{n-1} a^{n-1} x \pm \binom{n}{n} a^n \dots (C),$$

wo im allgemeinen und letzten Gliede die obern Zeichen gelten, wenn r und n gerade Zahlen sind. Hier wechseln also durchaus die Zeichen.

§. 138.

Allgemeine Bemerkungen.

1. Da $\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n - r + 1}{r}$ (§. 113) ist, so kann man den Koefficienten $\binom{n}{r}$ eines jeden Gliedes $\binom{n}{r} a^r x^{n-r}$ aus dem Koefficienten $\binom{n}{r-1}$ des unmittelbar vorhergehenden Gliedes

$$\binom{n}{r-1} a^{r-1} x^{n-r+1}$$

ableiten, indem man den letztern mit dem Exponenten von x in diesem Gliede multiplicirt, und das Produkt durch den Index dieses Gliedes dividirt.

2. Weil nun

$$\binom{n}{r} a^r x^{n-r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n - r + 1}{r} \cdot a^{r-1} x^{n-r+1} \cdot \frac{a}{x}$$
$$= \left[\binom{n}{r-1} a^{r-1} x^{n-r+1}\right] \cdot \frac{n - r + 1}{r} \cdot \frac{a}{x}$$

ist, so nimmt die Formel (B), wenn die Glieder der Ordnung nach

kurz durch $A_1, A_2, A_3, \ldots A_r$ bezeichnet werden, folgende Gestalt an:

$$(x+a)^n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \ldots$$

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{a}{x}\cdot A_1 + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{x}\cdot A_2 + \frac{n-2}{3}\cdot\frac{a}{x}\cdot A_3$$

$$+ \frac{n-3}{4}\cdot\frac{a}{x}\cdot A_4 \ldots\ldots$$

oder es ist allgemein $A_{r+1} = A_r \cdot \frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$.

Dieser Form bedient man sich in der Praxis, um bei der Entwicklung der n^{ten} Potenz eines Binomes jedes Glied aus dem nächst vorhergehenden bequemer ableiten zu können.

3. In der Formel (B) haben die von dem ersten und letzten Gliede gleichweit abstehenden Glieder einerlei Binomial-Koeffizienten.

Denn es ist

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \binom{n}{3} a^3 x^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{r} a^r x^{n-r} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + \binom{n}{n} a^n,$$

und daher auch

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{r} a^{n-r} x^r + \ldots + \binom{n}{n-1} a x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n,$$

und da $(x+a)^n = (a+x)^n$, wenigstens für jeden ganzen Werth von n, so ist der zweite Ausdruck, rückwärts gelesen, mit dem ersten identisch, und demnach unser Satz wahr. Allein diese Wahrheit läßt sich auch auf folgende Art nachweisen. Man bezeichne das $(r+1)^{te}$ Glied von der Linken gegen die Rechte durch A_{r+1}, und das $(r+1)^{te}$ Glied, von rückwärts gezählt, durch ${}_{(r+1)}A$, so kommt es nur darauf an, den Zeiger dieses Gliedes von der Linken gegen die Rechte zu bestimmen. Nun hat die ganze Entwicklung $(n+1)$ Glieder, also gehen dem Gliede ${}_{(r+1)}A$ offenbar $[n+1-(r+1)]$ oder $(n-r)$ Glieder voran, und es ist demnach das $(n-r+1)^{te}$ Glied von vorne gezählt, nämlich es ist

$${}_{(r+4)}A = A_{n-r+1} = \binom{n}{n-r} a^{n-r} x^r \text{ und } A_{r+1} = \binom{n}{r} a^r x^{n-r}$$

allein nach §. 114, 3 ist $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$.

4. Weil $(x+a)^n$ entwickelt, $(n+1)$ Glieder darbietet, so ist in unserer Formel (B), wenn n eine gerade Zahl ist, ein mittleres Glied M vorhanden, d. h. ein Glied, welches von den beiden äußersten Gliedern gleich weit absteht, und es ist dieses

$$M = A_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \binom{n}{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}.$$

Ist aber n eine ungerade Zahl, so hat unsere Formel zwei mittlere Glieder M_1 und M_2, von welchen M_1 vom ersten Gliede eben so weit absteht, als M_2 vom letzten Gliede, und es ist

$$M_1 = A_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\left(\frac{n+5}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;\frac{n-3}{2}\;.\;\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}}$$

und

$$M_2 = A_{\left(\frac{n+3}{2}\right)} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)} a^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$$

Nach Nro. 3 muß $\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ sein.

5. Die Binomial-Koefficienten wachsen bis zu der Mitte der Formel, und nehmen daher (wegen Nro. 3) von der Mitte gegen das Ende in verkehrter Ordnung wieder ab.

Denn es ist allgemein der $(r+1)^{te}$ Binomial-Koefficient

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-r+1}{r} \quad \text{(Nro. 1)},$$

und da für den Exponenten n unsere Formel $n+1$ Glieder enthält, so ist, wenn der $(r+1)^{te}$ Koefficient vor der Mitte der Formel erscheint, $r < \frac{n+1}{2}$, d. i. $2r < n+1$, also $r < n-r+1$, folglich ist

$\frac{n-r+1}{r} > 1$, es muß demnach auch $\binom{n}{r} > \binom{n}{r-1}$, d. h. der $(r+1)^{te}$ Koefficient muß größer sein als der r^{te}. Man berechnet also für jeden Exponenten die Koefficienten nur bis zur Mitte.

6. Für den Exponenten n ist die Summe aller Binomial-Koefficienten $= 2^n$. Denn man setze nur in der Formel (B) $a = x = 1$, so findet man

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{\vdots} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$
$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Macht man dieselbe Substitution in der Formel (C) (§. 137, Zus. 3), so wird

$$(1-1)^n = 0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{r} \mp \ldots$$
$$\ldots \mp \binom{n}{n-1} \pm \binom{n}{n}.$$

7. Nach (§. 114, 5) ist $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$, d. h. die Summe des r^{ten} und $(r+1)^{ten}$ Binomial-Koefficienten in der n^{ten} Potenz ist dem $(r+1)^{ten}$ Binomial-Koefficienten in der nächst höhern, nämlich der $(n+1)^{ten}$ Potenz gleich. — Dieser Satz gibt uns demnach ein Mittel an die Hand, aus den Binomial-Koefficienten irgend einer Potenz jene der nächst höhern durch bloße Addition abzuleiten, wie man aus folgendem Schema ersehen kann.

Die Binomial-Koefficienten sind

für	$(x+a)^0$	1								
„	$(x+a)^1$	1	1							
„	$(x+a)^2$ . . . . , .	1	2	1						
„	$(x+a)^3$	1	3	3	1					
„	$(x+a)^4$	1	4	6	4	1				
„	$(x+a)^5$	1	5	10	10	5	1			
„	$(x+a)^6$	1	6	15	20	15	6	1		
„	$(x+a)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
„	$(x+a)^8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

. . . .

8. Denken wir uns die n Elemente a, b, c, d . . k, l in den aufeinander folgenden Klassen mit Wiederholung combinirt, betrachten

dann die einzelnen Combinationsformen als Produkte der in ihr erscheinenden Elemente und bezeichnen die Summe dieser Produkte in den aufeinander folgenden Klassen beziehungsweise durch C_1, C_2, C_3, C_4.. so daß also

$$C_1 = a + b + c + \ldots + k + l$$

$$C_2 = a^2 + ab + ac + \ldots + al + b^2 + bc + bd + \ldots + bl + \ldots + kl$$

$$C_3 = a^3 + a^2b + a^2c + a^2d + \ldots + a^2l + b^2c + b^2d + \ldots + b^2l + \ldots + k^2l + abc + \ldots + abl + \ldots ikl$$

. . . .

so erscheint der §. 58 Anmerk. 4 entwickelte Quotient in der Form

$$Q = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots(1-lx)} = 1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \ldots$$

und für $a = b = c = d = \ldots = k = l$ wird

$$Q = \frac{1}{(1-ax)^n} = 1 + \binom{n}{1} ax + \binom{n+1}{2} a^2x^2 + \binom{n+2}{3} a^3x^2 + \ldots + \binom{n+r-1}{r} a^r x^r + \ldots$$

Setzen wir in dieser letzten Gleichung $x = -\frac{1}{z}$, so erhalten wir

$$\frac{1}{\left(1+\frac{a}{z}\right)^n} = \frac{z^n}{(z+a)^n} = z^n (z+a)^{-n} = 1 - \binom{n}{1}\frac{a}{z} + \binom{n+1}{2}\frac{a^2}{z^2} - \binom{n+2}{3}\frac{a^3}{z^3} + \ldots + (-1)^r \binom{n+r-1}{r}\frac{a^r}{z^r} + \ldots$$

oder wenn man mit z^{-n} multiplicirt:

$$(z+a)^{-n} = z^{-n} - \binom{n}{1} a z^{-n-1} + \binom{n+1}{2} a^2 z^{-n-2} - \binom{n+2}{3} a^3 z^{-n-3} + \ldots + (-1)^r \binom{n+r-1}{r} a^r z^{-n-r} + \ldots$$

$$= z^{-n} + \binom{-n}{1} a z^{-n-1} + \binom{-n}{2} a^2 z^{-n-2} + \binom{-n}{3} a^3 z^{-n-3} + \ldots + \binom{-n}{r} a^r z^{-n-r} + \ldots \text{(C)}$$

denn es ist $(-1)^r . \binom{n+r-1}{r}$

$$= (-1)^r . \frac{(n+r-1)(n+r-2)(n+r-3)\ldots(n+1)\,n}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \ldots\ldots (r-1)\,r}$$

$$= \frac{(-n-r+1)(-n-r+2)(-n-r+3)\dots(-n-1)(-n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\dots(r-1)\,r}$$

$$= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(r-1)\,r} = \binom{-n}{r}.$$

Vergleichen wir die Formel (C) mit der Formel (B) im §. 137, so sehen wir, daß jene aus dieser hervorgeht, wenn wir x mit z vertauschen und $-n$ statt $+n$ schreiben und in beiden Fällen bezeichnet n absolut genommen eine ganze Zahl.

Die Binomialformel gilt demnach für jeden ganzen positiven oder negativen Exponenten.

Da jedoch im Zähler des Bruches

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \,.\, \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(r-1)\,r}$$

kein Faktor verschwinden kann, so ist einleuchtend, daß die Reihe von $(z+a)^{-n}$ niemals abbricht oder ohne Ende fortgesetzt werden kann.

§. 139.

Es ist

$$(a+x)^n = \left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n(1+z)^n, \text{ wenn}$$

$\frac{x}{a} = z$ gesetzt wird, und nach §. 137 besteht für jeden ganzen positiven Werth von n die Gleichung:

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \dots + \binom{n}{r} z^r + \dots \text{(D)},$$

deren Gültigkeit wir nun nach Euler's Anleitung für jeden beliebigen Werth von n nachzuweisen versuchen wollen.

1. In der Reihe

$$1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \binom{n}{4} z^4 + \dots\dots$$

welche man sich ohne Ende fortgesetzt denken kann, sei n was immer für eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, reelle oder imaginäre Zahl, und der Werth dieser Reihe werde durch das Symbol f (n) bezeichnet, wo f nicht als Faktor anzusehen ist, sondern bloß die Form jener von n abhängigen Reihe ausdrücken soll, so daß

$$f(n) = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \dots (\alpha$$

und für den Fall, als n eine ganze Zahl bezeichnet,

$$f(n) = (1 + z)^n \text{ ist.}$$

Eine andere Reihe, die von m eben so abhängt, wie die Reihe (α) von n, muß also durch das Symbol f(m) bezeichnet werden, oder es ist

$$f(m) = 1 + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \binom{m}{3} z^3 + \ldots\ldots \quad (\beta).$$

2. Multipliciren wir diese beiden Reihen mit einander, und ordnen das Produkt nach den Potenzen von z, so finden wir:

$$f(n) . f(m) = 1 + \left.\begin{matrix} \binom{n}{1} \\ \binom{m}{1} \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} \binom{n}{2} \\ \binom{n}{1}\binom{m}{1} \\ \binom{m}{2} \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} \binom{n}{3} \\ \binom{n}{2}\binom{m}{1} \\ \binom{n}{1}\binom{m}{2} \\ \binom{m}{3} \end{matrix}\right\} z^3$$

$$+ \left.\begin{matrix} \binom{n}{4} \\ \binom{n}{3}\binom{m}{1} \\ \binom{n}{2}\binom{m}{2} \\ \binom{n}{1}\binom{m}{3} \\ \binom{m}{4} \end{matrix}\right\} z^4 + \ldots + \left.\begin{matrix} \binom{n}{r}\binom{m}{0} \\ \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} \\ \binom{n}{r-2}\binom{m}{2} \\ \binom{n}{r-3}\binom{m}{3} \\ \cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot \\ \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} \\ \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} \\ \binom{n}{0}\binom{m}{r} \end{matrix}\right\} z^r + \ldots$$

Nun ist aber, nach §. 114, 7, für jeden Werth von n und m

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r-2}\binom{m}{2} + \binom{n}{r-3}\binom{m}{3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} = \binom{n+m}{r},$$

mithin erhalten wir für jeden Werth von m und n:

$$f(n) \cdot f(m) = 1 + \binom{n+m}{1} z + \binom{n+m}{2} z^2 + \binom{n+m}{3} z^3$$
$$+ \binom{n+m}{4} z^4 + \ldots + \binom{n+m}{r} z^r + \ldots$$

Da nun diese Reihe von $n+m$ eben so abhängt, wie die Reihe (α) von n, oder die Reihe (β) von m, so müssen wir sie, nach der festgesetzten Bezeichnungsart, durch $f(n+m)$ darstellen, und wir erhalten die Gleichung

$$f(n) \cdot f(m) = f(n+m) \ldots (\gamma),$$

was für Zahlen auch n und m bezeichnen mögen. Man setze $m+p$ statt m, so wird

$$f(n) \cdot f(m+p) = f(n+m+p), \text{ oder}$$
$$f(n) \cdot f(m) \cdot f(p) = f(n+m+p), \text{ und allgemein}$$
$$f(n) \cdot f(m) \cdot f(p) \cdot f(q) \cdot f(r) \ldots = f(n+m+p+q+r+\ldots) \ldots (\delta).$$

3. Nun sei $n = m = p = q = r = \ldots$, und die Anzahl der Faktoren $= \alpha$, so geht die letzte Gleichung über in

$$[f(n)]^\alpha = f(\alpha n),$$

wobei α nothwendig eine positive ganze Zahl bezeichnen muß. Man setze ferner $n = \frac{\beta}{\alpha}$, wo der Zähler β eine positive ganze Zahl sein soll, so wird die vorige Gleichung die Form erhalten.

$$\left[f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]^\alpha = f(\beta), \text{ und hieraus folgt:}$$

$$[f(\beta)]^{\frac{1}{\alpha}} = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Weil aber β als ganze positive Zahl vorausgesetzt wurde, so hat man

$$f(\beta) = 1 + \binom{\beta}{1} z + \binom{\beta}{2} z^2 + \binom{\beta}{3} z^3 + \ldots = (1+z)^\beta,$$

folglich

$$[f(\beta)]^{\frac{1}{\alpha}} = [(1+z)^\beta]^{\frac{1}{\alpha}} = (1+z)^{\frac{\beta}{\alpha}}, \text{ und weil auch}$$

$$[f(\beta)]^{\frac{1}{\alpha}} = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{ ist, so wird auch } (1+z)^{\frac{\beta}{\alpha}} = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Nach unserer festgesetzten Bezeichnung aber ist

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 + \binom{\frac{\beta}{\alpha}}{1} z + \binom{\frac{\beta}{\alpha}}{2} z^2 + \binom{\frac{\beta}{\beta}}{\alpha} z^3 + \ldots,$$

folglich ist auch

$$(1 + z)^{\frac{\beta}{\alpha}} = 1 + \binom{\frac{\beta}{\alpha}}{1} z + \binom{\frac{\beta}{\alpha}}{2} z^2 + \binom{\frac{\beta}{\alpha}}{3} z^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \ldots\ldots$$

welche Reihe aus der Gleichung

$$\text{(D)} \quad (1 + z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \ldots\ldots$$

hervorgeht, wenn wir in dieser $n = \frac{\beta}{\alpha}$ setzen; folglich gilt die Entwicklung (D) auch dann, wenn n einen positiven Bruch bezeichnet.

4. Setzen wir in der Gleichung (γ) ferner $m = -n$, so erhalten wir

$$f(n) \cdot f(-n) = f(n - n) = f(0) = 1, \text{ mithin}$$

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)}.$$

Nun ist aber (nach Nro. 3) $f(n) = (1 + z)^n$, es mag n eine positive ganze oder gebrochene Zahl sein, folglich ist

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{(1 + z)^n} = (1 + z)^{-n}, \text{ oder}$$

$$(1 + z)^{-n} = f(-n) = 1 + \binom{-n}{1} z + \binom{-n}{2} z^2 + \binom{-n}{3} z^3 + \binom{-n}{4} z^4 + \ldots\ldots$$

Diese Reihe wird aber auch erhalten, wenn man in der Entwicklung (D) $-n$ statt n setzt, folglich gilt die Binomialformel auch für jeden negativen ganzen oder gebrochenen Werth des Exponenten n.

5. Sei nun n eine incommensurable Zahl. Wäre in diesem Falle $(1 + z)^n$ nicht $= f(n)$, so setze man $(1 + z)^n = f(n) \pm \triangle$, wobei $\triangle$ eine bestimmte absolute Größe bedeutet. Für jede irrationale Zahl n läßt sich aber eine rationale r finden, die der n so nahe kommt, als man will, so also, daß die Differenzen $(1 + z)^n - (1 + z)^r$ und $f(n) - f(r)$ kleiner werden, als jede beliebige noch so kleine Zahl,

und dann ist $(1+z)^r = f(r)$. Zieht man diese Gleichung von der obigen $(1+z)^n = f(n) \pm \triangle$ ab, so erhält man

$$(1+z)^n - (1+z)^r = f(n) - f(r) \pm \triangle.$$

Da nun hier $\triangle$ eine bestimmte, also unveränderliche Zahl bezeichnet, so könnten die Differenzen $(1+z)^n - (1+z)^r$ und $f(n) - f(r)$ nicht zugleich kleiner werden, als jede beliebige noch so kleine Zahl, was dem eben Gesagten widerspricht; es muß demnach $\triangle = 0$, also $(1+z)^n = f(n)$ für jeden irrationalen Werth von n sein; d. h. die Binomialformel gilt auch für jeden incommensurablen Werth des Exponenten.

6. Da die imaginären Ausdrücke bloße Zahlenformen sind (§. 132), welche nach den für alle reellen Größen geltenden Regeln des Calcüls behandelt werden müssen, so ist einleuchtend, daß die Binomialformel auch auf imaginäre Exponenten ausgedehnt werden könne.

7. Für jeden beliebigen Werth des Exponenten n ist demnach

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \binom{n}{4} z^4 + \ldots$$

also auch

$$a^n (1+z)^n = a^n + \binom{n}{1} a^n z + \binom{n}{2} a^n z^2 + \binom{n}{3} a^n z^3 + \binom{n}{4} a^n z^4 + \ldots$$

oder wenn man statt z wieder den Werth $\frac{x}{a}$ setzt,

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \binom{n}{r} a^{n-3} x^3$$
$$+ \binom{n}{4} a^{n-4} x^4 + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r} x^r + \ldots$$

Zusätze.

1. Setzen wir in der Gleichung (Nro. 2)

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r-2}\binom{m}{2} + \binom{n}{r-3}\binom{m}{3} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} = \binom{n+m}{r}$$

$n = m = r$, so erhalten wir

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n-2}\binom{n}{2} + \binom{n}{n-3}\binom{n}{3} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n},$$

oder

$$1 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \binom{n}{4}^2 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n-2}^2 + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},$$

weil $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$ ist. Es ist also die Summe der Quadrate der Binomial-Koefficienten für einen ganzen positiven Exponenten n dem Koefficienten des Mittelgliedes für den doppelten Exponenten 2n gleich.

2. Da im allgemeinen Gliede $\binom{n}{r} a^{n-r} x^r$ der Binomialformel r eine ganze positive Zahl sein muß, so kann r für einen ganzen positiven Werth von n nicht die Zahl n überschreiten, denn es ist $\binom{n}{n+\alpha} = 0$ (§. 114, 1). Ist also n eine ganze positive Zahl, so bricht die Binomialformel nothwendig ab, oder sie hat dann immer eine begränzte Anzahl von Gliedern. Ist aber n keine ganze positive Zahl, so kann auch der Koefficient $\binom{n}{r}$ nie $= 0$ werden, so groß man r auch nehmen mag, und man erhält demnach für $(a + x)^n$ eine ohne Ende fortlaufende Reihe, welche den numerischen Werth von $(a + x)^n$ nur dann auszudrücken fähig ist, wenn sie convergirt, d. h. wenn man nur eine mäßige Anzahl der Anfangsglieder in Anspruch zu nehmen braucht, um durch ihre Summe den Werth von $(a + x)^n$ bis auf eine beliebige Gränze genau zu erhalten.

§. 140.

Wir wollen die Binomialreihe in einigen für die Praxis sehr brauchbaren Formen darstellen.

1. Setzt man $-$ n statt n, so findet man nach gehöriger Reduktion:

$$(a + x)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1 - \binom{n}{1}\frac{x}{a} + \binom{n+1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \binom{n+2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 \right.$$
$$\left. + \binom{n+3}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \ldots + \binom{n+\rho-1}{\rho}\left(\frac{x}{a}\right)^\rho \mp \ldots\right].$$

2. Setzen wir in der Binomialformel $\frac{m}{n}$ statt n, so wird

$$(a+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+x)^m} = a^{\frac{m}{n}}\Big[1 + \frac{m}{n}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{m\,(n-m)}{1\,.\,2\,.\,n^2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2$$
$$+ \frac{m\,(n-m)\,(2n-m)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,n^3}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^3$$
$$- \frac{m\,(n-m)\,(2n-m)\,(3n-m)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,n^4}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots\Big].$$

3. Schreibt man aber in der Binomialformel $-\frac{m}{n}$ statt n, oder nimmt man in der letzten Entwicklung (Nro. 2) $-m$ statt m, so wird nach gehöriger Reduktion

$$(a+x)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(a+x)^m}} = a^{-\frac{m}{n}}\Big[1 - \frac{m}{n}\cdot\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{m\,(m+n)}{1\,.\,2\,.\,n^2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2$$
$$- \frac{m\,(m+n)\,(m+2n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,n^3}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{m\,(m+n)\,(m+2n)\,(m+3n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,n^4}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots\Big]$$

4. In der Formel (Nr. 2) sei nun $m=1$, $n=2$ und $a=\alpha^2$ so geht dieselbe über in

$$\sqrt{\alpha^2+x} = \alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^2}{\alpha^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{\alpha^3} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^4}{\alpha^7}$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{x^5}{\alpha^9} - \dots\dots$$

und hieraus folgt:

$$\sqrt{\alpha^2-x} = \alpha - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^2}{\alpha^5} - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{\alpha^5} - \frac{1\;3.5}{2.4\;6\;8}\cdot\frac{x^4}{\alpha^7}$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8\;10}\cdot\frac{x^5}{\alpha^9} - \dots$$

5. Macht man dieselben Substitutionen (in Nro. 3), so ergibt sich die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+x}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\alpha^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{\alpha^5} - \frac{1.3.5}{2.4\;6}\cdot\frac{x^3}{\alpha^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^4}{\alpha^9} - \dots$$

und nimmt man hier $-x$ statt x, so wird

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\alpha^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{\alpha^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{\alpha^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^4}{\alpha^9} + \dots$$

6. Ferner setzen wir (in Nro. 2) $m=1$, $n=3$ und $a=\alpha^3$, so ergibt sich

$$\sqrt[3]{\alpha^3+x}=\alpha+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\alpha^2}-\frac{1.2}{1.2.3^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^5}+\frac{1.2.5}{1.2.3.3^3}\cdot\frac{x^3}{\alpha^8}-\frac{1.2.5.8}{1.2.3.4.3^4}\cdot\frac{x^4}{\alpha^{11}}$$
$$+\frac{1.2.5.8.11}{1.2.3.4.5.3^5}\cdot\frac{x^5}{\alpha^{14}}-\frac{1.2.5.8.11.14}{1.2.3.4.5.6.3^6}\cdot\frac{x^6}{\alpha^{17}}+\ldots.$$

und wenn man hier $-x$ statt x schreibt:

$$\sqrt[3]{\alpha^3-x}=\alpha-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\alpha^2}-\frac{1.2}{1.2.3^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^5}=\frac{1.2.5}{1.2.3.3^5}\cdot\frac{x^3}{\alpha^5}-\frac{1.2.5,8}{1.2.3.4.3^4}\cdot\frac{x^4}{\alpha^{11}}-\ldots$$

7. Durch dieselben Substitutionen (in Nro. 3) findet man:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^3+x}}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\alpha^4}+\frac{1.4}{1.2.3^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^7}-\frac{1.4.7}{1.2.3.3^3}\cdot\frac{x^3}{\alpha^{10}}+\frac{1.4.7.10}{1.2.3.4.3^4}\cdot\frac{z^4}{\alpha^{13}}-\ldots$$

und schreibt man hier $-x$ statt x, so wird

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^3-x}}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\alpha^4}+\frac{1.4}{1.2.3^2}\cdot\frac{x^2}{\alpha^7}+\frac{1.4.7}{1.2.3.3^3}\cdot\frac{x^3}{\alpha^{10}}+\frac{1.4.7.10}{1.2.3.4.3^4}\cdot\frac{z^4}{\alpha^{13}}+\ldots$$

8. Setzt man in der Formel

$$(a-x)^n=a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2-\binom{n}{3}a^{n-3}x^3$$
$$+\binom{n}{4}a^{n-4}x^4-\ldots\ldots,$$

jetzt $x=\frac{az}{a+z}$, also

$$a-x=a-\frac{az}{a+z}=\frac{a^2}{a+z}=a^2(a+z)^{-1},$$

so wird (nach Nr. 1) nach gehöriger Reduktion

$$(a+z)^{-n}=a^{-n}\Big[1-\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{z}{a+z}\right)+\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{z}{a+z}\right)^2$$
$$-\binom{n}{3}\cdot\left(\frac{z}{a+z}\right)^3+\binom{n}{4}\cdot\left(\frac{z}{a+z}\right)^4-\ldots.\Big].$$

Setzt man hier endlich $n=-m$, so wird, weil in der Entwicklung von $(a+z)^{-n}$ der Koefficient des allgemeinen Gliedes offenbar

$$(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^r\binom{-m}{r}$$
$$=(-1)^{2r}\cdot\frac{(m+r-1)(m+r-2)\ldots(m+2)(m+1)m}{1.2.3\ldots\ldots\ldots r}$$

d. i. weil $(-1)^r\binom{n}{r}=+\binom{m+r-1}{r}$ ist,

$$(a + z)^m = a^m \left[1 + \binom{m}{1}\left(\frac{z}{a+z}\right) + \binom{m+1}{2}\left(\frac{z}{a+z}\right)^2 + \binom{m+2}{3}\left(\frac{z}{a+z}\right)^3 + \binom{m+3}{4}\left(\frac{z}{a+z}\right)^4 + \ldots\right].$$

Diese Reihe bricht ab, wenn m eine ganze negative Zahl bezeichnet.

§. 141.

Einige Methoden, den Werth einer irrationalen Zahl näherungsweise zu bestimmen.

1. Mit Hilfe der Binomialformel läßt sich die n^{te} Wurzel aus einer ganzen Zahl A, die keine vollständige Potenz des n^{ten} Grades ist, durch eine schnell convergirende Reihe darstellen.

Man bringe die Zahl A auf die Form $a^n + x$, wo aber x gegen a^n nur sehr klein sein darf, und wenn dieß nicht angeht, so multiplicire man A mit der n^{ten} Potenz einer beliebigen Zahl b, so daß das Produkt A . b^n auf jene Form gebracht werden kann. Es sei also

$$A b^n = a^n + x$$

und x sehr klein gegen a^n, so wird dann

$$\sqrt[n]{A b^n} = \sqrt[n]{a^n + x} = a \sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}}, \text{ also}$$

$$\sqrt[n]{A} = \frac{\sqrt[n]{A b^n}}{b} = \frac{a}{b} . \sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}} = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Entwickelt man nun $\left(1 + \frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ nach der Binomialformel, so findet man

$$\sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}} = 1 + \frac{1}{n} . \frac{x}{a^n} - \frac{(n-1)}{1.2.n^2} . \left(\frac{x}{a^n}\right)^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3} . \left(\frac{x}{a^n}\right)^3 - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{1.2.3.4.n^4} . \left(\frac{x}{a^n}\right)^4 + \ldots.$$

folglich wird durch Substitution

$$\sqrt[n]{A} = \frac{a}{b}\left[1 + \frac{1}{n} . \left(\frac{x}{a^n}\right) - \frac{(n-1)}{1.2.n^2} . \left(\frac{x}{a^n}\right)^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3} . \left(\frac{x}{a^n}\right)^3 - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{1.3.3.4.n^4} . \left(\frac{x}{a^n}\right)^4 + \ldots\right]$$

2. Ein anderes Verfahren, den Werth der irrationalen Wurzel $\sqrt[n]{A}$ durch Approximation zu erhalten, ist folgendes.

Unter den n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen liege a^n am nächsten bei A, und man setze nun $\sqrt[n]{A} = a \pm z$, so ist

$$A = (a \pm z)^n = a^n \pm n a^{n-1} z + \frac{n (n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} z^2 \pm \ldots\ldots$$

Da aber $z < 1$, so kann man die höhern Potenzen von z, in Bezug auf die niedrigern, vernachläßigen. Behält man bloß die erste Potenz von z bei, so wird man aus der Gleichung

$$A \doteq a^n \pm n a^{n-1} z \text{ finden: } \pm z \doteq \frac{A - a^n}{n a^{n-1}},$$

folglich durch Substitution

$$\sqrt[n]{A} \doteq a \pm z = a + \frac{A - a^n}{n a^{n-1}} = \frac{(n-1)\, a^n + A}{n a^{n-1}} = \frac{1}{n}\left[\frac{A}{a^{n-1}} + (n-1)a\right]$$

welcher Werth näher bei $\sqrt[n]{A}$ liegt als a. Setzt man den so eben gefundenen Werth statt des erstern a, so erhält man einen zweiten Näherungswerth für $\sqrt[n]{A}$, u. s. f.

3. Behält man in der Entwicklung

$$A = a^n + n a^{n-1} z + \frac{n (n-1)}{2} a^{n-2} z^2 + \ldots$$

die zweite Potenz von z noch bei, so ergibt sich die Gleichung

$$A \doteq a^n + n a^{n-1} z + \frac{n (n-1)}{2} a^{n-2} z^2 = a^n + z \left(n a^{n-1} + \frac{n (n-1)}{2} a^{n-2} z\right)$$

und hieraus folgt:

$$z \doteq \frac{A - a^n}{n a^{n-1} + \frac{n (n-1)}{2} a^{n-2} z},$$

welcher Ausdruck durch Substitution des in Nro. 2 für z gefundenen Werthes $z = \frac{A - a^n}{n a^{n-1}}$ übergeht in

$$z = \frac{A - a^n}{n a^{n-1} + \frac{n (n-1)}{2} a^{n-2} \cdot \frac{A - a^n}{n a^{n-1}}} = \frac{A - a^n}{n a^{n-1} + \frac{n-1}{2a} (A - a^n)}$$

$$= \frac{2a (A - a^n)}{2n\, a^n + (n-1)(A - a^n)},$$

und daher

$$\sqrt[n]{A} = a + z \doteq a + \frac{2a\,(A - a^n)}{2\,n\,a^n + (n-1)\,(A - a^n)}$$

$$= \frac{a\,[(n+1)\,A + (n-1)\,a^n]}{(n-1)\,A + (n+1)\,a^n},$$

und wenn z negativ genommen wird:

$$\sqrt[n]{A} = a - z \doteq \frac{a\,[(n-3)\,A + (n+3)\,a^n]}{(n-1)\,A + (n+1)\,a^n}.$$

Diese Formel gebraucht man nun eben so, wie jene in Nro. 2.

4. Wenn $\sqrt[n]{A} = a + z$ ist, und $A = a^n + n\,a^{n-1}\,z + \frac{n\,(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,z^2$

näherungsweise gesetzt wird, woraus (nach Nro. 3)

$$z \doteq \frac{A - a^n}{n\,a^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,z} = \frac{A - a^n}{\binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2}z}$$

folgt, und man setzt im Nenner dieses Bruches statt z wieder eben denselben Werth, so findet man:

$$\sqrt[n]{A} \doteq a + \cfrac{A - a^n}{n\,a^{n-1} + \cfrac{\binom{n}{2}\,a^{n-1}\,(A - a^n)}{n\,a^{n-1} + \cfrac{\binom{n}{2}\,a^{n-2}\,(A - a^n)}{n\,a^{n-1} + \cfrac{\binom{n}{2}\,a^{n-2}\,(A - a^n)}{n\,a^{n-1} + \ldots}}}}$$

§. 142.

Mittelst des binomischen Lehrsatzes läßt sich eine allgemeine Regel für die Bildung einer jeden Potenz eines Polynoms ableiten, welche unter dem Namen „polynomischer Lehrsatz" bekannt ist, und diese Regel wollen wir nun aufsuchen. Es sei also

$$A^n = (a + b + c + d + \ldots + k + l)^n$$

zu entwickeln. Man wird leicht einsehen, daß es sich vorzüglich um das allgemeine Glied dieser Entwicklung handelt, weil aus diesem dann alle übrigen Glieder durch bloße Substitutionen abgeleitet werden können. Um nun dieses allgemeine Glied, welches wir kurz durch P_n bezeichnen wollen, zu finden, setze man Kürze halber

$$A = a + b + c + d + \ldots + k + l,$$
$$B = b + c + d + \ldots\ldots + k + l,$$
$$C = c + d + e + \ldots\ldots + k + l,$$
$$D = d + c + f + \ldots\ldots + k + l,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erhält man

$$A = a + B;\ B = b + C;\ C = c + D, \ldots \text{ also}$$

$$A^n = (a+B)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} B + \binom{n}{2} a^{n-2} B^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} B^3 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{p} a^{n-p} B^p + \ldots$$

Ferner ist

$$B^p = (b+C)^p = b^p + \binom{p}{1} b^{p-1} C + \binom{p}{2} b^{p-2} C^2 + \binom{p}{3} b^{p-3} C^3 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p}{q} b^{p-q} C^q + \ldots$$

$$C^q = (c+D)^q = c^q + \binom{q}{1} c^{q-1} D + \binom{q}{2} c^{q-2} D^2 + \binom{q}{3} c^{q-3} D^3 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{q}{r} c^{q-r} D^r + \ldots$$

$$D^r = (d+E)^r = d^r + \binom{r}{1} d^{r-1} E + \binom{r}{2} d^{r-2} E^2 + \binom{r}{3} d^{r-3} E^3 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{r}{s} d^{r-s} E^s + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

endlich

$$K^\nu = (k+l)^\nu = k^\nu + \binom{\nu}{1} k^{\nu-1} l + \binom{\nu}{2} k^{\nu-2} l^2 + \binom{\nu}{3} k^{\nu-3} l^3 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{\nu}{w} k^{\nu-w} l^w.$$

Es ist demnach von A^n das allgemeine Glied

$$P_n = \binom{n}{p}\binom{p}{p}\binom{q}{r}\binom{r}{s}\ldots\binom{\nu}{w} a^{n-p} b^{p-q} c^{q-r} d^{r-s} \ldots k^{\nu-w} l^w.$$

Nun ist aber (nach §. 114, 3)

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},\ \binom{p}{q} = \frac{p!}{q!\,(p-q)!},\ \binom{q}{r} = \frac{q!}{r!\,(q-r)!},$$
$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!\,(r-s)!},\ \ldots \text{ und } \binom{\nu}{w} = \frac{\nu!}{w!\,(\nu-w)!};$$

folglich wird durch Substitution dieser Werthe

$$P_n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \cdot \frac{p!}{q!\,(p-q)!} \cdot \frac{p!}{r!\,(q-r)!} \cdot \frac{r!}{s!\,(r-s)!} \cdots$$

$$\cdots \frac{\nu!}{w!\,(\nu-w)!}\, a^{n-p}\, b^{p-q}\, c^{q-r}\, d^{r-s} \cdots k^{\nu-w}\, l^{w},$$

oder

$$P_n = \frac{n!}{(n-p)!\,(p-q)!\,(q-r)!\,(r-s)!\ldots(\nu-w)!\,w!} \times$$

$$\times\, a^{n-p}\, b^{p-q}\, c^{q-r}\, d^{r-s} \ldots k^{\nu-w}\, l^{w},$$

Setzt man nun

$$n-p=\alpha,\; p-q=\beta,\; q-r=\gamma,\; r-s=\delta, \ldots \nu-w=\varkappa,\; w=\lambda,$$

so wird

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta! \ldots \varkappa!\,\lambda!}\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta} \ldots k^{\varkappa}\, l^{\lambda},$$

oder

$$P_n = \frac{1.2.3.4\ldots(n-1)\,n}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma \times 1.2\ldots\delta \times \ldots \times 1.2\ldots\varkappa \times 1.2\ldots\lambda} \times$$

$$\times\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\beta} \ldots k^{\varkappa}\, l^{\lambda},$$

wobei die Summe der Exponenten

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots + \varkappa + \lambda = n$$

sein muß.

Um nun aus diesem allgemeinen Gliede von A_n sämmtliche Glieder der Entwicklung der Ordnung nach zu erhalten, setze man statt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ stufenweise alle natürlichen Zahlen von 0 bis n, jedoch so, daß die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \varkappa + \lambda = n$$

beständig bleibt. Man sieht also, daß man die Combinationen der n^{ten} Klasse mit Wiederholungen zu bilden, und jede Complexion mit der Permutationszahl der in ihr vorhandenen Elemente zu multipliciren hat.

Diese letztere Darstellung findet Statt, wenn n eine ganze positive Zahl ist; im entgegengesetzten Falle hat man

$$(a + B)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, B + \binom{n}{2} a^{n-2}\, B^2 + \ldots\ldots$$

nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln, und im Resultate, in welchem B bloß mit ganzen positiven Exponenten erscheint, die eben angeführte Regel in Anwendung zu bringen.

§. 143.

Anwendungen.

1. Die Binomialformel gibt uns

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm \binom{2}{1} AB + \binom{2}{2} B^2 = A^2 \pm 2AB + B^2,$$

d. h. das Quadrat eines Binomes besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Theiles, 2) aus dem doppelten Produkte beider Theile, und 3) aus dem Quadrate des zweiten Theiles. So z. B. ist

$$(a^3 + 2b)^2 = (a^3)^2 + 4a^3b + (2b)^2 = a^6 + 4a^3b + 4b^2,$$

$$\left(3a^2x - \frac{5m^4}{3ax}\right)^2 = (3a^2x)^2 - 2.3a^2x.\frac{5m^4}{3ax} + \left(\frac{-5m^4}{3ax}\right)^2$$

$$= 9a^4x^2 - 10am^4 + \frac{25m^8}{9a^2x^2},$$

$$(\sqrt{3} + 2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3.5} + (2\sqrt{5})^2$$

$$= 3 + 4\sqrt{15} + 4.5 = 23 + 4\sqrt{15},$$

$$(a - b\sqrt{-1})^2 = a^2 - 2ab\sqrt{-1} + (-b\sqrt{-1})^2$$

$$= a^2 - 2ab\sqrt{-1} + b^2(-1) = a^2 - b^2 - 2ab\sqrt{-1},$$

$$(\alpha\sqrt{-1} + \beta\sqrt[4]{-1})^2 = (\alpha\sqrt{-1})^2 + 2\alpha\beta\sqrt{-1}\,.\sqrt[4]{-1} + (\beta\sqrt[4]{-1})^2$$

$$= -\alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt[4]{(-1)^3} + \beta^2\sqrt[4]{(-1)^2}$$

$$= -\alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt[4]{-1} + \beta^2\sqrt{-1}.$$

2. Wir erhalten ferner

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm \binom{3}{1} A^2B + \binom{3}{2} AB^2 \pm \binom{3}{3} B^3$$

$$= A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3,$$

d. h. die dritte Potenz (Cubus) eines Binomes besteht 1) aus dem Cubus des ersten Theiles, 2) aus dem dreifachen Produkte aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweiten Theil, 3) aus dem dreifachen Produkte aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten Theiles, und endlich 4) aus dem Cubus des zweiten Theiles. So z. B. ist

$$(m^2 + \nu w^3) = (m^2)^3 + 3(m^2)^2\,.\,\nu w^3 + 3(m^2)^1(\nu w^3)^2 + (\nu w^3)^3$$

$$= m^6 + 3m^4\nu w^3 + 3m^2\nu^2w^6 + \nu^3w^9,$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y}{6}\right)^3=\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^3-3\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2\cdot\frac{y}{6}+3\left(\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{6}\right)^2-\left(\frac{y}{6}\right)^3$$
$$=\frac{x^6}{y^6}-\frac{x^4}{2y^3}+\frac{x^2}{12}-\frac{y^3}{216},$$

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3=(\sqrt[3]{a})^3-3(\sqrt[3]{a})^2.\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{b})^2-(\sqrt[3]{b})^3$$
$$=a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b$$
$$=a-b-3(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}),$$

$$(\sqrt{a}+a\sqrt{-1})^3=(\sqrt{a})^3+3(\sqrt{a})^2.(a\sqrt{-1})+3\sqrt{a}.(a\sqrt{-1})^2+(a\sqrt{-1})^3$$
$$=\sqrt{a^3}+3a.a\sqrt{-1}+3\sqrt{a}.a^2(-1)+a^3(\sqrt{-1})^3$$
$$=a\sqrt{a}+3a^2\sqrt{-1}-3a^2\sqrt{a}-a^3\sqrt{-1}$$
$$=a(1-3a)\sqrt{a}+a^2(3-a)\sqrt{-1},$$

$$(\sqrt{6}-\sqrt[3]{2})^3=6\sqrt{6}-18\sqrt[3]{2}+3\sqrt{6}\sqrt[3]{4}-2=6\sqrt{6}-18\sqrt[3]{2}+3\sqrt[6]{6^3.4^2}-2$$
$$=6\sqrt{6}-18\sqrt[3]{2}+3\sqrt[6]{2^7.3^3}-2=6\sqrt{6}-18\sqrt[3]{2}+6\sqrt[6]{54}-2'$$

3. Es ist $\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=$

$$=1-\binom{-1}{1}x+\binom{-1}{2}x^2-\binom{-1}{3}x^3+\binom{-1}{4}x^4-\ldots$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{(1+x)^3}=(1+x)^{-3}$$
$$=1+\binom{-3}{1}x+\binom{-3}{2}x^2+\binom{-3}{3}x^3+\binom{-3}{4}x^4+\binom{-3}{5}x^7+\ldots$$
$$=1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+28x^6-36x^7+\ldots$$

$$\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{10}=1+\binom{10}{1}\frac{x^2}{y^2}+\binom{10}{2}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2+\binom{10}{3}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^3$$
$$+\binom{10}{4}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^4+\binom{10}{5}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^5+\binom{10}{6}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^6$$
$$+\binom{10}{7}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^7+\binom{10}{8}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^8+\binom{10}{9}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^9$$
$$+\binom{10}{10}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{10}$$
$$=1+10.\frac{x^2}{y^2}+45.\frac{x^4}{y^4}+120.\frac{x^6}{y^6}+210.\frac{x^8}{y^8}$$
$$+252.\frac{x^{10}}{y^{10}}+210.\frac{x^{12}}{y^{12}}+120.\frac{x^{14}}{y^{14}}$$
$$+45.\frac{x^{16}}{y^{16}}+10.\frac{x^{18}}{y^{18}}+\frac{x^{20}}{y^{20}}.$$

Diese drei Beispiele entwickle der Anfänger zuerst nach dem binomischen Lehrsatze in der gewöhnlichen Form, dann nach §. 138, Nr. 2; ferner die beiden ersten Beispiele nach §. 140, Nr. 1, und das letzte Beispiel nach §. 138, Nr. 2 mit Rücksicht auf Nr. 5. Eben so wird es eine gute Uebung sein, die nachstehenden Beispiele nach den verschiedenen Formen des binomischen Satzes zu berechnen.

$$4.\ \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} = (1-x)^{-\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}\,x + \frac{5}{3^2}\,x^2 + \frac{5.8}{3^4}\,x^3$$

$$+ \frac{5.8.11}{4.3^5}\,x^4 + \frac{5\,.\,8\,.\,11\,.\,14}{4\,.\,5\,.\,3^6}\,x^5 + \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{2}{3}\,x + \tfrac{5}{9}\,x^2 + \tfrac{40}{81}\,x^3 + \tfrac{110}{243}\,x^4 + \tfrac{308}{729}\,x^3 + \ldots$$

$$5.\qquad \sqrt{82} = \sqrt{9^2 + 1} =$$

$$= 9 + \tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{9} - \frac{1}{2.4}\,.\,\frac{1}{9^3} + \frac{1.3}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,\frac{1}{9^5} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,.\,\frac{1}{9^7} + \ldots$$

$= 9{\cdot}05538514\ldots$ wenn wir die einzelnen Glieder dieser Reihe durch Decimalbrüche darstellen: nämlich es ist $\sqrt{82} = 9.05538514\ldots$ näherungsweise. Die Binomialformel führt also hier auf eine schnell convergirende Reihe, indem wir nur die ersten vier Glieder in Anspruch nehmen dürfen, um das Resultat bis zur 8ten Decimalstelle richtig zu erhalten. Berechnen wir den Werth von $\sqrt{82}$ nach §. 141, Nr. 2, so haben wir in der dortigen allgemeinen Formel $n = 2$ zu setzen, um sie für die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln zu modificiren, und wir finden

$$\sqrt{A} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right) \ldots (F),$$

wo a einen Näherungswerth bezeichnet. Setzen wir nun für unseren speciellen Fall $A = 82$ und $a = 9$, so erhalten wir

$$\sqrt{82} = \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{82}{9} + 9) = \tfrac{1}{2}\,(18{\cdot}111\ldots) = 9{\cdot}05555\ldots$$

Setzen wir in der Formel (F) nun $a = 9{\cdot}055$, so wird

$$\sqrt{82} = \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{82}{9{\cdot}055} + 9{\cdot}055) = 9{\cdot}05538514\ldots$$

welches Resultat mit dem vorigen vollkommen übereinstimmt.

Diese Substitution des gefundenen Resultates in der Formel (F) wird so lange wiederholt, bis man den Quotienten $\frac{A}{a}$ in so vielen Decimalstellen mit a übereinstimmend findet, als der aus der Natur

der Aufgabe zu beurtheilende Grad der Genauigkeit erfordert. Ich erinnere hier nur, daß, wenn der Quotient $\frac{A}{a}$ mit dem Näherungswerthe a in r Decimalstellen übereinstimmt, beim nächsten Schritt der Werth von $\sqrt{A}$ wenigstens mit 2r richtigen Decimalziffern gefunden werde, wie man sich leicht überzeugen kann.

Wir wollen nun $\sqrt{82}$ auch nach der Formel Nr. 3 (§. 141) berechnen. Diese Formel geht für $n=2$ über in

$$\sqrt{A} = a + \frac{2a\,(A-a^2)}{4a^2+(A-a^2)} = a + \frac{2a\,(A-a^2)}{3a^2+A} \quad \ldots . \text{(G)}$$

und setzen wir hier $A=82$, $a=9$, so wird

$$\sqrt{82} = 9 + \tfrac{18}{325} = 9{\cdot}05538461\ \ldots$$

Nun setze man in der Formel G

$$a = 9{\cdot}05538, \text{ also } a^2 = 81{\cdot}99990694, \text{ so wird}$$

$$\sqrt{82} = 9{\cdot}05538 + \frac{0{\cdot}00168538}{327{\cdot}99972082} = \left\{\begin{matrix} 9{\cdot}05538 \\ 0{\cdot}00000514 \end{matrix}\right\} = 9{\cdot}05538514.$$

Aus der Formel Nr. 4, §. 141 aber folgt für $n=2$:

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{A-a^2}{2a + \cfrac{A-a^2}{2a + \cfrac{A-a^2}{2a + \cfrac{A-a^2}{2a + \ldots}}}}$$

und für $A=82$ und $a=9$ geht dieser Ausdruck über in

$$\sqrt{82} = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}$$

6. Es ist $\sqrt[3]{214} = \sqrt[3]{216-2} = \sqrt[3]{6^3-2} = (6^3-2)^{\frac{1}{3}} =$

$$= 6 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6^2} - \frac{1\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3^2} \cdot \frac{2^2}{6^5} - \frac{1\,.\,2\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,3^3} \cdot \frac{2^3}{6^8}$$

$$- \frac{1\,.\,2\,.\,5\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,3^4} \cdot \frac{2^4}{6^{11}} - \ldots \text{ (§. 140, Nr. 6)}$$

$$= 6 - \left\{\begin{matrix} 0{\cdot}0185185185\ldots \\ 571559\ldots \\ 2940\ldots \\ 18\ldots \end{matrix}\right\} = 6 - 0{\cdot}0185759702\ldots$$

nämlich

$$\sqrt[3]{214} = 5{\cdot}9814240298\ldots,$$

welches Resultat noch in der 9ten Decimalstelle vollkommen richtig ist. Dieses Beispiel berechne man, so wie das vorige, nach den verschiedenen Methoden, die wir bereits kennen gelernt haben.

7. Mit Hilfe der Binomialformel und mit Rücksicht auf §. 133 finden wir:

$$(a + b\sqrt{-1})^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b\sqrt{-1} - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 -$$
$$- \binom{n}{3} a^{n-3} b^3\sqrt{-1} + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5\sqrt{-1} - \ldots$$
$$= \left[a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \binom{n}{6} a^{n-6} b^6 + \ldots\right]$$
$$+ \sqrt{-1}\left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 - \binom{n}{7} a^{n-7} b^7 + \ldots\right]$$

Ebenso

$$(a - b\sqrt{-1})^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b\sqrt{-1} - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$$
$$+ \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 \sqrt{-1} + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 \sqrt{-1} -$$
$$- \binom{n}{6} a^{n-6} b^6 + \ldots\ldots$$
$$= \left[a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \binom{n}{6} a^{n-6} b^6 + \ldots\ldots\right]$$
$$- \sqrt{-1}\left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 - \binom{n}{7} a^{n-7} b^7 + \ldots\right]$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen, und dividiren das Resultat durch 2, so erhalten wir:

$$\frac{(a + b\sqrt{-1})^n + (a - b\sqrt{-1})^n}{2} =$$
$$= a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \binom{n}{6} a^{n-6} b^6 + \ldots.$$

Subtrahiren wir aber jene zwei Gleichungen von einander, und dividiren ihren Unterschied durch $2\sqrt{-1}$, so finden wir:

$$\frac{(a + b\sqrt{-1})^n - (a - b\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}} =$$
$$= \binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 - \binom{n}{7} a^{n-7} b^7 + \ldots$$

8. Zur Uebung entwickle der Anfänger die Ausdrücke

$$(a + b)^{\pm n\sqrt{-1}},\ [a + b\sqrt{-1}]^{\pm n\sqrt{-1}},\ (a - b)^{\pm n\sqrt{-1}}$$
$$\text{und } [a - b\sqrt{-1}]^{\pm n\sqrt{-1}}.$$

§. 144.

Fernere Anwendungen.

a) Wenn das Polynom $(a + b + c + d + e) = A$ zur zweiten Potenz zu erheben ist, so ist (nach §. 142) das allgemeine Glied dieser Entwickelung

$$P_2 = \frac{2!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma;\ \delta!\ \varepsilon!} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon \text{, wobei}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2 \text{ sein muß.}$$

Wir haben also hier die Combinationen der zweiten Klasse mit Wiederholungen von den Elementen a, b, c, d, e zu bilden, jede solche als Produkt betrachtete Complexion mit der entsprechenden Permutationszahl zu multipliciren, und die Summe aller dieser Resultate zu nehmen (vergl. § 117, Nr. 3). Bezeichnen wir nun diese Summe durch das Symbol $p\mathfrak{C}^2_w(a, b, c, d, e)$, wo 2 den Klassenexponenten und p die zu jeder Complexion gehörige Permutationszahl ausdrückt, so erhalten wir die Gleichung

$$A^2 = (a + b + c + d + e)^2 = p.\mathfrak{C}^2_w(a, b, c, d, e) = \mathfrak{V}\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ a, & b, & c, & e, & e \end{pmatrix}$$

wo der letztere Ausdruck die Summe der Variationen der beiden identischen Elementenreihen andeutet (§. 117, Nr. 2). Die Rechnung wird also auf folgende Art geführt werden:

Combinationen der II. Klasse.	Zugehöriger Werth von p.	Theile des gesuchten Quadrates.
a a	$\frac{1\ .\ 2}{1\ .\ 2} = 1$	a^2
a b	$1\ .\ 2 = 2$	2 a b
a c	$1\ .\ 2 = 2$	2 a c
a d	$1\ .\ 2 = 2$	2 a d
a e	$1\ .\ 2 = 2$	2 a e
b b	$\frac{1\ .\ 2}{1\ .\ 2} = 1$	b^2
b c	$1\ .\ 2 = 2$	2 b b
b d	$1\ .\ 2 = 2$	2 b d
b e	$1\ .\ 2 = 2$	2 b e
c c	$\frac{1\ .\ 2}{1\ .\ 2} = 1$	c^2

Combinationen der II. Klasse.	Zugehöriger Werth von p.	Theile des gesuchten Quadrates.
cd	$1 \,.\, 2 = 2$	2cd
ce	$1 \,.\, 2 = 2$	2ce
dd	$\frac{1 \,.\, 2}{1 \,.\, 2} = 1$	d^2
de	$1 \,.\, 2 = 2$	2de
ee	$\frac{1 \,.\, 2}{1 \,.\, 2} = 1$	e^2

Es ist nämlich

$$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae$$
$$+ b^2 + 2bc + 2bd + 2be + c^2 + 2cd + 2ce + d^2 + 2de + e^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$
$$+ 2(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de).$$

Das Quadrat eines Polynomes ist also, wie man hier sieht, der Summe der Quadrate seiner einzelnen Glieder, und der doppelten Summe aller Produkte aus je zweien derselben zusammengenommen gleich.

b) Damit wir uns hier und in der Folge kürzer fassen können, wollen wir einige neue Bezeichnungen einführen. — Ein Polynom von der Form $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_m$ wollen wir kurz durch das Symbol $\overset{\rho}{\underset{0,m}{S}} A_\rho$ andeuten, und lesen eine Summe von Gliedern von der Form A_ρ, wo der veränderliche Zeiger ρ stufenweise die Werthe von 0 bis m erhält. Es ist demnach

$$\overset{\rho}{\underset{0,m}{S}} A_\rho = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots, + A_m.$$

Dieser Annahme gemäß ist daher auch

$$\overset{\rho}{\underset{1,m}{S}} B_\rho = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_m.$$

Wir schreiben also unter das Summenzeichen S die Gränzwerthe (0 und m im ersten Falle, 1 und m im andern) des veränderlichen Zeigers ρ, und diesen selbst über das Summenzeichen.

Die Entwicklung von $(a + b + c + d + \ldots + k + l)^n$, deren allgemeines Glied

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\ldots\,\lambda!}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots l^\lambda$$

ist, und wo wir uns n als ganze positive Zahl denken, ist eine Summe von Gliedern, die sämmtlich die Form P_n haben, weßhalb wir kurz setzen können:

$$(a + b + c + \ldots + k + l)^n = \mathfrak{S} P_n = \mathfrak{S}\, \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda,$$

wo die veränderlichen Größen α, β, γ, ... $\varkappa$, λ, deren jede alle ganzen positiven Werthe von 0 bis n erhalten kann, an die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n$ gebunden sind.

Wenn wir A_0, A_1, A_2, A_3, ... A_m statt a, b, c, d, .. schreiben, so wird

$$a + b + c + \ldots + l = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_m = \overset{\rho}{\underset{0,m}{\mathfrak{S}}} A_\rho,$$

also

$$(a + b + c + \ldots + k + l)^n = (A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_m)^n$$
$$= [\overset{\rho}{\underset{0,m}{\mathfrak{S}}} A_\rho]^n = \mathfrak{p}\, \overset{n}{\mathfrak{C}}_w (A_0, A_1, A_2, \ldots A_m) \text{ (nach a)},$$

oder der polynomische Lehrsatz wird auch durch den Ausdruck

$$[\overset{\rho}{\underset{0,m}{\mathfrak{S}}} A_\rho]^n = \mathfrak{p}\, \overset{n}{\mathfrak{C}}_w (A_0, A_1, A_2, \ldots A_m) = \mathfrak{S}\, \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}\, A_0^\alpha A_1^\beta A_2^\gamma \ldots A_m^\lambda$$

dargestellt, und die Entwicklung selbst wird aus so vielen Theilen bestehen, als die $m + 1$ Elemente A_0, A_1, ... A_m Combinationen mit Wiederholungen zur n^{ten} Klasse geben, d. i. der entwickelte Ausdruck $[\overset{\rho}{\underset{0,m}{\mathfrak{S}}} A_\rho]^n$ wird $\binom{m+n}{n}$ Glieder haben (§. 113, IV).

Da nun allgemein $A_\rho^0 = 1$, und ein solcher Faktor auf den numerischen Werth der Combinationen, in welchen er erscheint, nicht influirt, mithin unberücksichtigt bleiben kann, und da ferner in der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n$ auch nur die von 0 verschiedenen Werthe von α, β, γ, ... in Betrachtung kommen, so wird man den obigen Ausdruck am leichtesten entwickeln, wenn man die Zeiger 1, 2, 3, ... zur Summe n mit Wiederholungen combinirt, und die Elemente jeder erhaltenen Complexion den Größen A_0, A_1, A_2, ... A_m so oft als Exponenten beilegt, als es nur möglich ist.

Man hat zu diesem Ende bloß für die Elemente $A_0, A_1, A_2, \ldots A_m$ die Combinationen ohne Wiederholungen zu derselben Klasse zu bilden, zu welcher die jedesmalige Exponenten-Gruppe gehört, und dann jeder einzelnen Combinationsform sämmtliche Permutationen dieser Exponenten-Gruppe beizufügen. Weil endlich die Permutationszahl $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}$ für einerlei Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ unverändert bleibt, so werden auch alle jene Glieder, welche aus der nämlichen Exponenten-Gruppe entstehen, denselben Koeffizienten erhalten.

Bezeichnen wir die Summe der Glieder, welche erhalten werden, indem man den Faktoren aller zu einer gegebenen Exponenten-Gruppe gehörigen Combinationsformen diese Exponenten in allen möglichen Versetzungen beilegt, durch das Symbol $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots]$, so nimmt unsere obige Formel folgende Gestalt an:

$$(\overset{\rho}{\underset{0,m}{S}} A_\rho)^n = S \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}[\alpha, \beta, \gamma, \ldots] = S\,\mathfrak{p}\,[\alpha, \beta, \gamma, \ldots].$$

So z. B. erhält man für $n = 2$:

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = \delta = \ldots = 0,\ \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} = \frac{1.2}{1.1} = 2,$$

$$\alpha = 2,\ \frac{n!}{\alpha!} = \frac{1.2}{1.2} = 1;$$

und demnach wird

$$(\overset{\rho}{\underset{0,m}{S}} A_\rho)^2 = [2] + 2\,[1, 1],$$

welche Formel den in (a) aufgestellten Satz enthält.

Ferner erhalten wir für $n = 3$:

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1,\ \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} = \frac{1.2.3}{1.1.1} = 6,$$

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} = \frac{1.2.3}{1.1.2} = 3,$$

$$\alpha = 3,\ \frac{n!}{\alpha!} = \frac{1.2.3}{1.2.3} = 1,$$

folglich wird

$$[\overset{\rho}{\underset{0,m}{S}} A_\rho]^3 = [3] + 3\,[1, 2] + 6\,[1, 1, 1];$$

wir erhalten nämlich Produkte aus drei gleichen Faktoren, oder die

Würfel der einzelnen Glieder, dann die dreifachen Produkte aus den Quadraten der einzelnen Theile in jeden der übrigen Theile, oder die dreifachen Produkte aus dem Quadrate jedes einzelnen Theiles in die Summe aller übrigen Theile, und endlich die sechsfachen Produkte aus je drei verschiedenen Gliedern.

Für $m = 1$ und $n = 3$ finden wir also, daß der Cubus eines Binomes gleich ist dem Cubus des ersten Theiles, mehr dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles, multiplizirt mit dem zweiten Theile, mehr dem dreifachen Produkte aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten Theiles, mehr dem Cubus des zweiten Theiles selbst.

§. 145.

Haben wir ein Polynom von der Form

$$A_0 x^{\nu} + A_1 x^{\nu+w} + A_2 x^{\nu+2w} + \ldots + A_\rho x^{\nu+\rho w} + \ldots + A_m x^{\nu+mw} =$$

$$= \overset{\rho}{\underset{0,m}{S}} A_\rho x^{\nu+\rho w},$$

welches also nach den Potenzen der Größe x geordnet ist, so wird

$[\overset{\rho}{\underset{0,m}{S}} A_\rho x^{\nu+\rho w}]^n =$ einem Polynome von derselben Form sein, nämlich das entwickelte Resultat wird ebenfalls ein nach den Potenzen von x geordnetes, auf dieselbe Art fortschreitendes Polynom sein (§. 54, 3), n als ganze Zahl vorausgesetzt.

Da nun die n^{te} Potenz eines Polynomes das Produkt aus n identischen Polynomen bezeichnet, so können wir dieselbe als die Summe aller Variationen aus n identischen Elementenreihen betrachten, wenn wir diese Variationsformen als Produkte ihrer Elemente ansehen, und dieselben durch Addition vereinigt denken. Nach §. 117, Nr. 3 aber ist die Summe aller Variationsformen aus n identischen Elementenreihen nichts anderes, als der Inbegriff aller, mit ihren zugehörigen Permutationszahlen multiplicirter Combinationen mit Wiederholungen für die Elemente einer dieser Reihen, und zwar in der n^{ten} Klasse. Allein diese aus den Elementen A_0, A_1, A_2, . . . gebildeten Combinationsformen müssen wir, weil das Resultat nach den Potenzen von x fortschreitet, in Partieen absondern, und alle jene Complexionen in eine

Gruppe zusammenstellen, bei welcher die Zeigersumme ihrer Elemente dieselbe ist. Es erscheinen nämlich der Ordnung nach die Potenzen

$$x^{n\nu},\ x^{n\nu+w},\ x^{n\nu+2w},\ \ldots\ x^{n\nu+\rho w},\ \ldots\ x^{n\nu+mnw} = (x^{\nu+mw})^n,$$

und jede Potenz $x^{n\nu+\rho w}$ nimmt für ihren Koeffizienten aus den erwähnten Combinationsformen alle jene Complexionen in Anspruch, bei welchen die Zeigersumme der zu einer Verbindung vereinigten Elemente $= \rho$ ist. Die Summe aller dieser zusammengehörigen Combinationen, mit ihren entsprechenden Versetzungszahlen multiplicirt, wollen wir durch das Zeichen $\mathfrak{p}^{\rho}\mathfrak{C}^n_w(A_0, A_1, A_2, \ldots A_m)$ andeuten, wo also ρ die Summe der Zeiger bestimmt. — Dem Gesagten zur Folge erhalten wir demnach folgende Polynomialformel:

$$[A_0x^\nu + A_1x^{\nu+w} + A_2x^{\nu+2w} + \ldots + A\rho x^{\nu+\rho w} + \ldots + A_mx^{\nu+mw}]^n$$

$$= [\underset{0,m}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}} A\rho x^{\nu+\rho w}]^n = \underset{0,mn}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}}[x^{n\nu+\rho w}\,.\,\mathfrak{p}^{\rho}\mathfrak{C}^n_w(A_0, A_1, \ldots A_m)].$$

Uebrigens folgt aus dem Obigen von selbst, daß

$$\mathfrak{p}\,.\,{}^{\rho}\mathfrak{C}^n_w(A_0, A_1, A_2, \ldots A_m) = \mathfrak{S}\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} A_0^\alpha A_1^\beta A_2^\gamma\ldots,$$

wobei α, β, γ, . . . zwar veränderlich, aber an die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$$

gebunden sind, und weil die Summe der Zeiger aller in der Combinationsform

$A_0^\alpha A_1^\beta A_2^\gamma A_3^\delta \ldots A_m^\lambda$ erscheinenden Elemente

$$= 0\,.\,\alpha + 1\,.\,\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots + m\lambda = \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots$$

ist, so hat man stets die Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots = \rho$ mit zu berücksichtigen. Unter dieser Restriction ist also auch

$$(H)\ldots[\underset{0,m}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}} A_\rho x^{\nu+\rho w}]^n = \underset{0,nm}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}}[x^{n\nu+\rho w}\,.\,\mathfrak{p}^{\rho}\mathfrak{C}^n_w(A_0, A_1, A_2, \ldots A_m)] =$$

$$= \underset{0,nm}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}}[x^{n\nu+\rho w}\,\mathfrak{S}\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}A_0^\alpha A_1^\beta A_2^\gamma\ldots)].$$

Für $n = 2$ erhalten wir daher

$$(J)\ldots[\underset{0,m}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}} A\rho x^{\nu+\rho w}]^2 = \underset{0,2m}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}}[x^{2\nu+\rho w}\,.\,\mathfrak{p}^{\rho}\mathfrak{C}^2_w(A_0, A_1, A_2, \ldots A_m)]$$

$$= \underset{0,2m}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}}\left[x^{2\nu+\rho w}\,\mathfrak{S}\frac{2!}{\alpha!\,\beta!}A_\sigma^\alpha A_{\rho-\sigma}^\beta\right],$$

und für n = 3

$$(K)\ldots\ [\mathfrak{S}_{0,m}^{\rho} A_\rho x^{\nu+\rho w}]^3 = \mathfrak{S}_{0,3m}^{\rho} [x^{3\nu+\rho w} . \mathfrak{p}^{\rho}\, \mathfrak{C}_w^3 (A_0, A_1, A_2, \ldots A_m)]$$

$$= \mathfrak{S}_{0,3m}^{\rho} \left[x^{3\nu+\rho w}\ \mathfrak{S} \frac{3!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} A_\sigma^\alpha A_\tau^\beta A_{\rho-\sigma-\tau}^\gamma\right].$$

Diese Formeln wollen wir nun anwenden auf folgende

Beispiele.

I. Es ist

$$(a^4-3b+2c-3x^2)^2=(A_0+A_1+A_2+A_3)^2=(\mathfrak{S}_{0,3}^{\rho} A_\rho)^2=[2]+2[1,1]$$

und weil

$$[2] = (a^4)^2 + (-3b)^2 + (2c)^2 + (-3x^2)^2$$
$$= a^8 + 9b^2 + 4c^2 + 9x^4, \text{ ferner}$$
$$2[1,1] = 2a^4(-3b) + 2a^4(2c) + 2a^4(-3x^2) + 2(-3b)2c$$
$$+ 2(-3b)(-3x^2) + 2.2c(-3x^2)$$
$$= -6a^4b + 4a^4c - 6a^4x^2 - 12bc + 18bx^2 - 12cx^2$$

ist, so wird

$$(a^4 - 3b + 2c - 3x^2)^2 = a^8 + 9b^2 + 4c^2 + 9x^4 - 6a^4b$$
$$+ 4a^4c - 6a^4x^2 - 12bc + 18bx^2 - 12cx^2.$$

II. $(a+b+c+d+e)^3 = [3] + 3[1,2] + 6[1,1,1]$,

und da

$$[3] = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$$
$$3[1,2] = 3a^2(b+c+d+e) + 3b^2(a+c+d+e)$$
$$+ 3c^2(a+b+d+e) + 3d^2(a+b+c+e)$$
$$+ 3e^2(a+b+c+d) \text{ und}$$
$$6[1,1,1] = 6(abc + abd + abe + acd + ace + ade$$
$$+ bcd + bce + bde + cde)$$

ist, so erhält man durch Addition dieser drei Gleichungen den Cubus des gegebenen Polynomes.

III. Man suche ferner

$$(a+b+c)^5 = \mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{C}_w^5 (a, b, c) = \mathfrak{S} \frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} [\alpha, \beta, \gamma].$$

Hier erhält man die Combinationen, nach Gruppen abgetheilt,

a^5	a^4b	a^3b^2	a^3bc	a^2b^2c
b^5	a^4c	a^3c^2	ab^3c	a^2bc^2
c^5	b^4a	b^3a^2	abc^3	ab^2c^2
	b^4c	b^3c^2		
	c^4a	c^3a^2		
	c^4b	c^3b^2		

Die Summen $1+1+1+2$ und $1+1+1+1+1$ sind hier ausgeschlossen, weil nur drei Elemente gegeben sind.

Es ist demnach hier für

$$\alpha = 5, \quad \frac{n!}{\alpha!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4.5} = 1,$$

$$\alpha = 4, \ \beta = 1, \quad \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4.1} = 5,$$

$$\alpha = 3, \ \beta = 2, \quad \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10,$$

$$\alpha = 3, \ \beta = 1, \ \gamma = 1, \quad \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.1} = 20,$$

$$\alpha = 2, \ \beta = 2, \ \gamma = 1, \quad \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.1} = 30,$$

folglich

$$\begin{aligned}(a+b+c)^5 &= [5] + 5\,[4,1] + 10\,[3,2] + 20\,[3,1,1] + 30\,[2,2,1] \\ &= a^5 + b^5 + c^5 + 5a^4b + 5a^4c + 5ab^4 + 5b^4c + \\ &+ 5ac^4 + 5bc^4 + 10a^3b^2 + 10a^3c^2 + 10a^2b^3 + 10b^3c^2 \\ &+ 10a^2c^3 + 10b^2c^3 + 20a^3bc + 20ab^3c + 20abc^3 \\ &+ 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 30ab^2c^2.\end{aligned}$$

IV. Die Potenz $(2+3x-x^2+5x^3-2x^4)^2$ zu entwickeln. Es ist hier, nach Formular J, $\nu = 0$, $w = 1$ und $m = 4$, mithin

$$(2+3x-x^2+5x^3-2x^4)^2 = \underset{0,8}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}} \left[x^\rho \,.\, \mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{C}_w^2 \begin{pmatrix}2, & 3, & -1, & 5, & -2 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4\end{pmatrix}\right]$$

wenn wir statt der Elemente

$$A_0 = 2, \quad A_1 = 3, \quad A_2 = -1, \quad A_3 = 5, \quad A_4 = -2,$$

Kürze halber bloß die Zeiger 0, 1, 2, 3, 4 setzen.

Ferner ist für

$$\alpha = 0 \text{ und } \beta = 2, \quad \frac{2!}{0!\,2!} = 1,$$

und für

$$\alpha = 1 \text{ und } \beta = 1, \quad \frac{2!}{1!\,1!} = 2.$$

Wir erhalten demnach wegen $A_5 = A_6 = \ldots = 0$,

für $\rho = 0$, die ${}^0\mathfrak{C}^2_w$, 00, oder wenn wir die Elemente selbst setzen $\mathfrak{p}\,.\,{}^0\mathfrak{C}^2_w = 1\,.\,2^2 = 4$

„ $\rho = 1$, „ ${}^1\mathfrak{C}^2_w$, 01, ... $\mathfrak{p}\,.\,{}^1\mathfrak{C}^2_w = 2\,.\,2\,.\,3 = 12$

„ $\rho = 2$, „ ${}^2\mathfrak{C}^2_w$, $\left.\begin{matrix}02\\11\end{matrix}\right\}$ . . . . $\mathfrak{p}.\,{}^2\mathfrak{C}^2_w = 2\,.\,2\,.\,(-1) + 1.3^2 = +5$

„ $\rho = 3$, „ ${}^3\mathfrak{C}^2_w$, $\left.\begin{matrix}03\\12\end{matrix}\right\}$ . . . . $\mathfrak{p}.\,{}^3\mathfrak{C}^2_w = 2\,.\,2\,.\,5 + 2\,.\,3\,(-1) = 14$

„ $\rho = 4$, „ ${}^4\mathfrak{C}^2_w$, $\left.\begin{matrix}04\\13\\22\end{matrix}\right\}$ . . . . $\mathfrak{p}\,.\,{}^4\mathfrak{C}^2_w = 2\,2(-2) + 2.3.5 + 1.(-1)^2 = +23$

„ $\rho = 5$, „ ${}^5\mathfrak{C}^2_w$, $\left.\begin{matrix}14\\23\end{matrix}\right\}$ . . . . $\mathfrak{p}\,.\,{}^5\mathfrak{C}^2_w = 2\,.\,3\,(-2) + 2\,.\,(-1)\,5 = -22$

„ $\rho = 6$, „ ${}^6\mathfrak{C}^2_w$, $\left.\begin{matrix}24\\33\end{matrix}\right\}$ . . . . $\mathfrak{p}\,.\,{}^6\mathfrak{C}^2_w = 2\,.\,(-1)(-2) + 1\,.\,5^2 = +29$

„ $\rho = 7$, „ ${}^7\mathfrak{C}^2_w$, 34 . . . . $\mathfrak{p}\,.\,{}^7\mathfrak{C}^2_w = 2\,.\,5\,(-2) = -20$

„ $\rho = 8$, „ ${}^8\mathfrak{C}^2_w$, 44 . . . . $\mathfrak{p}\,.\,{}^8\mathfrak{C}^2_w = 1\,.\,(-2)^2 = +4$

folglich wird

$$(2+3x-x^2+5x^3-2x^4)^2 = \overset{\rho}{\mathfrak{S}}[x^\rho\,.\,\mathfrak{p}\,.\,{}^\rho\mathfrak{C}^2_w\,(2, 3, -1, 5, -2)] = 4 + 12x + 5x^2 + 14x^3 + 23x^4 - 22x^5 + 29x^6 - 20x^7 + 4x^8.$$

V. Die dritte Potenz von $(2 - x - 3x^2 + x^3)$ zu bilden. — Hier ist

$$(2 - x - 3x^2 + x^3)^3 = \underset{0,9}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}} \left[x^\rho \ \mathfrak{p} \ . \ {}^{\rho}\mathfrak{C}^3_w \begin{pmatrix} 2, & -1, & -3, & 1 \\ 0, & 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} \right]$$

nach Form K.

Combiniren wir nun die Zeiger 0, 1, 2. 3 mit Wiederholungen, und bilden die dritte Klasse zu den Summen 0, 1, 2, 3, ... 8, 9, so finden wir wegen $A_4 = A_5 = \ldots = 0$

${}^{\rho}\mathfrak{C}^3_w$	also, wenn wir statt der Zeiger die Elemente setzen, und die einzelnen Complexionen mit $\mathfrak{p}$ multipliciren. $\mathfrak{p} \ . \ {}^{\rho}\mathfrak{C}^3_w$
für $\rho = 0$, 000	... $1 . 2^3 = 8$
„ $\rho = 1$, 001	... $3 . 2^2 (-1) = -12$
„ $\rho = 2$, 002, 011	... $3 . 2^2 . (-3) + 3 . 2 (-1)^2 = -30$
„ $\rho = 3$, 003, 012, 111	... $3 . 2^2 . 1 + 6 . 2 (-1)(-3) + 1 . (-1)^3 = 47$
„ $\rho = 4$, 013, 022, 112	... $6.2(-1) . 1 + 3.2(-3)^2 + 3.(-1)^2(-3) = 33$
„ $\rho = 5$, 023, 113, 122	... $6.2(-3) 1 + 3(-1)^2 . 1 + 3 (-1) . (-3)^2 = -60$
„ $\rho = 6$, 033, 123, 222	... $3 . 2 (1)^2 + 6 (-1) (-3) . 1 + 1 . (-3)^3 = -3$
„ $\rho = 7$, 133, 223	... $3 . (-1) . 1^2 + 3 (-3)^2 . 1 = 24$
„ $\rho = 8$, 233	... $3 . (-3) . 1^2 = -9$
„ $\rho = 9$, 333	... $1 . 1^3 = 1;$

folglich ist $(2 - x - 3x^2 + x^3)^3 =$

$$= 8 - 12x - 30x^2 + 47x^3 + 33x^4 - 60x^5 - 3x^6 + 24x^7 - 9x^8 + x^9.$$

VI. Man entwickle $(1 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^6)^6$. — Setzen wir in der allgemeinen Formel $n = 6$, $\nu = 0$, $w = 2$, $m = 3$, so finden wir

$$(1 - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{4}x^2)^6 = \underset{0,18}{\overset{\rho}{\mathfrak{S}}} \left[x^{2\rho} \ . \ \mathfrak{p} \ . \ {}^{\rho}\mathfrak{C}^6_w \begin{pmatrix} 1, & -4, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \\ 0, & 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} \right].$$

Die Ausführung des Calcüls überlassen wir dem Fleiße des Anfängers, und wollen hier nur die den Zeigern $\rho = 6$ und $\rho = 7$ entsprechenden Glieder entwickeln, um den Gang der Rechnung anzudeuten.

Man erhält in der sechsten Klasse die Combinationen zu der Summe | und die Elemente statt der Zeiger gesetzt, und jede Verbindung mit p multiplicirt:

$\rho = 6$, 000033	$15 . 1^4 . (\frac{1}{4})^2$	
000123	$120 . 1^3 . (-4)(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})$	
000222	$20 . 1^3 . (\frac{1}{2})^3$	
001113 . . . . ,	$60 . 1^2 . (-4)^3 . (\frac{1}{4})$	$= \frac{116471}{16}$
001122	$90 . 1^2 . (-4)^2 . (\frac{1}{2})^2$	
011112	$30 . 1 . (-4)^4 . \frac{1}{2}$	
111111	$1 . (-4)^6$	
$\rho = 7$, 000133	$60 . 1^3 . (-4)(\frac{1}{4})^2$	
000223	$60 . 1^3 . (\frac{1}{2})^2 . \frac{1}{4}$	
001123	$180 . 1^2 . (-4)^2 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4}$	
001222	$60 . 1^2 . (-4)(\frac{1}{2})^3$	$= -\frac{7173}{4}$
011113	$30 . 1 . (-4)^4 . \frac{1}{4}$	
011122	$60 . 1 . (-4)^3 . (\frac{1}{2})^2$	
111112	$6 . (-4)^5 . \frac{1}{2}$	

Wir haben also hier für p die Werthe

$$\frac{6!}{2!} = 360; \frac{6!}{2!\,2!} = 180; \frac{6!}{3!} = 120; \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90;$$

$$\frac{6!}{2!\,3!} = 60; \frac{6!}{4!} = 30; \frac{6!}{3!\,3!} = 20; \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

und $\frac{6!}{5!} = 6$ zu berücksichtigen.

§. 146.

I. Für das gewöhnliche Rechnen wollen wir die zweite und dritte Potenz von dem Polynome

$$P = a + b + c + d + e + \ldots + k + l$$

auf folgende Art darstellen:

a) $P^2 = (a + b + c + \ldots + k + l)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$+ 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$
$+ 2(a + b + c + d)e + e^2 + \ldots$
$\ldots + 2(a + b + c + \ldots + k)l + l^2$

Bei der Bildung des Quadrates eines Polynomes gibt also das erste Glied nur einen Theil, nämlich sein

Quadrat; jedes folgende Glied der Wurzel aber gibt zwei Theile, nämlich das doppelte Produkt aus ihm in die Summe aller ihm vorangehenden Glieder, und dann sein eigenes Quadrat.

b) $P^3 = (a + b + c + \ldots + k + l)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2$
$+ b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3$
$+ 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c) d^2 + d^3 + \ldots$
$+ 3(a + b + c + \ldots + k)^2 l + 3(a + b + c + \ldots + k) l^2 + l^3.$

Das erste Glied a gibt demnach seinen Cubus und jedes folgende Glied gibt drei Theile, nämlich das dreifache Produkt aus ihm in das Quadrat der Summe aller vorausgehenden Theile, dann das dreifache Produkt aus seinem Quadrate in die Summe aller vorhergehenden Theile, und endlich seinen eigenen Cubus.

II. Bilden wir nach dieser Regel das Quadrat einer n zifferigen Zahl, die wir durch Z_n bezeichnen wollen, so finden wir

$$
\begin{aligned}
(Z_n)^2 = {} & (a.10^{n-1} + b.10^{n-2} + c.10^{n-3} + \ldots + x.10^2 + y.10 + z)^2 \\
= {} & a^2.10^{2n-2} + 2ab.10^{2n-3} + b^2.10^{2n-4} \\
& + 2(a.10^{n-1} + b.10^{n-2}).c.10^{n-3} + c^2.10^{2n-6} \\
& + 2(a.10^{n-1} + b.10^{n-2} + c.10^{n-3})\, d.10^{n-4} \\
& + d^2.10^{2n-8} + \ldots \\
& + 2(a.10^{n-1} + b.10^{n-3} + \ldots + x.10^2 + y.10) z + z^2 \\
= {} & a^2.10^{2n-2} + 2ab.10^{2n-3} + b^2.10^{2n-4} \\
& + 2(a.10 + b)\, c.10^{2n-5} + c^2.10^{2n-6} \\
& + 2(a.10^2 + b.10 + c)\, d.10^{2n-7} + d^2.10^{2n-8} + \ldots
\end{aligned}
$$

wo a, b, c, ... x, y, z die Ziffern sind, mit welchen die Zahl Z_n geschrieben ist.

Setzen wir nun allgemein $k.10^r = \overset{r}{\smile}\!\!k$, wo also k die $(r+1)^{te}$ Ziffer von der Rechten gegen die Linke ist, so können wir

$$
\begin{aligned}
Z_n = {} & a.10^{n-1} + b.10^{n-2} + c.10^{n-3} + d.10^{n-4} + \ldots \\
& \ldots + x.10^2 + y.10 + z
\end{aligned}
$$

auch so schreiben:

$$Z_n = \overset{n-1}{\overbrace{a}} + \overset{n-2}{\overbrace{b}} + \overset{n-3}{\overbrace{c}} + \overset{n-4}{\overbrace{d}} + \ldots + \overset{r}{\overbrace{k}} + + \ldots + \overset{2}{\overbrace{x}} + \overset{1}{\overbrace{y}} + \overset{0}{\overbrace{z}},$$

weil $z = z.10^0$ ist, oder

$$Z_n = \overset{n-1}{\breve{a}}\;\overset{n-2}{\breve{b}}\;\overset{n-3}{\breve{c}}\;\overset{n-4}{\breve{d}}\;...\;\overset{r}{\breve{k}}\;,,.\;\overset{2}{\breve{x}}\overset{1}{\breve{y}}\overset{0}{\breve{z}},$$

wobei von selbst einleuchtet, daß es hinreichen würde, über eine einzige Ziffer den Zeiger zu setzen, indem sich hieraus die Zeiger aller übrigen Ziffer von selbst ergeben.

Es ist also allgemein $(a\,.\,10^r)^n = a^n\,.\,10^{nr}$, oder nach dieser letztern Bezeichnungsart $(\overset{r}{\breve{a}})^n = \overset{nr}{\breve{a^n}}$, daher $(a\,.\,10^r)^2 = a^2\,.\,10^{2r}$, oder nach dieser letztern Schreibart

$$(\overset{r}{\breve{a}})^2 = \overset{2r}{\breve{a^2}} \text{ und } a\,.\,10^r \times b\,.\,10^s = a\,b\,.\,10^{r+s}, \text{ oder}$$

$$\overset{r}{\breve{a}}\,.\,\overset{s}{\breve{b}} = \overbrace{(a\,b)}^{r+s} \text{ daher auch}$$

$$\overbrace{(a\,b)}^{r+s} : \overset{s}{\breve{b}} = \overbrace{\left(\frac{a\,b}{b}\right)}^{(r+s)-s} = \overset{r}{\breve{a}}.$$

Dieser Bezeichnung gemäß erhalten wir demnach

$$(Z_n)^2 = \overbrace{a^2}^{2n-2} + \overbrace{(2\,a\,b)}^{2n-3} + \overbrace{b^2}^{2n-4} + \overbrace{(2\,(\overset{1}{\breve{a}}\,\overset{0}{\breve{b}})\,.\,\overset{0}{\breve{c}})}^{2n-5}$$

$$+ \overbrace{c^2}^{2n-6} + \overbrace{(2\,(\overset{2}{\breve{a}}\overset{1}{\breve{b}}\overset{0}{\breve{c}})\,.\,\overset{0}{\breve{d}})}^{2n-7} + \overbrace{d^2}^{2n-8} + \,.\,.\,.\,.\,.$$

So z. B. ist

$$(Z_4)^2 = (8749)^2 = (8\,.\,10^3 + 7\,.\,10^2 + 4\,.\,10 + 9)^2 = (\overset{3}{\breve{8}} + \overset{2}{\breve{7}} + \overset{1}{\breve{4}} + \overset{0}{\breve{9}})^2$$

$$= \overset{6}{\breve{8^2}} + \overbrace{2.8.7}^{3+2} + \overset{4}{\breve{7^2}} + 2(\overset{3}{\breve{8}} + \overset{2}{\breve{7}})\,.\,\overset{1}{\breve{4}} + \overset{2}{\breve{4^2}} + 2(\overset{3}{\breve{8}} + \overset{2}{\breve{7}} + \overset{1}{\breve{4}})\,.\,\overset{0}{\breve{9}} + \overset{0}{\breve{9^2}}$$

$$= \overset{6}{\breve{64}} + \overset{5}{\breve{112}} + \overset{4}{\breve{49}} + 2\,.\,\overset{2}{\breve{87}}\,.\,\overset{1}{\breve{4}} + \overset{2}{\breve{16}} + 2\,.\,\overset{1}{\breve{874}}\,.\,\overset{0}{\breve{9}} + \overset{0}{\breve{81}}$$

$$= \overset{6}{\breve{64}} + \overset{5}{\breve{112}} + \overset{4}{\breve{49}} + \overset{3}{\breve{696}} + \overset{2}{\breve{16}} + \overset{1}{\breve{15732}} + \overset{0}{\breve{81}}.$$

Setzen wir nun diese einzelnen Bestandtheile des Quadrates nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit unter einander, so steht die Rechnung wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} 8749^2 = 64 & \ldots\ldots & = 8^2 \\ 112 & \ldots\ldots & = 2.8.7 \\ 49 & \ldots\ldots & = 7^2 \\ 696 & \ldots & = 2.87.4 \\ 16 & \ldots & = 4^2 \\ 15732 & \ldots & = 2.874.9 \\ 81 & \ldots & = 9^2 \end{array}$$

$8749^2 = 76543001.$

Hieraus erhellt nun die Gültigkeit folgender Regel, für das Quadriren der besondern Zahlen:

Die höchste Ziffer der gegebenen Zahl gibt ihr eigenes Quadrat; jede folgende Ziffer aber gibt zwei Stücke, nämlich 1) das doppelte Produkt aus ihr in die vorhergehenden Stellen (als Zahl für sich betrachtet), und 2) ihr eigenes Quadrat, indem man jeden folgenden Theil so unter den nächst vorhergehenden setzt, daß man immer nur um eine Stelle rechts hinausrückt, wodurch der Lokalwerth der einzelnen Ziffern berücksichtigt wird. Die Summe dieser Theile ist das verlangte Quadrat.

Zusatz 1.

Da $\frac{A}{10^m}$ die allgemeine Form der Decimalbrüche ist, und

$$\left(\frac{A}{10^m}\right)^2 = \frac{A^2}{10^{2m}};$$

so sieht man sogleich, daß ein Decimalbruch auf's Quadrat erhoben werde, wenn man den Zähler quadrirt, und im gefundenen Resultate zweimal so viele Decimalstellen abschneidet, als in der Wurzel $\frac{A}{10^m}$ vorhanden waren, wie auch schon aus §. 100 erhellt. So z. B. ist

$$(0{\cdot}34)^2 = 0{\cdot}34 \times 0{\cdot}34 = 0{\cdot}1156, \text{ oder}$$

$$\begin{array}{rl} (0{\cdot}34)^2 = & 9 \\ & \;24 \\ & \;\;16 \\ \hline & = 0{\cdot}1156. \end{array}$$

Zusatz 2.

Es ist

$$Z_n = a\,.\,10^{n-1} + b\,.\,10^{n-2} + \ldots + y\,.\,10 + z\text{, also}$$

$$Z_n < 10^n \text{ und } Z_n \geqq 10^{n-1} \text{ mithin}$$

$$(Z_n)^2 < 10^{2n} \text{ und } (Z_n)^2 \geqq 10^{2n-2}\text{,}$$

d. h. das Quadrat einer $n$zifferigen Zahl ist kleiner als die kleinste $(2n + 1)$ zifferige, aber nie kleiner als die kleinste $(2n - 1)$ zifferige Zahl, folglich besteht es selbst aus wenigstens $2n - 1$ Ziffern, und höchstens aus $2n$ Ziffern.

Aus dem eben Gesagten und der oben aufgestellten Regel folgt, daß, wenn man ein gegebenes Quadrat (die Stellen der Ganzen von der Rechten zur Linken, die Decimalen aber von der Linken zur Rechten) in Klassen eintheilt, indem man zu jeder Klasse zwei Ziffern nimmt, gerade so viele Klassen erhalten werden, wie viele Ziffern die Wurzel enthält, aus welcher das Quadrat gebildet wurde. Daß die letzte Klasse zur Linken auch nur eine Ziffer enthalten könne, folgt daraus, daß die höchste Zifferstelle der Wurzel nur ihr eigenes Quadrat gibt, welches auch einzifferig sein kann. So z. B. ist

(234·06)² =	4				
	1	2			
		9			
		18	4		
			16	00	
			28	08	0
					36
	5	47	84	08	36.

Theilt man hier das Quadrat 54784·0836 in Klassen ein, so findet man fünf Klassen, weil die Wurzel 234·06 fünfzifferig ist.

Daß die Decimalen von der Linken zur Rechten eingetheilt werden müssen, wird man begreifen, wenn man sich erinnert, daß jede Decimale im Quadrate zwei Decimalen gibt (Zusatz 1), und dann, wenn bei der Eintheilung auf die letzte Klasse zur Rechten nur eine Ziffer kömmt, diese Klasse durch eine rechts angehängte Nulle ergänzt werden könne (§. 18). Dieses Ergänzen wird, wie leicht einzusehen ist, nur dann nöthig, wenn aus einem unvollkommenen Quadrate, d. i. aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, aber als solches betrachtet wird, die Wurzel gesucht werden soll, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Theilt man, wie vorhin gesagt wurde, eine gegebene Quadratzahl von zwei zu zwei Ziffern in Klassen ein, so zeigt sich bei einiger Aufmerksamkeit, daß

1) das Quadrat der höchsten Wurzelnote nur in der ersten Klasse links anzutreffen sei, das Quadrat der zweiten Wurzelziffer nur in der zweiten Klasse, das Quadrat der dritten Wurzelziffer in der dritten Klasse, u. s. f.

2) daß die Ziffern der doppelten Produkte aus den einzelnen Wurzelziffern in die vorhergehenden höhern Stellen der Wurzel immer in der ersten Ziffer links der Klasse, in welcher das Quadrat der fraglichen Wurzelziffer vorkömmt, und in den Ziffern der nächst höhern Klassen enthalten seien.

III. Auf dieselbe Art erhalten wir den Würfel einer $n$zifferigen Zahl

$$(Z_n)^3 = (a.10^{n-1}+b.10^{n-2}+c.10^{n-3}+d.10^{n-4}+\ldots+x.10^2+y.10+z)^3$$

$$= (\overset{n-1}{a} + \overset{n-2}{b} + \overset{n-3}{c} + \overset{n-4}{d} + \ldots + \overset{2}{x} + \overset{1}{y} + \overset{0}{z})^3$$

$$= (\overset{n-1}{a})^3 + 3\,(\overset{n-1}{a})^2 \,.\, \overset{n-2}{b} + 3\,(\overset{n-1}{a})\,(\overset{n-2}{b})^2 + (\overset{n-2}{b})^3 + 3\,(\overset{n-1}{a} + \overset{n-2}{b})^2 \,.\, \overset{n-3}{c}$$

$$+ 3\,(\overset{n-1}{a} + \overset{n-2}{b})\,(\overset{n-3}{c})^2 + (\overset{n-3}{c})^3 + 3\,(\overset{n-1}{a} + \overset{n-2}{b} + \overset{n-3}{c})^2 \,.\, (\overset{n-4}{d})$$

$$+ 3\,(\overset{n-1}{a} + \overset{n-2}{b} + \overset{n-3}{c})\,(\overset{n-4}{d})^2 + (\overset{n-4}{d})^3 + \ldots$$

$$= \overset{3n-3}{a^3} + 3\,\overset{2n-2}{a^2}\,\overset{n-2}{b} + 3\,\overset{n-1}{a} \,.\, \overset{2n-4}{b^2} + \overset{3n-6}{b^3} + 3\,(\overset{n-1}{a}\,\overset{n-2}{b})^2 \,.\, \overset{n-3}{c} + 3\,(\overset{n-1}{a}\,\overset{n-2}{b}) \,.\, \overset{2n-6}{c^2} + \overset{3n-9}{c^3}$$

$$+ 3\,(\overset{n-1}{a}\,\overset{n-2}{b}\,\overset{n-3}{c})^2 \,.\, \overset{n-4}{d} + 3\,(\overset{n-1}{a}\,\overset{n-2}{b}\,\overset{n-3}{c}) \,.\, \overset{2n-8}{d^2} + \overset{3n-12}{d^3} + \ldots$$

$$= \overset{3n-3}{a^3} + 3\,\overset{3n-4}{(a^2.b)} + 3\,\overset{3n-5}{(a.b^2)} + \overset{3n-6}{b^3} + 3\,\overset{3n-7}{((\overset{1}{a}\,\overset{0}{b})^2.c)} + 3\,\overset{3n-8}{(\overset{1}{a}\,\overset{0}{b}.c^2)} + \overset{3n-9}{c^3}$$

$$+ 3\,\overset{3n-10}{((\overset{2}{a}\,\overset{1}{b}\,\overset{0}{c})^2 \,.\, d)} + 3\,\overset{3n-11}{((\overset{2}{a}\,\overset{1}{b}\,\overset{0}{c}) \,.\, d^2)} + \overset{3n-12}{d^3} \ldots$$

Man sieht demnach auch hier, daß jedes Glied rücksichtlich des unmittelbar vorhergehenden sich auf Einheiten der nächst niedrigern Ordnung beziehe. So z. B. ist

$$(Z_4)^3 = (4572)^3 = (\overset{3}{4} + \overset{2}{5} + \overset{1}{7} + \overset{0}{2})^3$$

$$= (\overset{3}{4})^3 + 3\,(\overset{3}{4})^2 \,.\, \overset{2}{5} + 3 \,.\, \overset{3}{4}\,(\overset{2}{5})^2 + (\overset{2}{5})^3 + 3\,(4\overset{2}{5})^2 \,.\, \overset{1}{7}$$

$$+ 3 \,.\, 4\overset{2}{5}\,(\overset{1}{7})^2 + (\overset{1}{7})^3 + 3\,(45\overset{1}{7})^2 \,.\, \overset{0}{2} + 3\,(45\overset{1}{7})\,(\overset{0}{2})^2 + (\overset{0}{2})^3$$

$$= 6\overset{9}{4} + 3 \,.\, 1\overset{6}{6} \,.\, \overset{2}{5} + 3 \,.\, \overset{3}{4} \,.\, 2\overset{4}{5} + 12\overset{6}{5} + 3 \,.\, 202\overset{4}{5} \,.\, \overset{1}{7}$$

$$+ 3 \,.\, 4\overset{2}{5} \,.\, 4\overset{2}{9} + 34\overset{3}{3} + 3 \,.\, 20884\overset{2}{9} \,.\, \overset{0}{2} + 3 \,.\, 45\overset{1}{7} \,.\, \overset{0}{4} + \overset{0}{8}$$

$$= 6\overset{9}{\breve{4}} + 24\overset{8}{\breve{0}} + 30\overset{7}{\breve{0}} + 12\overset{6}{\breve{5}} + 4252\overset{5}{\breve{5}} + 661\overset{4}{\breve{5}} + 34\overset{3}{\breve{3}}$$
$$+ 125309\overset{2}{\breve{4}} + 548\overset{1}{\breve{4}} + \overset{0}{\breve{8}},$$

oder, wenn wir diese einzelnen Zahlen nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit unter einander setzen:

$$\begin{array}{rl}
(4572)^3 = 64 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 4^3 \\
240 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 3 . 4^2 . 5 \\
300 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 3 . 4 . 5^2 \\
125 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 5^3 \\
42525 \ldots\ldots\ldots & = 3 . 45^2 . 7 \\
6615 \ldots\ldots\ldots & = 3 . 45 . 7^2 \\
343 \ldots\ldots\ldots & = 7^3 \\
1253094 \ldots\ldots & = 3 . 457^2 . 2 \\
5484 \ldots\ldots & = 3 . 457 . 2^2 \\
8 \ldots\ldots & = 2^3 \\
\hline
(4572)^3 = 95569357248. &
\end{array}$$

Eben so ist

$$(1246)^3 = (1 . 1000 + 2 . 100 + 4 . 10 + 6)^3$$
$$= 1^3 . 1000^3 + 3 (1 . 1000)^2 . 2 . 100 + 3 (1 . 1000) (2 . 100)^2$$
$$+ (2 . 100)^3 + 3 (12 . 100)^2 . 4 . 10 + 3 (12 . 100) (4 . 10)^2$$
$$+ (4 . 10)^3 + 3 (124 . 10)^2 . 6 + 3 (124 . 10) . 6^2 + 6^3$$
$$= 1000000000 + 600000000 + 120000000 + 8000000$$
$$+ 172800000 + 5760000 + 64000 + 27676800$$
$$+ 133920 + 216$$

$$\begin{array}{rr|r|rl}
= 1000000000 \text{ oder } = & 1 & & \ldots\ldots\ldots & = 1^3 \\
600000000 & 6 & & \ldots\ldots\ldots & = 3 . 1^2 . 2 \\
120000000 & 12 & & \ldots\ldots\ldots & = 3 . 1 . 2^2 \\
8000000 & 8 & & \ldots\ldots\ldots & = 2^3 \\
172800000 & 172 & 8 & \ldots\ldots & = 3 . 12^2 . 4 \\
5760000 & 5 & 76 & \ldots\ldots & = 3 . 12 . 4^2 \\
64000 & & 64 & \ldots\ldots & = 4^3 \\
27676800 & 27 & 676 & 8 \ldots & = 3 . 124^2 . 6 \\
133920 & & 133 & 92 \ldots & = 3 . 124 . 6^2 \\
216 & & & 216 \ldots & = 6^3 \\
\hline
= 1934434936 \quad = & 1 & 934 & 434|936. &
\end{array}$$

Hieraus geht nun folgende Regel, eine gegebene Zahl auf den Cubus zu erheben, von selbst hervor:

„Die erste Ziffer links gibt ihren Cubus, jede folgende Ziffer aber gibt drei Stücke, nämlich

1) das dreifache Produkt aus dem Quadrate der vorhergehenden Ziffern (als Zahl für sich betrachtet) in die zweite Ziffer selbst;
2) das dreifache Produkt aus dem Quadrate der zweiten Ziffer in die vorhergehenden, als Zahl betrachtet, und
3) ihren eigenen Würfel.

Diese Resultate werden in der hier angegebenen Ordnung so unter einander geschrieben, daß man mit jedem folgenden Produkte um eine Ziffer rechts hinausrückt, wodurch, wie aus den angeführten Beispielen zu ersehen ist, der Lokalwerth einer jeden einzelnen Ziffer berücksichtigt wird. — Die Summe dieser (constitutiven) Theile ist der verlangte Würfel."

Zusatz 1.

Da $\left(\frac{A}{10^m}\right)^3 = \frac{A^3}{10^{3m}}$, so ist klar, daß ein Decimalbruch auf den Cubus erhoben werde, wenn man in der dritten Potenz des Zählers dreimal so viele Decimalziffern abschneidet, als in der gegebenen Wurzel vorhanden waren. So ist z. B.

$$(18{\cdot}3)^3 = 6128{\cdot}487;\ (0{\cdot}542)^3 = {\cdot}159220088 \text{ und}$$
$$(0{\cdot}072)^3 = {\cdot}000373248.$$

Zusatz 2.

Da jede auf die erste folgende Ziffer der gegebenen Wurzel im Würfel drei Ziffern gibt, so sieht man ein, daß, wenn man einen gegebenen Cubus von der Rechten zur Linken in Klassen eintheilt, und zu jeder derselben drei Ziffern nimmt (die erste Klasse links ausgenommen, welche auch nur zwei, oder gar nur eine Ziffer haben kann), eben so viele Klassen erhalten werden, als Ziffern in der Wurzel sind. Theilt man die oben gefundenen Resultate von drei zu drei Ziffern in Klassen ein, und betrachtet mit Aufmerksamkeit die Entstehung jeder Ziffer im gefundenen Würfel, so ergibt sich Folgendes:

1) In der ersten Klasse (von der Linken gegen die Rechte) kömmt der Würfel der höchsten Ziffer vor;
2) die niedrigste Ziffer des dreifachen Produktes aus dem Quadrate

der ersten Wurzelziffer in die zweite kömmt in der ersten Ziffer links der zweiten Klasse vor, und überhaupt zeigt es sich, daß die niedrigste Ziffer jenes ersten Bestandtheiles, welchen eine jede, z. B. die n^{te} Wurzelnote im Cubus gibt, immer erst auf die erste Ziffer links der entsprechenden (n^{ten}) Klasse Einfluß habe;

3) die niedrigste Ziffer des zweiten Bestandtheiles, welchen jede n^{te} Wurzelziffer im Würfel gibt, kömmt wieder in der zweiten Ziffer der n^{ten} Klasse vor, und endlich

4) die niedrigste Stelle des Würfels jeder Wurzelziffer influirt schon auf die erste Ziffer rechts der entsprechenden Klasse.

Dasselbe Gesetz entdecken wir auch, wenn wir den Lokalwerth der niedrigsten Stellen in den einzelnen Bestandtheilen nach den bekannten Regeln aufsuchen.

Auf ähnliche Art, wie Nr. II. Zusatz 2 kann man sich überzeugen, daß eine m ziffrige Zahl im Würfel wenigstens $(3m - 2)$ gebe und höchstens $3m$ Ziffern haben könne.

Von den Wurzeln mehrnamiger Größen.

§. 147.

Die frühern Regeln für das Ausziehen der Wurzeln aus incomplexen Größen lassen sich auch bei mehrnamigen Größen anwenden, wenn sich diese in Faktoren auflösen lassen. Denn da z. B.

$$16a^6b^2 - 48a^5b^3 + 36a^4b^4 = 4a^4b^2(2a - 3b)^2$$

so ist auch

$$\sqrt{16a^6b^2 - 48a^5b^3 + 36a^4b^4} = \sqrt{4a^4b^2(2a - 3b)^2} = 2a^2b(2a - 3b)$$

und eben so ist

$$\sqrt[3]{27x^9y^3 + 27x^7y^4 + 9x^5y^5 + x^3y^6} = \sqrt[3]{x^3y^3(27x^6 + 27x^4y + 9x^2y^2 + y^3)}$$
$$= \sqrt[3]{x^3y^3(3x^2 + y)^3} = xy(3x^2 + y).$$

Da aber nur selten die Wurzeln aus complexen Größen rational sind, und überdieß das Auflösen in Faktoren sehr oft mit vieler Schwierigkeit verbunden ist, so sind die folgenden Methoden, Wurzeln auszuziehen, viel brauchbarer und bequemer.

§. 148.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Polynome die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung.

I. Wenn das gegebene Polynom das Quadrat eines Binoms ist, so ordne man dasselbe nach den Potenzen irgend eines Buchstaben, und verfahre mit steter Rücksicht auf die Formel

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \text{ wie folgt:}$$

1) Man ziehe aus dem ersten Gliede die Quadratwurzel aus, um den ersten Theil A der verlangten Wurzel zu erhalten.

2) Diesen gefundenen Theil quadrire man wieder, und ziehe ihn vom gegebenen Polynome ab, so erhält man den Rest $2AB + B^2 (= R)$.

3) Das erste Glied $(2AB)$ des Restes R dividire man durch das Doppelte des ersten gefundenen Theiles, nämlich durch $2A$, so ist der Quotient der zweite Theil der verlangten Wurzel.

4) Endlich bilde man die beiden Theile $2AB$ und B^2, welche B im Quadrate gibt, und ziehe ihre Summe $2AB + B^2$ vom Reste R ab. Bleibt bei dieser Subtraction kein Rest, so ist die verlangte Wurzel rational, im entgegengesetzten Falle aber irrational.

Da

$$2AB + B^2 = (2A + B) \,.\, B,$$

so addire man zum gebrauchten Divisor (Nr. 3) den gefundenen Quotienten, und ziehe das Produkt aus dieser Summe in das zweite Glied der Wurzel vom Reste R ab. Die ganze Operation wird aus nachstehenden Beispielen noch deutlicher werden.

1) $\sqrt{16a^6b^2 - 48a^5b^3 + 36a^4b^4} = 4a^3b - 6a^2b^2$

$A^2 = 16a^6b^2 \qquad = 2a^2b(2a - 3b)$ (wie oben)

$-$

$'' \qquad -48a^5b^3 + 36a^4b^4 = R;$

$(2A+B)B = -48a^5b^3 + 36a^4b^4$

$\qquad + \qquad -$

$'' \qquad ''$

Denn es ist

$$A = \sqrt{16a^6b^2} = 4a^3b,$$

$$2A = 8a^3b,\ 2AB : 2A = -48a^5b^3 : 8a^3b = -6a^2b^2,$$

$$2A + B = 8a^3b - 6a^2b^2,$$

$$(2A+B)B = (8a^3b - 6a^2b^2) \times -6a^2b^2 = -48a^5b^3 + 36a^4b^4.$$

2) $\sqrt{\frac{64 . m^2}{25} + 4mn^2 + \frac{25}{16}n^4} = \overset{A}{\frac{8}{5}m} + \overset{B}{\frac{5}{4}n^2}$

$$A^2 = \frac{64 m^2}{25}$$

$$\underline{-}$$

$$ \; '' \quad 4mn^2 + \frac{25}{16}n^4$$

$$(2A + B) . B = \quad 4mn^2 + \frac{25}{16}n^4$$

$$\underline{-}$$

$$'' \quad ''$$

Denn es ist

$$A = \sqrt{\tfrac{64}{25}m^2} = \tfrac{8}{5}m, \; 2A = \tfrac{16}{5}m,$$

$$2AB : 2A = B = 4mn^2 : \frac{16m}{5} = \frac{4mn^2 \times 5}{16m} = \tfrac{5}{4}n^2 \text{ und}$$

$$(2A + B) B = \left(\frac{16m}{5} + \tfrac{5}{4}n^2\right) . \tfrac{5}{4}n^2 = 4mn^2 + \tfrac{25}{16}n^4.$$

II. Ist die gegebene complexe Größe das Quadrat einer drei- oder mehrnamigen Größe, so läßt sich die Quadratwurzel aus derselben dennoch mit Hilfe der Formel $A^2 + 2AB + B^2$ ausziehen, indem man die gefundenen Theile der Wurzel zusammengenommen als ersten Theil betrachtet, wenn man nämlich $A + B = A'$ setzt, und wie früher verfährt. Aus folgenden Beispielen wird dieses noch deutlicher werden.

1) $\sqrt{25 + 20x + 4x^2 + 30y + 12xy + 9y^2} = \overbrace{\overset{A}{5} + \overset{B}{2x}}^{A'} + \overset{B'}{3y}.$

$$A^2 = 25$$

$$\underline{-}$$

$$(20x + 4x^2 + 30y + 12xy + 9y^2) : 10$$

$$(2A+B)B = 20x + 4x^2$$

$$\underline{--}$$

$$'' \quad '' \quad (30y + 12xy + 9y^2) : (10 + 4x)$$

$$(2A' + B')B' = \quad 30y + 12xy + 9y^2$$

$$\underline{---}$$

$$'' \quad '' \quad ''$$

Denn

$$A = \sqrt{25} = 5, \; 2A = 10, \; 2AB : 2A = B = 20x : 10 = 2x,$$

$$(2A+B)B = (10 + 2x)2x = 20x + 4x^2, \; A + B = A' = 5 + 2x,$$

$$2A' = 10 + 4x, \; B' = 30y : 10 = 3y,$$

$$(2A' + B')B' = (10 + 4x + 3y) 3y = 30y + 12xy + 9y^2.$$

$$2)\quad \sqrt{1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4} = \overbrace{\underset{A}{1} - \underset{B}{2x}}^{A'} + \underset{B'}{3x^2}$$

$$A^2 = +1$$

$$-$$

$$\text{''} \quad - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4 = R$$

$$(2A+B)B = - 4x + 4x^2$$

$$+ \quad -$$

$$+ 6x^2 - 12x^3 + 9x^4 = R'$$

$$(2A' + B')\,B' = + 6x^2 - 12x^3 + 9x^4$$

$$- \quad + \quad -$$

$$\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$$

Es ist nämlich

$$A = \sqrt{1} = 1,\ 2A = 2,\ 2AB : 2A = B = -4x : 2 = -2x,$$

$$(2A + B)\,B = (2 - 2x) \times - 2x = -4x + 4x^2,$$

$$A' = 1 - 2x,\ 2A' = 2 - 4x,\ B' = 6x^2 : 2 = 3x^2,$$

$$(2A' + B')\,B' = (2 - 4x + 3x^2)\,3x^2 = 6x^2 - 12x^3 + 9x^4.$$

III. Ist gleichwohl die Wurzel aus einer mehrnamigen Größe irrational, so läßt sie sich dennoch auf diese Art näherungsweise bestimmen: man erhält nämlich in diesem Falle eine Reihe von Gliedern, welche sich so weit fortsetzen läßt, als man will. Sollte z. B. $\sqrt{a^2 + x}$ auf die hier angeführte Art entwickelt werden, so erhält man

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \frac{x^3}{16a^6} - \frac{5x^4}{128a^7} + \ldots$$

$$A^2 = a^2$$

$$-$$

$$\text{''} + x \qquad B = x : 2a = \frac{x}{2a}$$

$$(2A+B)B = +x + \frac{x^2}{4a^2}$$

$$- \quad -$$

$$\text{''} - \frac{x^2}{4a^2} \qquad B' = - \frac{x^2}{4a^2} : 2a = - \frac{x^2}{8a^3}$$

$$(2A'+B')\,B' = - \frac{x^2}{4a^2} - \frac{x^3}{8a^4} + \frac{x^4}{64a^6}$$

$$+ \quad + \quad -$$

$$\text{''} \quad \frac{x^3}{8a^4} - \frac{x^4}{64a^6} \qquad B'' = \frac{x^3}{8a^4} : 2a = \frac{x^3}{16x^5}$$

$$(2A''+B'')B''=\frac{x^3}{8a^4}+\frac{x^4}{16a^6}-\frac{x^5}{16a^8}+\frac{x^6}{256a^{10}},\ A''=A'+B'$$

$$-\quad-\quad+\quad-$$

$$''\quad -\frac{5x^4}{64a^6}+\frac{x^5}{64a^8}-\frac{x^6}{256a^{10}};\ B'''=\frac{-5x^4}{64a^6}:2a=\frac{-5x^4}{128a^7}$$

u. s. w.

Dasselbe Resultat haben wir schon oben, §. 140, 4, gefunden.

Das zwischen $\sqrt{a^2+x}$ und dem gefundenen Resultate stehende Gleichheitszeichen hat nur dann die bekannte Bedeutung, wenn am Ende die Ergänzung hinzugefügt wird. Vernachläßigt man aber diesen Rest, so zeigt jenes Zeichen an, daß das erhaltene Resultat der Entwicklung von $\sqrt{a^2+x}$ nur der Form, aber nicht der absoluten Größe nach gleich sei.

§. 149.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen dekadischen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung.

Die gegebene Zahl ist entweder ein vollkommenes Quadrat, oder nicht, d. i. die Wurzel ist entweder rational oder irrational.

A. Die gegebene Zahl sei ein vollkommenes Quadrat.

1. Ist die gegebene Zahl nur ein= oder zweizifferig, so ist die Wurzel aus dem Einmaleins bekannt.

2. Ist die gegebene Zahl aber mehrzifferig, so theile man a) dieselbe in Klassen von zwei zu zwei Ziffern ein, wie §. 146 gelehrt worden ist. So viele Klassen vorhanden sind, so viele Ziffern hat die verlangte Wurzel. b) Da nun das Quadrat der höchsten Wurzelziffer in der ersten Klasse links ganz enthalten sein muß (§. 146, II.), so ziehe man aus dieser Klasse die Quadratwurzel, oder wenn sie kein vollkommenes Quadrat ist, so nehme man die nächst kleinere Quadratzahl, und ziehe daraus die Quadratwurzel aus, welche die erste (höchste) Ziffer der verlangten Wurzel ist. c) Diesen gefundenen Theil der Wurzel erhebe man wieder zum Quadrate, und ziehe dieses von der ersten Klasse ab. d) Setzt man nun zum gebliebenen Reste die erste Ziffer der zweiten Klasse herab, so muß in dieser Zahl das doppelte Produkt

aus der ersten Wurzelziffer in die zweite enthalten sein (§. 146, Anm.), und demnach muß der Quotient aus dem Doppelten der gefundenen Wurzelziffer in jene Zahl die zweite Wurzelnote sein; oder man setze zum gebliebenen Reste, der natürlich auch Null sein kann, die nächste Klasse herab, schneide die erste Ziffer rechts ab, und dividire dann die links stehende Zahl durch die doppelte erste Wurzelziffer, um die zweite Wurzelnote zu erhalten. e) Nun bilde man die beiden Bestandtheile, welche diese zweite Wurzelziffer im Quadrate gibt (§. 146), und ziehe ihre Summe von der Zahl ab, welche man erhält, wenn man dem ersten Reste die ganze zweite Klasse rechts beisetzt. f) Hat die verlangte Wurzel mehr als zwei Ziffern, so setze man zum letzten Reste die nächste Klasse herab, schneide die erste Ziffer rechts ab, und verfahre wie vorhin, indem man die bereits gefundenen Stellen der Wurzel als den ersten Theil derselben betrachtet. g) Ist irgendwo der Dividend kleiner als der Divisor, so wird in der Wurzel eine Null angesetzt, die nächste Klasse gleich herabgeschrieben, und wie oben die Operation fortgesetzt. h) Hat die gegebene Zahl rechts mehrere Nullen, so gibt jedes Paar derselben in der Wurzel nur eine Null, wie aus §. 146 erhellt. i) Ist die Summe der constitutiven Theile einer Wurzelziffer größer als die Zahl, von welcher sie abgezogen werden soll (Nr. e), so ist dieß ein Zeichen, daß man die fragliche Wurzelziffer zu groß genommen habe.

B e i s p i e l e.

1. $\sqrt{13|69} = 37.$

$$
\begin{array}{ll}
-\ 9 & \\
\hline
46,9 : 6 = 7, & 2.3.7 = 42 \\
-\ 46\ 9 & 7^2 = \ \ 49. \\
\hline
\text{"} & 2.3.7 + 7^2 = 469.
\end{array}
$$

Da hier die erste Klasse (13) kein vollkommenes Quadrat, und das nächst kleinere 9 ist, so ist die erste Wurzelziffer $\sqrt{9} = 3 = A$. Also ist $2A = 6$ und $46 : 6 = 7$ als ganze Zahl.

Da die Wurzel hier zweiziffrig sein muß, so hat die erste Stelle (3) links den Lokalwerth 10, folglich müßte eigentlich der Rest 469 durch 2.3.10 = 60 dividirt werden. Läßt man also die Null außer Acht, so muß im Dividende rechts eine Ziffer (9) abgeschnitten werden, um den Quotienten richtig zu bestimmen, und hiedurch wird die in (d) angeführte Behauptung bestätigt.

II. $\sqrt{13|69|00|00} = 3700$, wie für sich klar ist.

III. $\sqrt{12|11|04} = 348$

$A^2 = 9$

—

31‚1 : 6
— 24 } . . . = 2 × 3 × 4
— 16 } . . . = 4^2

„550‚4 : 68
— 544 } = 2 × 34 × 8
— 64 } = 8^2

„ „ „ „

Hier wurden nämlich die Bestandtheile, welche die entsprechenden Wurzelziffern im Quadrate geben, gleich als Subtrahende dem Minuend nach dem Gesetze der Gleichnamigkeit untergesetzt.

Weil $2AB + B^2 = (2A + B)B$, so kann die Subtraction der Bestandtheile jeder Wurzelnote kürzer dadurch verrichtet werden, daß man dem gebrauchten Divisor (in Bezug auf die nächste Wurzelziffer als Zehner betrachtet) die neue gefundene Ziffer zur Seite rechts setzt, und das Produkt aus dieser Zahl in die neue gefundene Wurzelnote selbst sogleich in Gedanken abzieht, wie wir in der Folge immer thun werden. Um der Deutlichkeit willen wollen wir das letzte Beispiel auch auf diese Art behandeln.

$\sqrt{12|11|04} = 348.$

31‚1 : 6_4
× 4
550‚4 : 68_8
000 × 8.

IV. $\sqrt{1|75|72\cdot|15|36} = 132.56.$

„7‚5 : 2_3
„67‚2 : 26_2
14 81‚5 : 264_5
1 5903,6 : 2650_6
0000 0

Aus §. 146 folgt von selbst, daß hier die gesuchte Wurzel nur drei Stellen für die ganzen enthalten könne, und daß demnach die folgenden Stellen Decimalen sein müssen.

Wenn Decimalzahlen mit denselben Ziffern, welche in derselben Ordnung auf einander folgen, geschrieben sind, so bleiben auch die Wurzelziffern immer dieselben, sobald immer dieselben Ziffern in eine

Klasse zu stehen kommen, wie für sich klar ist. So z. B. fanden wir vorhin, daß

$$\begin{aligned}\sqrt{17572{\cdot}1536} &= 132{\cdot}56 \text{ sei, also ist}\\ \sqrt{175{\cdot}721536} &= 13{\cdot}256,\\ \sqrt{1{\cdot}75721536} &= 1{\cdot}3256,\\ \sqrt{175721536} &= 13256; \text{ aber}\\ \sqrt{1757{\cdot}21536} &= 41{\cdot}919\ldots\end{aligned}$$

Von der Gültigkeit dieses Verfahrens könnte man sich auch auf folgende Art überzeugen.

Sei die vorgelegte Quadratzahl $Z = \overset{2n}{\breve{A}}\;\overset{2n-1}{\overbrace{B}}\;\overset{2n-2}{C}\,D\,E\ldots\overset{2}{\breve{X}}\overset{1}{\breve{Y}}\overset{0}{\breve{Z}}$. Theilt man diese Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen von zwei zu zwei Ziffern, so ist der Zeiger der niedrigsten Stelle jeder Klasse nothwendig eine gerade Zahl, man hat nämlich

$$Z = \overset{2n}{\breve{A}} \mid \overset{2n-2}{\overbrace{B\,C}} \mid \overset{2n-4}{\overbrace{D\,E}} \mid \ldots \mid \overset{2}{\overbrace{W X}} \mid \overset{0}{\overbrace{Y Z}}.$$

Ist nun a^2 die größte Quadratzahl, die sich von A abziehen läßt, so erhält man, der Auflösung zur Folge, als erste Wurzelziffer $\sqrt{\overset{2n}{\breve{a^2}}} = \overset{n}{\breve{a}}$, und es sei $\overset{2n}{\breve{A}} - \overset{2n}{\breve{a^2}} = \overset{2n}{\breve{\alpha}}$. Dividirt man nun $\overset{2n}{\breve{\alpha}}\;\overset{2n-1}{\overbrace{B}}$ durch $2\overset{n}{\breve{a}}$, so ist der Quotient

$$(\overset{2n}{\breve{\alpha}}\overset{2n-1}{\overbrace{B}} : 2\overset{n}{\breve{a}}) = [(\overset{1}{\breve{\alpha}}\overset{0}{\breve{B}}).10^{2n-1} : 2\,a\,10^n] = \frac{\overset{1}{\breve{\alpha}}\overset{0}{\breve{B}}}{2\,a}.10^{n-1} = b.10^{n-1} = \overset{n-1}{\overbrace{b}},$$

also ein Vielfaches von 10^{n-1}, und es schließt sich demnach die Ziffer b rücksichtlich ihres Lokalwerthes unmittelbar an die Ziffer a an. Bildet man nun die beiden Bestandtheile, welche die Ziffer b im Quadrate gibt, nämlich

$$(2\overset{n}{\breve{a}} + \overset{n-1}{\overbrace{b}}) . \overset{n-1}{\overbrace{b}} = (2a\,.\,10 + b)\,b\,.\,10^{2n-2} = [\overset{2n-2}{\overbrace{(2a\,.\,10 + b)}}\,b],$$

und zieht diese Summe von $\alpha\,B\,\overset{2n-2}{\overbrace{C}}$ ab, so bleibt ein Rest $\overset{2n-2}{\overbrace{\beta}}$. Nun sei ferner

$$\overset{2n-2}{\overbrace{\beta}}\;\overset{2n-3}{\overbrace{D}} : 2\,.\,\overset{n}{\breve{a}}\,\overset{n-1}{\overbrace{b}} = \overset{n-2}{\overbrace{c}},$$

so ist der Quotus c die unmittelbar auf b folgende Wurzelziffer, u. s. w. f. Durch Wiederholung dieser Operation erhält man daher endlich

$$\sqrt{Z} = \overset{n}{\breve{a}}\,\overset{n-1}{\overbrace{b}}\,\overset{n-2}{\overbrace{c}}\,\overset{n-3}{\overbrace{d}}\ldots\overset{2}{\breve{x}}\overset{1}{\breve{y}}\overset{0}{\breve{z}},$$

als die gesuchte Wurzel.

B. Die gegebene Zahl sei ein unvollkommenes Quadrat.

Hat man aus der gegebenen Zahl die Wurzel als ganze Zahl gefunden, so hänge man dem letzten Reste eine Klasse von Nullen (gleichsam als Decimalstellen) an, und verfahre wie oben. Zum neuen Reste setze man wieder ein Paar Nullen, und setze auf diese Art die Operation so weit fort, als es die Genauigkeit der Rechnung erfordert. Oder man hänge gleich Anfangs der gegebenen Zahl die nöthige Anzahl von Nullen-Paaren an, ziehe dann aus dem Zähler des so erhaltenen Decimalbruches die Quadratwurzel aus, und schneide im gefundenen Resultate so viele Stellen für die Ganzen ab, wie viele Klassen die Ganzen der gegebenen Zahl einnehmen. Der Beweis erhellt aus §. 135, Zusatz 2.

Beispiel.

$$\sqrt{10} = 3{\cdot}1622776 \ldots$$
$$\begin{array}{rl} 1_{0,0} & : 6_1 \\ 39_{0,0} & : 62_6 \\ 144_{0,0} & : 632_2 \\ 1756_{0,0} & : 6324_2 \\ 49116_{0,0} & : 63244_7 \\ 484471_{0,0} & : 632454_7 \\ 4175271_{0,0} & : 6324554 \end{array}$$

u. s. w.

Uebrigens läßt sich, wenn die Wurzel mit mehreren Decimalstellen gesucht wird, die Rechnung bedeutend abkürzen. Man suche nämlich, wenn n Ziffern verlangt werden, die ersten $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ Ziffern auf die gewöhnliche Art, und die letzten $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ Ziffern durch die abgekürzte Division. Wird z. B. $\sqrt{10}$ mit 7 Decimalen genau verlangt, so wird man die erstern 4 Decimalen wie vorhin suchen, die letztern aber durch die Division. Nämlich

$$\sqrt{10} = 3{\cdot}1622776$$
$$\begin{array}{rl} 1_{0,0} & : 6_1 \\ 39_{0,0} & : 62_6 \\ 144_{0,0} & : 632_2 \\ 1756_{0,0} & : 6324_2 \\ 49116_{,0,0} & : 63{,}2{,}4{,}4 \\ 4845 & \\ 418 & \\ 39 & \end{array}$$

Man hat hier nämlich die abgekürzte Division so eingerichtet, daß man eine Stelle mehr, als verlangt wurden, hätte bestimmen können, um die letzte beibehaltene Ziffer vollkommen genau zu erhalten.

Es wird für den Anfänger eine nützliche Uebung sein, die Gültigkeit dieses Verfahrens zu beweisen.

Kann die Quadratwurzel aus einer unvollständigen Quadratzahl ein periodischer Decimalbruch sein, oder nicht?

§. 150.

Aufgabe.

Den Werth einer irrationalen Quadratwurzel durch einen Kettenbruch näherungsweise zu bestimmen.

Auflösung.

Es sei $\sqrt{A} > a$ und $< a + 1$. Man setze demnach

$$\alpha) \quad \sqrt{A} = a + \frac{1}{p}, \quad \text{also} \quad \sqrt{A} - a = \frac{1}{p} < 1$$

woraus $p = \frac{1}{\sqrt{A} - a} > 1$ gefunden wird.

Setzt man nun $p = b + \frac{1}{q}$, und substituirt diesen Werth in der Gleichung α, so findet man

$$\beta) \quad \sqrt{A} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{q}}.$$

Aus der Gleichung $p = b + \frac{1}{q}$ folgt $p - b = \frac{1}{q} < 1$, also $q = \frac{1}{p - b} > 1$. Es sei demnach $q = c + \frac{1}{r}$, so ist durch Substitution im letzten Ausdrucke für $\sqrt{A}$ der dritte Näherungswerth

$$\gamma) \quad \sqrt{A} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{r}}}.$$

Weil aber $q - c = \frac{1}{r} < 1$, so ist $r = \frac{1}{q - c} > 1$. Setzt man nun $r = d + \frac{1}{u}$, so ist, wenn dieser Werth in (γ) gesetzt wird,

$$\delta)\ \sqrt{A} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{u}}}},\ \text{u. s. w.}$$

Man sieht, daß auf diese Art der Werth von $\sqrt{A}$ immer genauer gefunden werde. Daß diese Operation ohne Ende fortgesetzt werden könne, folgt unmittelbar aus dem Begriffe einer Irrationalzahl (§. 135).

Der Beweis für die Gültigkeit der Auflösung liegt in der Gesetzmäßigkeit der Operation selbst.

Beispiele.

1. Man bestimme auf diese Art $\sqrt{37}$. Es ist hier $A = 37$, also $a = 6$ und $p = \frac{1}{\sqrt{37} - 6} = \frac{\sqrt{37} + 6}{(\sqrt{37} - 6)(\sqrt{37} + 6)} = \frac{\sqrt{37} + 6}{1} \doteq \frac{6 + 6}{1}$ (näherungsweise) $= 12 = b$. Ferner ist

$$q = \frac{1}{p - b} = \frac{1}{(\sqrt{37} + 6) - 12} = \frac{1}{\sqrt{37} - 6} = \frac{\sqrt{37} + 6}{(\sqrt{37} - 6)(\sqrt{37} + 6)}$$

$$= \sqrt{37} + 6 = c + \frac{1}{r},\ \text{also}\ c = 6 + 6 = 12.$$

Eben so findet man auch, daß d und die folgenden Nenner $= 12$ werden. Also ist

$$\sqrt{37} \doteq 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}$$

wo dann die Näherungswerthe nach §. 108 gesucht werden.

Zusatz.

Auf dasselbe Resultat leitet uns folgende Betrachtung. Wenn D was immer für einen Dividend, d den Divisor, q den entsprechenden Quotienten als ganze Zahl, und r den Rest bezeichnet, so ist, wie bekannt, $D = dq + r$ und $r = D - dq$. Da nun $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A}}{1} \doteq a$, als ganze Zahl, so ist $r = \sqrt{A} - a$, und daher

$$\frac{\sqrt{A}}{1} = a + \frac{\sqrt{A} - a}{1} = a + \frac{(\sqrt{A} - a)(\sqrt{A} + a)}{\sqrt{A} + a} = a + \frac{A - a^2}{\sqrt{A} + a}$$

$$= a + \frac{1}{(\sqrt{A} + a) : (A - a^2)}.$$

Verfährt man nun mit dem Divisor $\frac{\sqrt{A}+a}{A-a^2}$ auf dieselbe Art, und wiederholt diese Operation so oft, als es die Strenge der Rechnung erfordert, so findet man, wie §. 143, Nr. 5, den verlangten Werth näherungsweise. Es ist also

$$\text{a)}\ \sqrt{37} = \frac{\sqrt{37}}{1} = 6 + \frac{\sqrt{37}-6}{1} = 6 + \frac{(\sqrt{37}-6)(\sqrt{37}+6)}{\sqrt{37}+6}$$

$$= 6 + \frac{37-36}{\sqrt{37}+6} = 6 + \frac{1}{\sqrt{37}+6},$$

$$\text{b)}\ \sqrt{37}+6 = \frac{\sqrt{37}+6}{1} = 12 + \frac{\sqrt{37}+6-12}{1} = 12 + \frac{\sqrt{37}-6}{1}$$

$$= 12 + \frac{1}{\sqrt{37}+6}\ \text{(wie vorhin)},$$

also durch Substitution in (a) $\sqrt{37} = 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{\sqrt{37}+6}}$.

Weil nun hier der Quotient immer 12 sein muß, so ist

$$\sqrt{37} = 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cdots}}$$

$$\text{II.}\ \sqrt{47} = \frac{\sqrt{47}}{1} = 6 + \frac{\sqrt{47}-6}{1} = 6 + \frac{(\sqrt{47}-6)(\sqrt{47}+6)}{\sqrt{47}+6}$$

$$= 6 + \frac{47-36}{\sqrt{47}+6} = 6 + \frac{11}{\sqrt{47}+6} = 6 + \frac{1}{(\sqrt{47}+6):11},$$

$$\frac{\sqrt{47}+6}{11} = 1 + \frac{\sqrt{47}+6-11}{11} = 1 + \frac{\sqrt{47}-5}{11}$$

$$= 1 + \frac{(\sqrt{47}-5)(\sqrt{47}+5)}{11(\sqrt{47}+5)} = 1 + \frac{47-25}{11(\sqrt{47}+5)}$$

$$= 1 + \frac{22}{11(\sqrt{47}+5)} = 1 + \frac{2}{\sqrt{47}+5} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{47}+5)},$$

$$\frac{\sqrt{47}+5}{2} = 5 + \frac{\sqrt{47}+5-10}{2} = 5 + \frac{\sqrt{47}-5}{2} = 5 + \frac{22}{2(\sqrt{47}+5)}$$

$$= 5 + \frac{11}{\sqrt{47}+5} = 5 + \frac{1}{(\sqrt{47}+5):11}.$$

Eben so findet man

$$\frac{\sqrt{47}+5}{11} = 1 + \frac{1}{\sqrt{47}+6},\quad \sqrt{47}+6 = 12 + \frac{1}{(\sqrt{47}+6):11}.$$

Hier erscheint wieder $\frac{\sqrt{47}+6}{11}$, welcher Ausdruck schon oben vorhanden war; also werden dieselben Quotienten in der nämlichen

Ordnung wiederkehren. Substituirt man die gefundenen Werthe, so erhält man:

$$\sqrt{47} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}}}$$

Zusatz.

Da die Quadratwurzel aus jeder Zahl durch einen Kettenbruch von der Form $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$

und der Werth desselben durch die Reihe

$$a_0 + \frac{1}{N_0 N_1} - \frac{1}{N_1 N_2} + \frac{1}{N_2 N_3} - \frac{1}{N_3 N_4} + \ldots$$

(§. 109, X) dargestellt werden kann; so läßt sich die Quadratwurzel aus jeder Zahl N durch eine solche schnell convergirende Reihe ausdrücken. So finden wir für $\sqrt{47}$ z. B. $a_0 = 6$, $N_0 = 1$, $N_1 = 1$, $N_2 = 6$, $N_3 = 7$, $N_4 = 90$, $N_5 = 97$, $N_6 = 575$, $N_7 = 672$, $N_8 = 8639$, u. s. w.; mithin ist

$$\sqrt{47} = 6 + \frac{1}{1.1} - \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.90}$$
$$+ \frac{1}{90.97} - \frac{1}{97.575}$$
$$+ \frac{1}{575.672} - \frac{1}{672.8639} + \ldots$$

Obgleich die Form unseres Kettenbruches für $\sqrt{47}$ dem Calcul eben nicht sehr günstig ist; so reichen dennoch die ersten neun Glieder dieser Reihe hin, um $\sqrt{47}$ mit 7 Decimalziffern vollkommen genau zu erhalten. Für $\sqrt{37}$ wird die entsprechende Reihe weit schneller convergiren, wovon sich der Anfänger durch die Rechnung überzeugen möge.

§. 151.

Aufgabe.

Aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung.

Es ist

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ (§. 125, 2)} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a \,.\, 10^{2n} : b}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{a \,.\, 10^{2n} : b}}{10^{n}}$$

So z. B. ist

$$\sqrt{\tfrac{35}{47}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{47}} = \frac{5{\cdot}916079\ldots}{6{\cdot}855654\ldots} = 0{\cdot}86294\ldots \text{ oder}$$

$$\sqrt{\tfrac{35}{47}} = \sqrt{\frac{35 \,.\, 47}{47^2}} = \frac{\sqrt{35 \,.\, 47}}{47} = \frac{\sqrt{1645}}{47} = \frac{40{\cdot}55859\ldots}{47} = 0{\cdot}862948\ldots$$

oder endlich $\sqrt{\tfrac{35}{47}} = \sqrt{0{\cdot}7446808510\ldots} = 0{\cdot}862948\ldots$

Diese letzte Methode ist für die Ausübung die bequemste und zweckmäßigste.

Eben so ist auch

$$\sqrt{\tfrac{197}{1600}} = \frac{\sqrt{197}}{40} = \frac{14{\cdot}0356688\ldots}{40} = 0{\cdot}35089172\ldots \text{ und}$$

$$\sqrt{5\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{23}{4}} = \frac{\sqrt{23}}{2} = \frac{4{\cdot}7958315\ldots}{2} = 2{\cdot}3979157\ldots$$

§. 152.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen mehrnamigen Buchstabengröße die Kubikwurzel auszuziehen.

Auflösung.

I. Wenn die gegebene Größe der Cubus eines Binoms ist, so kann die dritte Wurzel aus derselben mit Hilfe der Formel

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

auf folgende Art gefunden werden.

Man ordne die gegebene Größe nach den Potenzen eines Buchstaben, und ziehe

a) Aus dem ersten Gliede (A^3) die Kubikwurzel aus, so gibt das Resultat ($\sqrt[3]{A^3} = A$) den ersten Theil der verlangten Wurzel, welcher wieder auf den Cubus erhoben von der gegebenen Größe abgezogen werden muß.

b) Das erste Glied dieses (geordneten) Restes ($3A^2B$) dividire man durch das dreifache Quadrat des gefundenen ersten Theiles ($3A^2$), so gibt der Quotient (B) den zweiten Theil der verlangten Wurzel.

c) Endlich bilde man die drei Theile, welche jedes auf das erste folgende Glied einer mehrnamigen Wurzel im Würfel gibt (§. 146, III.), und ziehe die Summe dieser Theile vom obigen Reste ab.

Beispiele.

$$1.\ \sqrt[3]{8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3} = \overset{A}{2x} + \overset{B}{3y}$$

$$= + 8x^3$$
$$-$$

$$36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = R$$
$$36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$
$$- \quad - \quad -$$

$$'' \quad '' \quad ''$$

Denn es ist

$$A = \sqrt[3]{8x^3} = 2x,\ 3A^2 = 3\,(2x)^2 = 12x^2,$$
$$B = \frac{3A^2B}{3A^2} = 36x^2y : 12x^2 = 3y,$$
$$3A^2B = 36x^2y,\ 3AB^2 = 3.2x\,(3y)^2 = 54xy^2 \text{ und}$$
$$B^3 = (3y)^3 = 27y^3$$

$$2.\ \sqrt[3]{1 - 6x + 12x^2 - 8x^3} = 1 - 2x.$$

$$A^3 = + 1$$
$$-$$

$$- 6x + 12x^2 - 8x^3 = R$$
$$- 6x + 12x^2 - 8x^3$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$0$$

Weil $A = \sqrt[3]{1} = 1$, $3A^2 = 3$, also

$$B = \frac{3A^2B}{3A^2} = -6x : 3 = -2x,$$
$$A^3 = 1,\ 3A^2B = 3.1 \times -2x = -6x,$$
$$3AB^2 = 3.1\,(-2x)^2 = 3.4x^2 = 12x^2 \text{ und}$$
$$B^3 = (-2x)^3 = -8x^3.$$

Auflösung.

II. Besteht die dritte Wurzel aus einem gegebenen Polynome aus drei Gliedern, so suche man die beiden ersten, wie in I., dann

betrachte man die Summe dieser zwei Theile als den ersten Theil (z. B. A′) des Binoms A′ + B′, und suche gerade, wie oben der zweite Theil gefunden wurde, hier B′ als das dritte Glied der Wurzel.

Beispiele.

1. $$\sqrt[3]{1-3x+6x^2-7x^3+6x^4-3x^5+x^6} = \overbrace{\underset{A}{1} - \underset{B}{x}}^{A'} + \underset{B'}{x^2}$$

$$A^3 = +1$$
$$-$$
$$-3x+6x^2-7x^3+6x^4-3x^5+x^6 = R$$
$$3A^2B+3AB^2+B^3 = -3x+3x^2-x^3$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$'' \quad 3x^2-6x^3+6x^4-3x^5+x^6 = R_1$$
$$3A'^2B'+3A'B'^2+B'^3 = 3x^2-6x^3+6x^4-3x^5+x^6$$
$$- \quad + \quad - \quad + \quad -$$
$$0$$

Denn es ist

$$A = \sqrt[3]{1} = 1,\ 3A^2 = 3,\ B = \frac{3A^2B}{3A^2} = -3x : 3 = -x,$$

also

$$3A^2B + 3AB^2 + B^3 = -3x + 3x^2 - x^3,$$
$$A' = 1 - x,\ 3A'^2 = 3(1-x)^2 = 3 - 6x + 3x^2;$$
$$B' = 3x^2 : 3 = x^2,\ 3A'B'^2 = 3(1-x)\,x^4 = 3x^4 - 3x^5$$

und $B'^3 = x^6$, also

$$3A'^2B' + 3A'B'^2 + B'^3 = (3x^2 - 6x^3 + 3x^4) + (3x^4 - 3x^5) + x^6$$
$$= 3x^2 - 6x^3 + 6x^4 - 3x^5 + x^6.$$

2) $\sqrt[3]{27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 + 27x^2z - 36xyz + 12y^2z + 9xz^2 - 6yz^2 + z^3} = 3x - 2y + z$

$$A^3 = +27x^3$$
$$-$$
$$-54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 + 27x^2z - 36xyz + 12y^2z + 9xz^2 - 6yz^2 + z^3 = R$$
$$3A^2B + 3AB^2 + B^3 = -54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$27x^2z - 36xyz + 12y^2z + 9xz^2 - 6yz^2 + z^3 = R'$$
$$3A'^2B' + 3A'B'^2 + B'^3 = 27x^2z - 36xyz + 12y^2z + 9xz^2 - 6yz^2 + z^3$$
$$- \quad + \quad - \quad - \quad + \quad -$$
$$''$$

Denn

$$A = \sqrt[3]{27x^3} = 3x,\ 3A^2 = 27x^2,$$
$$B = -54x^2y : 27x^2 = -2y,$$
$$3A^2B = 27x^2 \times -2y = -54x^2y,$$
$$3AB^2 = 9x \times (-2y)^2 = 36xy^2,$$
$$B^3 = (-2y)^3 = -8y^3;$$
$$B' = 27x^2z : 27x^2 = z,\ A' = 3x - 2y,$$
$$3A'^2B' = 3(3x - 2y)^2 z = 27x^2z - 36xyz + 12y^2z\ \cdot$$
$$3A'B'^2 = (9x - 6y) \cdot z^2 = 9xz^2 - 6yz^2 \text{ und } B'^3 = z^3.$$

Ganz auf dieselbe Art verfährt man, wenn die Kubikwurzel aus der gegebenen Größe noch mehrere Glieder hat, indem man immer die Summe der schon gefundenen Theile als erstes Glied der verlangten Wurzel betrachtet.

3) Auf die beschriebene Art findet man auch die Kubikwurzel aus unvollkommenen Würfeln näherungsweise. So ist z. B.

$$\overset{}{\sqrt[3]{a^3 + x}} = \overset{A}{a} + \overset{B}{\frac{x}{3a^2}} - \overset{B'}{\frac{x^2}{9a^5}} + \overset{B''}{\frac{5x^3}{81a^8}} + \overset{B'''}{\frac{10 . x^4}{243 a^{11}}} + \ldots .$$

$$A^3 = a^3$$

$$-$$

$$+ x$$

$$3A^2B + 3AB^2 + B^3 = + x + \frac{x^2}{3a^3} + \frac{x^3}{27 a^3}$$

$$- \quad - \quad -$$

$$\text{„} - \frac{x^2}{3a^3} - \frac{x^3}{27 a^6}$$

$$3A'^2B' + 3A'B'^2 + B'^3 = - \frac{x^2}{3a^3} - \frac{2x^3}{9a^6} + \frac{x^5}{81a^{12}} - \frac{x^6}{729 a^{15}}$$

$$+ \quad + \quad - \quad +$$

$$\text{„} + \frac{5x^3}{27a^6} - \frac{x^5}{81a^{12}} + \frac{x^6}{729 a^{15}}$$

$$3A''^2B'' + 3A''B''^2 + B''^3 = + \frac{5x^3}{27a^6} + \frac{10x^4}{81a^9} - \frac{5x^5}{243a^{12}} - \frac{5 . x^6}{2187 a^{15}} + \frac{40 . x^7}{6561 a^{18}} - \frac{25 . x^8}{19683 a^{21}} + \frac{125 x^9}{531441 a^{24}}$$

$$- \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad -$$

$$\text{„} - \frac{10x^4}{81a^9} + \frac{2x^5}{243a^{12}} + \frac{8 . x^6}{2187 a^{18}} - \frac{40 . x^7}{6561 a^{18}} + \frac{25 . x^8}{19683 a^{21}} - \frac{125 x^9}{531441 a^{24}}$$

u. s. w.

Daß diese Rechnung ins Unendliche fortgesetzt werden könne, ist klar; man wird aber auch zugleich das Beschwerliche dieser Methode einsehen, wenn man sie mit der im §. 140, 6 angeführten vergleicht, wo wir weit schneller und bequemer dasselbe Resultat gefunden haben.

§. 153.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl die Kubikwurzel auszuziehen.

Auflösung.

Die Wurzel aus der gegebenen Zahl ist entweder rational oder irrational.

A. Wenn die verlangte Wurzel rational ist.

1. Hat der gegebene Cubus eine, zwei oder drei Ziffern, so ist die Kubikwurzel für sich bekannt.

2. Da $(10^m)^3 = 10^{3m}$, so ist umgekehrt $\sqrt[3]{10^{3m}} = 10^m$, d. h. drei Nullen des Würfels geben in der Wurzel eine Nulle.

3. Hat der gegebene Würfel (z. B. 262144) mehr als drei und weniger als sieben Zifferstellen, so theile man ihn

a) in Klassen ein, indem man der ersten Klasse rechts drei Ziffern gibt, und suche die Kubikwurzel aus der ersten Klasse links, oder wenn diese kein vollkommener Würfel ist, (wie 262 im folgenden Beispiele), suche man den nächst kleinern Cubus (216), so ist die Wurzel (6) derselben die höchste Ziffer der verlangten Wurzel.

b) Diese gefundene Wurzelziffer erhebe man wieder auf den Cubus, und ziehe diesen von der ersten Klasse ab.

c) Zum gefundenen Reste (46) setze man die zweite Klasse (144) herab, und dividire, nachdem man die zwei ersten Stellen (44) rechts abgeschnitten hat (vergl. §. 146, III.), die links stehende Zahl (461) durch das dreifache Quadrat der ersten gefundenen Wurzelziffer (d. i. durch $3 . 6^2 = 3 . 36 = 108$), so ist der Quotient (4) die zweite Zifferstelle der verlangten Wurzel (§. 146 und §. 152).

d) Endlich bilde man die drei Bestandtheile der zweiten Ziffer (4), und ziehe ihre Summe von der in (c) genannten Zahl (46144) ab, wo kein Rest bleiben kann, weil wir voraussetzen, daß die Wurzel rational sei.

Beispiele.

I. $\sqrt[3]{262|144} = 64.$

$$A^3 = 216$$

$$3A^2 = 3.6^2 = 3.36 = 108,$$

$$461,44 \qquad B = 461 : 108 = 4,$$

$$-\begin{cases} 3A^2B = -432\,.. \\ 3AB^2 = 288 \\ B^3 = 64 \end{cases}$$

„ „ „ „ „

II. $\sqrt[3]{91|125} = 45.$

$$A^3 = 64$$

$$A = 4,\ 3A^2 = 48,\ B = 271 : 48 = 5,$$

$$271,25$$

$$-\begin{cases} 240\,.. = 3A^2B \\ 300\,. = 3AB^2 \\ 125 = B^3 \end{cases}$$

„ „ „ „ „

4. Der gegebene Würfel mag aus noch so vielen Zifferstellen bestehen, so wird die dritte Wurzel auf folgende Art gefunden:

α) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke von drei zu drei Ziffern in Klassen ein, und suche die zwei höchsten Ziffern der Wurzel, wie in Nro. 3.

β) Zu dem etwa gebliebenen Reste setze man die dritte Klasse herunter, betrachte die von den beiden ersten gefundenen Wurzelziffern gebildete Zahl als den ersten Theil der verlangten Wurzel, und suche wie in Nro. 3 den zweiten Theil derselben. Hierauf bilde man die drei Theile, welche jede Ziffer nach der ersten im Würfel gibt, und ziehe ihre Summe von dem Dividende ab, zu welchem nun auch die beiden abgeschnittenen Ziffern wieder gehören.

γ) Nun betrachte man die von den drei gefundenen Ziffern gebildete Zahl als den ersten Theil der Wurzel, und suche wie vorhin die vierte Ziffer, u. s. w. Diese Operation wiederholt sich so lange, bis endlich alle Klassen der gegebenen Kubikzahl herabgesetzt worden sind, wo dann am Ende, vermöge unserer Voraussetzung, kein Rest bleiben darf.

δ) Sollte irgendwo die Summe jener drei Bestandtheile größer sein, als der Dividend, so zeigt dieß an, daß man den Quotienten (B) zu groß genommen habe.

ε) Sollte aber einmal der Dividend den Divisor ($3A^2$) nicht enthalten, so muß in der Wurzel eine Nulle angesetzt werden, und zu jenem Dividende wird die nächste Klasse heruntergeschrieben.

Der Beweis für die Giltigkeit dieses Verfahrens läßt sich auf ähnliche Art führen, wie oben beim Ausziehen der Quadratwurzeln.

Beispiele.

I. $\sqrt[3]{99|252|847} = 463$

$A^3 = 64$

—

$352{,}52 : 48 = 6$

— { $288\,.\,. = 3A^2B$; $432\,. = 3AB^2$; $216 = B^3$ }

,, $191\,68{,}47 : 6348\ (= 3 \,.\, 46^2) = 3$

— { $19044\,.\,. = 3A'^2B'$; $1242\,. = 3A'B'^2$; $27 = B'^3$ }

,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

II. $\sqrt[3]{13|945|313|143} = 2407$

$A^3 = 8$

—

$59{,}45 : 12 = 4$

— { $48\,.\,. = 3A^2B$; $96\,. = 3AB^2$; $64 = B^3$ }

,, $12\,13{,}13 : 1728\ (= 3 \,.\, 24^2) = 0$

$12\,13\,131{,}43 : 172800\ (= 3 \,.\, 240^2) = 7$

— { $1209600\,.\,. = 3A'^2B'$; $35280\,. = 3A'B'^2$; $343 = B'^3$ }

,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

III. $\sqrt[3]{12|821\cdot|119|155|125} = 23\cdot405$

$A^3 = 8$

48,21 : 12

$-\begin{cases} 36\,.\,. = 3\,.\,2^2\,.\,3 \\ 54\,. = 3\,.\,2\,.\,3^2 \\ 27 = 3^3 \end{cases}$

„ 6541,19 : 1587 $(= 3\,.\,23^2) = 4$

$-\begin{cases} 6348\,.\,. = 3\,.\,23^2\,.\,4 \\ 1104\,. = 3\,.\,23\,.\,4^2 \\ 64 = 4^3 \end{cases}$

„„„82151,55 : 164268 $(= 3\,.\,234^2) = 0$

82151551,25 : 16426800 $(= 3\,.\,2340^2) = 5$

$-\begin{cases} 82134000\,.\,. = 3\,.\,2340^2\,.\,5 \\ 175500\,. = 3\,.\,2340\,.\,5^2 \\ 125 = 5^3 \end{cases}$

0

B. Wenn die verlangte Wurzel irrational ist.

Man theile die gegebene Zahl, wie oben, in Klassen ein, und suche die erstern Ziffern der Wurzel wie vorhin. Zum letzten Reste setze man eine Klasse von Nullen, und suche die folgende Wurzelziffer wie in A. Zum gefundenen Reste setze man wieder eine Klasse von Nullen, und verfahre auf die bekannte Art, oder man hänge der gegebenen Zahl eine beliebige Anzahl von Nullenklassen an, und verfahre, wie gesagt wurde (§. 135, Zus. 2). Wie viele Decimalstellen in der Wurzel zu suchen sind, muß die Natur und der Zweck der Aufgabe bestimmen.

Ist die gegebene Zahl ein Decimalbruch, und die Decimalstellen lassen sich nicht in Klassen von drei zu drei Ziffern eintheilen, so ergänze man die fehlenden Stellen der letzten Klasse durch Nullen.

Beispiele.

I. $\sqrt[3]{13} = 2\cdot351\ldots$

8

50,00 : 12 = 3

36 . .

54 .

27

„8330,00 : 1587 = 5

7935 . .

1725 .

125

„221250,00 : 165675 = 1, u. s. f.

II. $\sqrt[3]{83|745} = 43{\cdot}7508\ldots$

```
 — 64
   197,45 : 48 = 3
   144
    108
     27
    42380,00 : 5547 = 7
    38829
      6321
       343
     „2915470,00 : 572907 = 5
     2864535
       32775
         125
       „„47656250,00 : 57421875 = 0
             4765625000,00 : 5742187500 = 8
```

u. s. w.

Man sieht wohl, daß nach dieser Methode die Rechnung immer beschwerlicher wird, je mehr Decimalziffern zu suchen sind; allein man kann sich die Sache auch hier bequemer machen, wenn man nur die ersten Ziffern auf diese Art bestimmt und die folgenden durch die abgekürzte Division sucht. Würde z. B. in unserem letzten Beispiele die $\sqrt[3]{83745}$ mit 7 Decimalen verlangt, so würde man dort, wo wir oben die Rechnung abgebrochen haben, weiters auf solche Weise verfahren:

```
 476562,50000,00 : 5,7,4,2,1,87500
  17188             82993
   5704
    536
     19
```

so daß also näherungsweise $\sqrt[3]{83745} = 43{\cdot}7508299\ldots$ gefunden wird.

In einem solchen Falle bedient man sich auch mit Vortheil der allgemeinen Näherungsformel §. 141, Nro. 2, welche für $n = 3$ übergeht in:

$$\sqrt[3]{A} = \frac{1}{3}\left[\frac{A}{a^2} + 2a\right],$$

in welcher a einen Näherungswerth bezeichnet.

Setzen wir im vorliegenden Falle $A = 83745$ und $a = 43{\cdot}750$, so erhalten wir, wenn der Quotient $\frac{A}{a^2}$ mit 8 Decimalstellen entwickelt wird, schon beim ersten Schritte das oben angegebene Resultat mit 7 Decimalen vollkommen genau. — Wollte man dieses Resultat als ersten Näherungswerth nehmen, und in obiger Formel nochmals substituiren, so könnte man $\sqrt[3]{A}$ mit 21 Decimalen richtig erhalten.

§. 154.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen gemeinen Bruche die Kubikwurzel auszuziehen.

Auflösung.

Es ist

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b} \quad (§.\ 131).$$

So ist z. B.

$$\sqrt[3]{\tfrac{7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} = \frac{1{\cdot}9129311\ldots}{2} = 0{\cdot}9564655\ldots;$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{15}{19}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{19}} = \frac{2{\cdot}4662120\ldots}{2{\cdot}6684016\ldots} = 0{\cdot}9242283\ldots \text{ oder}$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{15}{19}} = \sqrt[3]{\frac{15.19^2}{19^3}} = \frac{\sqrt[3]{15.19^2}}{19} = \frac{\sqrt[3]{5415}}{19} = \frac{17{\cdot}56033\ldots}{19} = 0{\cdot}924228\ldots$$

oder endlich

$$\sqrt[3]{\tfrac{15}{19}} = \sqrt[3]{0{\cdot}789|473|684|210|526|315|789\ldots} = 0{\cdot}924228\ldots$$

$$\sqrt[3]{28\tfrac{5}{8}} = ?;\quad \sqrt[3]{719\tfrac{3}{5}} = ?$$

Anmerkung.

Soll aus einer gegebenen Zahl eine Wurzel, deren Exponent > 3 ist, ausgezogen werden, so kann man nach §. 127, 5 verfahren, oder,

wenn der Exponent eine Primzahl ist, kann man mittelst der Formeln für $(a+b)^5$, $(a+b)^7$, $(a+b)^{11}$, ... die verlangte Wurzel auf ähnliche Art finden, wie wir die zweite und dritte Wurzel suchten, nämlich durch Nachbildung der Bestandtheile der einzelnen Wurzelziffern in der gegebenen Potenz, welche Methode aber immer beschwerlicher wird, je größer der Wurzelexponent ist. Uebrigens werden wir in der Folge, bei der Lehre von den Logarithmen, eine weit bequemere und kürzere Methode kennen lernen.

Fünfter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

---

§. 155.

Eine gezählte Größe bestimmter Art, oder jede auf eine bestimmte Einheit bezogene Zahl, heißt eine **benannte** Zahl (§. 9). Benannte Zahlen aber können ganze oder gebrochene Zahlen sein; z. B. 8 Zentner, $\frac{7}{9}$ fl., $2\frac{1}{3}$ Ellen.

Die benannten Zahlen beziehen sich gewöhnlich auf die im bürgerlichen Leben eingeführten Gewichte, Münzen, Längen-, Flächen- und Körpermaße, u. s. w., deren Natur und Verhältniß im Voraus bestimmt werden muß.

Bei Ausmessung oder Bestimmung einer Größe muß man eine Größe derselben Art als Einheit (Maß) annehmen, und untersuchen, wie oft das als Einheit genommene Maß in der gegebenen Größe enthalten sei, d. h. das Verhältniß des als Einheit genommenen Maßes zur gegebenen Größe bestimmen. Das kleinste bürgerliche Maß, wodurch das Verhältniß der bestimmten Unterabtheilungen ausgemittelt wird, heißt Einheit, welche jedoch sehr verschieden sein kann, und es auch wirklich ist. Um aber das Verhältniß der Maße verschiedener Länder bestimmen zu können, und ihre Reduction möglich zu machen, ist man gleichsam stillschweigend übereingekommen, eine bestimmte Größe als **Grundeinheit**, **Element** anzunehmen. So ist z. B. die Eintheilung der Schuhe in Zolle, Linien 2c. fast in allen Ländern üblich, und demnach ist der Fuß als Einheit dieser verschiedenen Längenmaße zu betrachten. Allein in jedem Lande beinahe ist die absolute Länge eines Fußes eine andere; und daher leuchtet die Nothwendigkeit für das praktische Leben von selbst ein, irgend eine Größe als Grundeinheit anzunehmen, mit welcher die einzelnen Maße verglichen werden können. So z. B. ist für das Längenmaß der alte königl. Pariser Fuß,

oder der neue französische Mètre, für das Gewicht die Asse des holländischen Troygewichts, oder der kölnische Rechenpfennig, u. s. f. durch Convention eingeführt worden.

Bevor wir nun zur Anwendung der vier Rechnungsarten auf benannte Zahlen selbst übergehen, wollen wir von den vaterländischen und von den wichtigsten ausländischen Maßen das Nöthige anführen.

A. Vom Längenmaße.

§. 156.

Zur Bestimmung der Längen bedient man sich der Klafter des Fußes, u. s. w., der Elle und der Meile.

Die Klafter wird in 6 Fuße, der bürgerliche Fuß (Werkschuh) in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Punkte oder Scrupel eingetheilt. Diese Eintheilung nennt man das Duodecimalmaß. Der geometrische Fuß wird in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien, u. s. w., eingetheilt, welche Eintheilung das Decimalmaß heißt. Die Wiener Elle wird in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ Elle zertheilt. Es sind 1000 Wiener Ellen = 2465 Wiener Fuß, also 1 Wiener Elle = 2·465 Wiener Fuß.

Eine österreichische Postmeile ist = 4000 Wiener Klafter, und 14.646 solche Meilen gehen auf einen Grad des Meridianes, oder betragen 15 geographische Meilen

Die Faust, wornach die Höhe der Pferde gemessen wird, hat 4 Wiener Zoll.

Der Böhmische Fuß ist . . .	=	0·93767	Wiener Fuß,
„ Mährische Fuß ist . . .	=	0·93617	„ „
„ Schlesische Fuß ist . . .	=	0·91550	„ „
„ Tyroler Fuß ist . . .	=	1·05700	„ „
„ Nürnberger Stadtfuß .	=	0·96127	„ „
„ „ Artilleriefuß	=	0·92650	„ „
„ Millimètre	=	0·0031635324	Wiener Fuß,
„ alte Pariser Fuß ist . .	=	1·0276401884	„ „
„ Englische Fuß ist	=	0·9642273692	„ „
„ Rheinländische Fuß ist .	=	0·9928850257	„ „
„ Bayerische Fuß ist . . .	=	0·9233061637	„ „
„ Preußische Fuß ist . . .	=	0 9928859681	„ „
Die oberösterreichische Elle ist	=	1·02637	Wiener Ellen,
und die Wiener Elle ist	=	0.97430	oberösterreich. Ellen.

Der Wiener Fuß ist . . . . = 316·1023 Millimètre,
= 140·127 alte Pariser Linien.

B. Vom Flächenmaße.

§. 157.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes bedient man sich eines Quadrates als Einheit, d. i. einer ebenen Fläche, die von vier gleichen Linien, Seiten genannt, so eingeschlossen wird, daß die von ihnen gebildeten Winkel einander gleich sind.

Je nachdem nun die Seite jenes Quadrates eine Klafter, einen Fuß, einen Zoll, u. s. w. lang ist, heißt jene Fläche selbst eine Quadratklafter, ein Quadratfuß, Quadratzoll u. s. w. Man bezeichnet diese Einheiten der Ordnung nach mit □°, □′, □″, □‴, u. s. f.

Es ist eine □° = 6 . 6 □′ = 36 □′
ein □′ = 12 . 12 □″ = 144 □″ } Duodecimal-
ein □″ = 12 . 12 □‴ = 144 □‴ } maß.

oder ein □′ = 100 □″; ein □″ = 100 □‴, u. s. w. nach der Decimaleintheilung.

Viele theilen auch die Quadratklafter in 6 gleiche Theile, welche man Quadratklafterschuhe oder Riemenschuhe nennt. Ein Riemenschuh ist also ein Rechteck, 1° lang und 1′ hoch.

Eben so wird der Quadratklafterschuh in 12 Quadratklafterzolle getheilt, der Quadratklafterzoll in 12 Quadratklafterlinien, u. s. w. Aus dem Gesagten erhellt ferner die Bedeutung der Benennungen Schuhzoll, Schuhlinie, Schuhpunkt, u. s. f.

Das größte Flächenmaß ist die Quadratmeile, = 16.000,000 Quadratklaftern.

Ein Joch ist = 1600 Quadratklaftern, also eine Fläche die 40° lang und 40° breit ist. Also machen 10000 Joch eine Quadratmeile.

Ein Wiener □′ = 999·2068513 quadrirten Centimètres,
= 0·946935 alten Pariser Quadratfußen.

C. Vom Körpermaße.

§. 158.

1. Zur Bestimmung der Größe eines Körpers bedient man sich des Würfels oder Cubus, d. i. eines Körpers, dessen Länge,

Breite und Höhe einander gleich sind. Der Würfel ist von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen. Länge, Höhe und Breite nennt man Abmessungen, Dimensionen.

Je nachdem eine Abmessung des Würfels eine Meile, eine Klafter, ein Schuh oder ein Zoll ist, heißt der Würfel selbst eine Kubikmeile, eine Kubikklafter, ein Kubikschuh, ein Kubikzoll, u. s. w. Die Kubikmeile, welche das größte Körpermaß ist, enthält 64000.000,000 Kubikklafter.

Man theilt die Kubikklafter in 6 Kubikklafterschuhe, einen Kubikklafterschuh in 12 Kubikklafterzolle, einen Kubikklafterzoll in 12 Kubikklafterlinien, u. s. f. Dieses Maß nennt man Schichtenmaß.

Der Kubikklafterschuh ist also ein Körper, der 1° lang, 1° breit und 1' hoch ist, oder dessen Grundfläche 1 □°, und dessen Höhe 1' beträgt.

Ferner theilt man die Kubikklafter in 216 Kubikschuhe, den Kubikschuh in 1728 Kubikzolle, und diesen in 1728 Kubiklinien.

Nach der Decimaleintheilung aber ist der Kubikschuh = 1000 Kubikzoll, 1 Kubikzoll = 1000 Kubiklinien, u. s. w.

II. Zum Körpermaße gehört auch das sogenannte Hohlmaß, mit welchem das Getreide und die Flüssigkeiten gemessen werden.

Das größte Maß, mit welchem das Getreide gemessen wird, ist die Muth, welche in 30 Metzen getheilt wird. Man theilt die Metze in 8 Achtel, das Achtel in 4 große Maßl, ein großes Maßl in 2 kleine Maßl, und das kleine Maßl in 2 Becher.

Der Kalk wird mit dem Mittel gemessen, welches $2\frac{1}{2}$ Metzen beträgt. Der Muid Kalk hält in der Gegend um Wien 30 Metzen oder 60 Kubikschuh; ein Eimer Kalk = 2 Kubikfuß.

Die Wiener Metze ist = 1·9471 Wiener Kubikfuß,
= 3364·588 „ Kubikzoll,
= 61499·3695 cub. Centimètres = 3100·3344 alt. Pariser Kubikzoll.

Kohlen werden mit dem Stibich gemessen. Ein Stibich = 2 Metzen.

Das größte Maß, mit welchem Flüssigkeiten gemessen werden, ist der Dreiling, welcher 3 Faß enthält. Das Faß aber ist = 10 Eimer, der Eimer = 40 Maß, die Maß = 2 Halben, die Halbe = 2 Seiteln, 1 Seitel = 2 Pfiffen; 3 Pfiff machen 1 großes Seitel.

Der Wiener Eimer ist = 1·792 Wiener Kubikfuß = 566·00519 Décilitres = 2853·368 alt Pariser Kubikzoll.

III. Viele Körper werden durch das Gewicht bestimmt. In Wien gebraucht man fünferlei Gewichte, nämlich:

1. Das Mark- oder Münzgewicht, auch Valvationsgewicht genannt, welches man beim Münzwesen, beim Abwägen des Silbers und der davon verfertigten Sachen gebraucht. Das Valvationsgewicht dient zur Regulirung der übrigen Gewichte.

2. Das Handelsgewicht, dessen man sich gewöhnlich im Handel bedient.

3. Das Ducatengewicht, welches man beim Abwägen des Goldes und der davon verfertigten Sachen gebraucht.

4. Das Juwelengewicht, mit welchem Perlen und Edelsteine gewogen werden.

5. Das Apothekergewicht.

a) Die Abtheilungen des Münz- und Silberwaaren-Gewichtes sind aus nachstehendem Schema ersichtlich:

Mark.	Loth.	Quentchen.	Pfennige.	Heller.	Richtpfennige.
1	16	64	256	512	65536
	1	4	16	32	4096
		1	4	8	1024
			1	2	256
				1	128

Das Wiener Mark-, Münz- und Silberwaaren-Gewicht hält 5840·83 holländische Asse = 1·2 Kölner Mark = 5285·332 französische Grains = 280·72929 neue Grammes, und die Kölner Mark in Wien = 4404·4437 alte französische Grains = 233·94108 neue Grammes.

Das Valvationsgewicht zur Regulirung der übrigen Gewichte wird auch durch die Mark bestimmt, welche in 65536 Richtpfennige zertheilt wird.

b) Die Eintheilung des Handelsgewichtes ist in folgender Tafel dargestellt:

Zentner.	Pfund.	Loth.	Quentchen.	Sechzehntel.
1	100	3200	12800	51300
	1	32	128	512
		1	4	16
			1	4

Der Saum Stahl, à 2 Lagel, hält 250 Pfund (℔.); eine Bürde Stahl wiegt 100 ℔. — Ein Stein hält 20 ℔., ein Karch 400 ℔. und ein Meiler 1000 ℔. Man theilt das Pfund auch in 4 Vierting, à 8 Loth.

Das Wiener Pfund Handelsgewicht ist = 11655·11 holländ. Asse = 10546·63 alt Pariser Grains = 560·18707 Grammes.

c) Goldwaaren- und Ducatengewicht.

$80\frac{2}{3}$ Ducaten wiegen eine Wiener Mark, und 67 Ducaten gehen auf die köln. Mark. Der Ducaten wird in 60 Grane getheilt, und wiegt $815\frac{25}{201}$ Wiener Richtpfennige, oder 72·647 holländische Asse. Ferner ist ein Ducatengran = 58·19429 Milligrammes.

d) Juwelengewicht.

Als Einheit dieses Gewichtes dient der Karat (welcher $48\frac{1}{4}$ Wiener Richtpfennige wiegt), und wird in 4 Grane getheilt. Der Karat ist = 206·14772 Milligrammes.

e) Das Apothekergewicht.

Das Apothekerpfund wird in 12 Unzen getheilt (deren jede gleich 2 Lothen des Wiener Handelsgewichtes). Eine Unze enthält 8 Drachmen oder Quinteln, eine Drachme 3 Scrupel, und ein Scrupel 20 Apothekergrane.

Das Apothekerpfund ist = 8741·33 holländ. Asse, und der Apothekergran = 72·94034 Milligrammes.

Außer diesen Gewichten hat man noch folgende:

f) Symbolisches Gewicht zur Prüfung des Goldes.

Dieses Gewicht ist eine verjüngte oder symbolische Mark, welche 256 Wiener Richtpfennige, oder 1 Pfennig des Wiener Markgewichtes beträgt, und in 24 Karate zu 12 Grane abgetheilt wird.

g) Symbolisches Gewicht zur Prüfung des Silbers.

Dieses Gewicht ist ebenfalls eine verjüngte Mark, welche in 16 Lothe zertheilt wird, deren jedes 18 Silbergrane enthält.

h) Symbolischer Bergzentner zur Prüfung des metallischen Gehaltes der Erze.

Dieser Zentner wird in 100 verjüngte Mark getheilt, die Mark in 16 Loth, und das Loth in 16 Denaren. Es ist ein symbolischer

Bergzentner = 1 Quentchen der Wiener Mark des Münzgewichtes = $\frac{1}{64}$ Mark des Münzgewichtes.

i) Das Cioccolategewicht.

Das Pfund dieses Gewichtes enthält nur 28 Loth des Wiener Handelsgewichtes.

IV.

α) Das kölnische Markgewicht.

1 Mark = 8 Unzen, 1 Unze = 2 Loth, 1 Loth = 1·5 Karat = 4 Quintel, 1 Quintel = 4 Pfennig, 1 Pfennig = $1\frac{1}{8}$ Gran, 1 Gran = $15\frac{1}{9}$ Eschen, 1 Eschen = $15\frac{1}{17}$ Richtpfennig; also ist die Mark = 24 Karat = 4352 Eschen = 65536 Richtpfennige, und 1 kölner Richtpfennig = 3·5684 Milligrammes.

β) Das holländische Troygewicht.

1 Mark = 8 Unzen = 160 Engel = 640 Vierling = 1280 Troisken = 2560 Deursken = 5120 Assen = 245975·4598 Milligrammes.

γ) Das französische Troygewicht.

1 Marc = 8 Onces = 64 Gros = 192 Deniers = 4608 Grains = 110592 Primes ou Carrobes = 244752·9208 Milligrammes.

Als Silbergewicht wird diese Mark in 12 Deniers à 24 Grains, und als Goldprobegewicht in 24 Karat à 32 Theile eingetheilt.

δ) Das neue französische Gewicht.

Die Einheit dieses metrischen Gewichtes heißt Gramme,

10 Grammes = 1 Décagramme; 0·1 Gramme = 1 Décigramme,
100 Grammes = 1 Héctogramme; 0·01 Gramme = 1 Centigramme,
1000 Grammes = 1 Kilogramme; 0·001 Gramme = 1 Milligramme,
10000 Grammes = 1 Myriagr., 10 Myriagr. = 1 metrischen Zentner.

ε) Das englische Gewicht.

Die Einheit ist das Pfund, welches imperial standard troypound heißt und = 12 Unzen ist; ferner ist 1 Unze = 20 pennyweight, 1 penny-weight = 24 Grains; also ist 1 Troypfund = 5760 Grains, und 1 Pfund Avoir du poids Gewicht = 7000 Grains. 1 Zentner Avoir du poids Gewicht = 90·6 Wiener Pfund.

V. Viele Dinge werden bloß gezählt, und dann pflegt man 12 ein Dutzend, 15 eine Mandl, 30 einen Schilling und 60 ein Schock zu nennen.

Beim Papier machen 24 Bogen ein Buch, 20 Buch einen Riß und 10 Riß einen Ballen. Beim Druckpapier jedoch machen 25 Bogen ein Buch und sohin 5000 Bogen einen Ballen.

D. Von der Zeitrechnung.

§. 159.

Das tropische Sonnenjahr hat 365 Tage, 5 Stunden, 48′ 49″. Man theilt das Jahr ein in 52 Wochen, oder in 12 Monate, den Monat in 30 Tage (im Durchschnitt), die Woche in 7 Tage, den Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, die Secunde in 60 Terzen. — Würde das Sonnenjahr (die Zeit, innerhalb welcher unsere Erde ihre Bahn um die Sonne durchlauft) gerade 365 Tage 6 Stunden haben, so wäre es hinlänglich, alle 4 Jahre einen Tag einzuschalten, d. i. das vierte Jahr immer um einen Tag zu vermehren, wie es wirklich geschieht. Ein solches Jahr von 366 Tagen nennt man ein Schaltjahr, jenes von 365 Tagen aber ein gemeines Jahr. Hat gleichwohl diese Einschaltung schon in den frühesten Zeiten bestanden, so kam sie bei den Römern dennoch erst unter Julius Cäsar in Gebrauch, und wird deßhalb auch Intercalatio Juliana genannt.

Der Fehler von 11′ 11″, welchen man dadurch begeht, daß man alle vier Jahre einen Tag einschaltet, betrug bis zum Jahre 1582 beinahe 10 Tage. Papst Gregorius XIII. ließ den Kalender damals umändern, und befahl, daß der 5. October des Jahres 1582 der 15. genannt, und in 400 Jahren nur 97 Tage eingeschaltet werden sollten. Der nach diesen Bestimmungen umgeänderte Kalender heißt der Gregorianische, und ist beinahe in ganz Europa angenommen. Die Russen bedienen sich noch des Julianischen Kalenders.

Der Tag bezeichnet die Zeit, binnen welcher sich die Erde um ihre Achse dreht.

Eine Lunation, d. i. die Zeit von einem Neumonde zum andern, beträgt 29 Tage, 12^h, 44′, 03″.

E. Von der Geldrechnung.

§. 160.

Das Zusammenschmelzen des Goldes und Silbers oder Kupfers, oder des Silbers und Kupfers, nennt man legiren oder beschicken.

Gold und Silber nennt man *fein*, wenn es keinen Zusatz von schlechterem Metalle hat. Die Mark *fein* bezeichnet daher eine Mark Goldes oder Silbers ohne Zusatz; die rauhe Mark aber eine Mark Gold oder Silber mit *Zusatz*. Die rauhe Mark heißt z. B. 12löthig oder 18karätig, wenn sie 12 Loth feines Silber und 4 Loth Zusatz, oder wenn sie 18 Karat feines Gold und 6 Karat Zusatz enthält.

Aus dem legirten oder beschickten edleren Metalle werden die Münzen geprägt. Das absolute Gewicht einer Münze heißt ihr *Schrot*, und ihr Gehalt an reinem Gold oder Silber ihr *Korn*. Durch den *Münzfuß* wird sowohl Schrot und Korn, als auch der Kaufwerth einer Münze bestimmt. Der Münzfuß ist demnach die gesetzliche Regel, wie viel Stücke einer bestimmten Münzsorte auf die Mark fein gerechnet werden.

Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derselbe die Beschaffenheit der Münze garantirt. Die *Bildseite* heißt die *Hauptseite* (avers); die *Schrift-* oder *Wappenseite* aber heißt die *Rückseite* (revers).

Die Prüfung der Münzen durch richtig legirte *Probir-* und *Streichnadeln* heißt *Valvation*.

Es gibt *reelle*, *gangbare* (ausgeprägte oder wirklich cursirende) und *fingirte* oder *Rechnungsmünzen*. Diese sind ein Maßstab des Kaufwerthes aller Dinge, also auch der geprägten Münzen. Solche Rechnungsmünzen sind z. B. in Deutschland der Gulden, der Reichsthaler, obgleich es auch ausgeprägte Gulden (in Oesterreich), und ausgeprägte Thaler gibt.

Der Münzfuß war immer veränderlich, und es ist nöthig, sich mit den verschiedenen Münzfußen bekannt zu machen. Die für Deutschland merkwürdigsten sind folgende:

A. Im Golde.

1) Der rheinische *Goldguldenfuß*, 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karat, 6 Gran Goldes und 3 Karat Silber. Nach diesem Fuß sind in Bayern die Karolinen und die Max d'ors geprägt.

2) Der *Dukatenfuß*, 67 Stück auf die rauhe Mark von 23 Karat, 8 Gran Gold und 2 Gran Silber.

B. Im Silber.

1) Im Jahre 1750 wurde in den preußischen Staaten der *Graumannische*, oder der 21 Guldenfuß angenommen, und 1764 erneuert. Nach ihm kommen 14 Reichsthaler auf die feine Mark.

2) Im Jahre 1753 wurde in Oesterreich, Bayern, und dann auch in Sachsen und Braunschweig der Conventions- oder 20 fl. Fuß eingeführt, nach welchem die feine Mark $13\frac{1}{3}$ Thaler enthält.

3) Nach dem neuern Reichs- oder sogenannten 24 fl. Fuß kommen auf die feine Mark 16 Reichsthaler = 24 fl. rhein. = 10 Conv.-Thaler.

Gegenwärtig werden in den Staaten des deutschen Zollvereins die Münzen nach dem $24\frac{1}{2}$ Guldenfuße ausgeprägt.

In Oesterreich ist noch der 20 fl. oder der Conventions-Fuß giltig. Der vollwichtige Ducaten wird zu 4 fl. 30 kr. C. M. gerechnet, der Thaler zu 1 fl. 30 kr., 1 fl. à 60 kr., oder à 20 Groschen, 1 Groschen à 3 kr., 1 kr. à 2 halbe kr. oder à 4 Pfennig, 1 Pf. à 2 Heller. Im Umlaufe sind in Silber: Zwanziger (20 kr. St.), Zehner (10 kr. St.), sechs-, fünf- und drei-Kreuzerstücke. Zweikreuzer-Stücke, Kreuzer, halbe und Viertel-Kreuzer sind in Kupfer ausgeprägt. Also ist:

Thlr.	Gulden.	Zwanziger.	Zehner.	Fünfer.	Groschen.	Kreuzer.	Pf.	Heller.
1	$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	9	18	30	90	360	720
	1	3	6	12	20	60	240	480
		1	2	4	$6\frac{2}{3}$	20	80	160
			1	2	$3\frac{1}{3}$	10	40	80
				1	$1\frac{2}{3}$	5	20	40
					1	3	12	24
						1	4	8
							1	2

Ausführlicher wird über die Maße und Gewichte beim mündlichen Vortrage gesprochen werden. Wer sich aber selbst über diesen Gegenstand näher unterrichten will, muß eines der neuern Werke zur Hand nehmen, welche sich ausschließend mit diesem Gegenstande befassen.

Vom Reduciren und Resolviren.

§. 161.

Zahlen oder Einheiten einer niedrigern Ordnung auf Einheiten von höherer Benennung bringen, z. B. Quentchen auf Pfunde, Kreuzer auf Gulden, u. s. w. heißt reduciren. Das umgekehrte Verfahren, nämlich die Verwandlung der Einheiten höherer Benennung in Einheiten der niedrigern Ordnung nennt man resolviren. Jenes

geschieht durch Division, dieses aber durch Multiplication. Die Zahlen, welche angeben, wie viel Einheiten einer niedrigern Benennung eine Einheit der höhern machen, nennt man **Reductions-** oder **Auflösungszahlen**; so ist z. B. für Gulden und Kreuzer 60 die Reductionszahl.

a) Das Resolviren geschieht auf folgende Art. Man multiplicire die aufzulösende Zahl mit der gehörigen Reductionszahl der nächst niedrigern, oder sogleich der niedrigsten Einheiten, in welche die gegebene Zahl verwandelt werden soll. Ist aber die zu resolvirende Größe mehrnamig, so multiplicire man die Einheiten der höchsten Benennung mit der Reductionszahl der nächst niedrigern Ordnung, indem man zum Producte die gegebenen Einheiten derselben Ordnung addirt. Die gefundene Summe wird dann wieder in Einheiten der nächst niedrigern Ordnung aufgelöst und zu den gegebenen Einheiten eben dieser Ordnung addirt. Auf diese Art fährt man fort, bis man endlich auf die verlangten Einheiten der niedrigsten Ordnung gekommen ist.

Beispiele.

I. Wie viel Grane enthält das Apothekerpfund?

Rechnung. 1 ℔. = 1 . 12 Unzen = 12 Unzen = (12 . 8) Drachmen. = 96 Dr. = (96 . 3) Scr. = 288 Scr. = (288 . 20) Gr. = 5760 Gr.

II. Wie viel Seiteln sind in 3 Eimern enthalten?

Rechnung. 3 Eimer = (3 . 40) Maß = 120 Maß = (120 . 4) Seiteln, = 480 Seiteln.

III. Man verwandle 7 ℔. 18 Loth 3 Quentchen in Quentchen.

Rechnung. 7 ℔. 18 Loth 3 Quentchen
32
242 Loth 3 Quentchen
4
971 Quentchen.

b) 1. Um eine benannte Zahl zu reduciren, dividire man die gegebenen Einheiten der niedrigsten Benennung durch die Reductionszahl der nächst höhern Ordnung. Der Rest hat die Benennung des Dividends, der Quotus aber erhält die nächst höhere Benennung. Mit diesem Quotienten wird auf dieselbe Art die Reduction weiter fortgesetzt. Z. B. Wie viel Klafter, Fuße, Zolle, Linien machen 37845 Linien?

Rechnung. $37845''' : 12 = 3153''\ 9'''$
18
64
45
9

$3153'' : 12 = 262'\ 9''$
75
33
9

$262' : 6 = 43^{0}\ 4'$; also sind
22
4

$37845''' = 43^{0}\ 4'\ 9''\ 9'''$.

Man reducire 408796827 □''' nach dem Decimalmaße.

Rechnung. 408796827 □''' = 4087968 □'', 27 □''' = 40879 □'; 68 □''; 27 □'''; und weil $40879 : 36 = 1135\frac{19}{36}$, so ist das gesuchte Resultat = 1135 □°; 19 □'; 68 □''; 27 □'''.

Wie viel beträgt die gegebene Zahl nach dem Duodecimalmaße?

2. Soll die ganze gegebene Zahl auf Einheiten derselben höhern Ordnung zurückgebracht werden, so verfahre man nach §. 96. Z. B. Man bringe 387498 Quentchen auf die Benennung Zentner.

Rechnung. Es sind 387498 Quent. $= \frac{387498 \text{ Loth}}{4} = 96874{\cdot}5$ Lothe

$= \frac{96874{\cdot}5 \text{ Pfund}}{32} = 3027{\cdot}328125$ Pfund $= 30{\cdot}27328125$ Zentner.

Eben so sind nach dem Decimalmaße 87912432 Kb.''' = 87912·432 Kb.''

$= 87{\cdot}912432$ Kb.' $= \frac{87{\cdot}912432}{216}$ Kb.° $= 0{\cdot}407002$ Kb.°

3. Hat man eine mehrnamige Zahl auf Einheiten der höchsten Ordnung zu reduciren, so ziehe man eine Verticallinie, schreibe rechts die einzelnen Sorten, von der niedrigsten Benennung angefangen, der Ordnung nach unter einander; links aber setze man die gehörigen Reductionszahlen den einzelnen Theilen bei, dividire die niedrigste Sorte durch die dabei stehende Reductionszahl (nach §. 96), und hänge den Quotienten als Decimalbruch der Zahl der nächst höhern Benennung an.

Eben so verfahre man mit den folgenden Theilen. Hat die Zahl der niedrigsten Benennung einen gemeinen Bruch bei sich, so verwandelt man diesen zuvor in einen Decimalbruch.

Beispiel 1.

Man reducire die Größe 3 Ztr. 48 Pfd. 23 Lth. 3 Qtchn. auf die Benennung Zentner.

Rechnung	4	3 Quentchen
	32	23·75 Loth
	100	48·7421875 Pfund
		3·487421875 Zentner.

Nämlich 3 Zentn. 48 Pfd. 23 Loth 3 Qtchn. = 3·487421875 Zentner.

Beispiel 2.

Man führe die Größe 28 Tage 17 Stunden 53 Minuten $36\frac{1}{2}$ Sekunden auf die Benennung Tage zurück.

Rechnung.	60	$36''\cdot5$
	60	$53'\cdot608\dot{3}$
	24	$17^{h}\cdot89347\dot{2}$
		Tage 28·745561342 . . . . .

Wie weit man in der Ausübung bei diesen Divisionen in Decimalen zu gehen habe, muß jedes Mal aus der Natur der Aufgabe ausgemittelt werden, wobei man jedoch zu berücksichtigen hat, ob der Quotient schon das Resultat der ganzen Rechnung sei, oder ob dieser noch mit anderen gegebenen Größen arithmetische Verbindungen einzugehen habe.

§. 162.

Aufgabe.

Benannte Zahlen von verschiedener Benennung, die sich aber auf Einheiten derselben Art beziehen, zu addiren.

Auflösung.

Man setze die gegebenen Summanden so unter einander, daß die gleichnamigen Theile unter einander zu stehen kommen. Dann beginne man die Addition bei der niedrigsten Benennung. Enthält diese Summe schon Einheiten der nächst höhern Benennung, so ziehe man diese durch die Reduction (§. 161) heraus, und addire sie zur Summe der Einheiten der nächst höhern Sorte, den Rest aber setze man gerade unter die

addirten Größen, mit welchen er dieselbe Benennung hat. Auf diese Art setze man das Verfahren bis zur höchsten oder letzten Benennung fort. Sind bei der niedrigsten Benennung auch Brüche angehängt, so addirt man diese zuerst nach §. 89, zieht die Ganzen heraus, und addirt diese zu den Ganzen derselben Benennung, nachdem man zuvor die Bruchtheile angemerkt hat.

Beispiele.

1. Man addire folgende Größen:

	420 fl.	30 kr.	3 Pf.	1 Heller
	183 „	45 „	2 „	— „
	287 „	27 „	— „	1 „
	91 „	13 „	1 „	$1\frac{1}{2}$ „
	54 „	52 „	2 „	$1\frac{3}{4}$ „
Summe	1037 fl.	49 kr.	2 Pf.	$1\frac{1}{4}$ Heller.

II. Man suche die Summe folgender Größen:

	3 Ztr.	87 Pfd.	25 Loth	3 Quentchen
	4 „	29 „	18 „	2·5 „
	7 „	92 „	13 „	1·48 „
	12 „	36 „	30 „	2·7 „
	10 „	20 „	8 „	1·32 „
Summe	38 Ztr.	67 Pfd.	— Loth	3... Quentchen.

§. 163.

Aufgabe.

Benannte Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Man ordne, wie bei der Addition, den Minuend und den Subtrahend, und ziehe die einzelnen Sorten des letztern von den gleichnamigen Sorten des erstern der Ordnung nach ab, indem man bei der niedrigsten Benennung anfängt.

2. Ist bei einer Sorte der Minuend kleiner als der Subtrahend, so borge man bei der nächsten höhern Sorte eine Einheit, welche, in Theile der niedrigern Benennung verwandelt, zu den schon vorhandenen Einheiten addirt wird.

3. Fehlen im Minuend mehrere auf einander folgende Ordnun-

gen, so borgt man eine Einheit von der höchsten Benennung, und vertheilt diese so auf die niedrigern Sorten, daß man überall abziehen kann, wie aus den nachfolgenden Beispielen ersichtlich ist.

I. Es hat Jemand 7328 fl. 48 kr. 3·4 Pf. baares Geld, und 907 fl. 30 kr. 2 Pf. Schulden. Wie viel bleibt ihm nach Tilgung seiner Schulden?

Rechnung.	7328 fl.	48 kr.	3·4 Pf.	
	— (907 „	30 „	2 „	)
Rest =	6421 fl.	18 kr.	1·4 Pf.	

II. Ein Kaufmann verkaufte 2 Ztr. 47 Pfd. 18 Loth $3\frac{7}{8}$ Quent. einer Waare, von welcher er 5 Ztr. 24 Pfd. 30 Loth in Vorrath hatte. Wie viel bleibt ihm noch übrig?

Rechnung.	5 Ztr.	$\dot{2}4$ Pfd.	$\overset{29}{\dot{3}0}$ Loth	$\overset{4}{0}$ Quent.	
	— (2 „	47 „	18 „	$3\frac{7}{8}$ „	)
	2 Ztr.	77 Pfd.	11 Loth	„ $\frac{1}{8}$ Quent.	

III. Ein Gefäß mit irgend einer Flüssigkeit angefüllt, wog 6 Pfd. 3 Unzen, das Gefäß ohne Flüssigkeit aber wog 1 Pfd. 8 Unz. 3 Drachm. 1 Scr. 15 Gran. Wie viel beträgt das Gewicht der Flüssigkeit?

Rechnung.	$\dot{6}$ Pfd.	$\dot{3}$ Unz.	$\overset{7}{\dot{0}}$ Dr.	$\overset{2}{\dot{0}}$ Scr.	$\overset{20}{\dot{0}}$ Gr.	
	— (1 „	8 „	3 „	1 „	15 „	)
Rest	4 Pfd.	6 Unz.	4 Dr.	1 Scr.	5 Gran.	

IV. Jemand wurde im Jahre 1784 den 27. October Nachmittag um 3 Uhr 24 Minuten 18 Secunden geboren, und starb im Jahre 1820 den 17. Julius Morgens um 8 Uhr 36 Minuten 47 Secunden. Wie alt wurde dieser Mensch?

§. 104.

Aufgabe.

Benannte Zahlen zu multipliciren.

Auflösung.

Die Multiplication benannter Zahlen kann auf dreierlei Art verrichtet werden.

1. Man resolvirt entweder den Multiplikand in Einheiten der

niedrigsten Benennung (§. 161), und multiplicirt dann diesen veränderten Multiplicand mit dem Multiplicator, der aber ebenfalls auf dieselbe Benennung gebracht werden muß, wenn er eine benannte Zahl sein sollte.

2. Oder man reducirt beide Faktoren auf die höchste Benennung, und multiplicirt die erhaltenen Resultate mit einander. Das Product, welches mit dem Multiplicand gleiche Benennung hat, wird dann (nach §. 161) wieder reducirt oder resolvirt, je nachdem man nach 1. oder 2. verfahren ist.

3. Oder man verfährt endlich wie §. 51.

Wie viel Zins trägt ein Kapital in acht Jahren, wenn es jährlich 24 fl. 45 kr. 3 pf. abwirft?

Nach Nro. 1 ist (24 fl. 45 kr. 3 pf.) × 8 = 5943 pf. × 8
= 47544 pf. = 11886 kr. = 198 fl. 6 kr.

Nach Nro. 2 ist (24 fl. 45 kr. 3 pf.) × 8 = 24·7625 fl. × 8
= 198·1 fl. = 198 fl. 6 kr.

Nach Nro. 3 aber steht die Rechnung also:

24 fl.	45 kr.	3 pf.
		× 8
192 fl.	360 kr.	24 pf.
= 198 fl.	6 kr.	

Anmerkung 1. Hier ist zu bemerken, daß das Produkt aus zwei Zahlen, die sich auf einerlei Längenmaß beziehen, eine Zahl sei, die ausdrückt, wie groß die Fläche in demselben Quadratmaße sei, und daß das Product aus zwei Zahlen, deren eine ein Quadratmaß, und deren andere ein Längenmaß von derselben Art bestimmt, eine Zahl sei, welche einen körperlichen Inhalt in demselben Maße angibt. Hieraus folgt zugleich, daß das Produkt aus drei Faktoren, die sich auf einerlei Längenmaß beziehen, einen körperlichen Inhalt (Volumen) in demselben Maße bezeichne.

So z. B. sind

$$24' \times 30' = 720 \,\square' = 20 \,\square^{0} \text{ und}$$
$$45' \times 12'' = 450'' \times 12'' = 5400 \,\square'' = 54 \,\square'$$

nach dem Decimalmaße.

Eben so sind

$$32 \,\square' \times 24' = 768 \text{ Kb.}' = 3 \text{ Kb.}^{0}\ 120 \text{ Kb.}' \text{ und}$$
$$18 \,\square^{0} \times 15' = 648 \,\square' \times 15' = 9720 \text{ Kb.}' = \tfrac{9720}{216} \text{ Kb.}^{0} = 45 \text{ Kb}^{0}.$$

Anmerkung 2. Man darf die irrige Meinung nicht haben, als wäre in dem im Paragraphe beigefügten Beispiele der Multiplicand mit acht Jahren, oder als wären in den letztern Beispielen Linien mit Linien, oder Flächen mit Linien multiplicirt worden, wodurch man im Resultate beziehungsweise Gulden oder Kreuzer, oder Flächen oder Körper erhielte, was offenbar Unsinn wäre. Aus dem Begriffe der Multiplication (§. 25) folgt von selbst, daß der Multiplicator immer als unbenannte (stumme) Zahl betrachtet werden müsse, und daß das Produkt mit dem Multiplicand von einerlei Art sei.

Anmerkung 3. Daß durch die Multiplication von Längen mit Längen, oder durch die Multiplication von Längen mit Flächen oder umgekehrt, Flächen oder Körperinhalte erhalten werden, beruht auf geometrischen Gründen, die wir also erst in der Folge kennen lernen werden. — Da ferner der Dividend als ein Produkt von zwei Faktoren angesehen wird, deren einer der Divisor, und der andere der Quotient ist (§. 32), so folgt, daß einer dieser Faktoren immer als eine stumme Zahl zu betrachten sei, und daß der andere Faktor mit dem Dividende von einerlei Art sein müsse.

Anmerkung 4. In praktischen Fällen findet immer die Multiplication Statt, wenn aus dem Werthe der Einheit der Werth einer Quantität gesucht wird. Z. B.:

I. Was kosten 12 Pfund, wenn 1 Pfund mit 1 fl. 36 kr. bezahlt wird? Offenbar kosten 12 Pfund 12mal 1 fl. 36 kr. = 19 fl. 12 kr.

II. 1 Loth kostet 15 kr. $3\frac{1}{2}$ pf., was kosten 3 Pfd. 8 Loth 2 Qt.?

Man verwandle 15 kr. $3\frac{1}{2}$ pf. in Kreuzer, die 3 Pfd. 8 Loth 2 Qt. in Lothe, und multiplicire beide Resultate mit einander. Da nun 15 kr. $3\frac{1}{2}$ pf. = 15·875 kr., und 3 Pfd. 8 Loth 2 Qt. = 104·5 Loth, so ist die gesuchte Zahl

$$
\begin{array}{l}
x = 15{\cdot}875 \text{ kr.} \times 104{\cdot}5 \\
\quad 63\,500 \\
\quad 7\,9375 \\
\hline
= 1658{\cdot}9375 \text{ kr.} \\
= 27 \text{ fl. } 38{\cdot}9375 \text{ kr.} \\
\qquad \times 4 \\
\hline
\qquad 3{\cdot}7500
\end{array}
$$

$$= 27 \text{ fl. } 38 \text{ kr. } 3{\cdot}75 \text{ pf.} = 27 \text{ fl. } 38 \text{ kr. } 3\tfrac{3}{4} \text{ pf.}$$

Zweckmäßiger würde es aber in diesem Falle sein, den Multiplicand auf die Benennung Gulden zu reduciren, weil man leicht im Voraus beurtheilen kann, daß im Resultate Gulden erhalten werden müssen. Die Rechnung würde dann so stehen:

	pf.
4	3·5
	kr.
60	15·875
	fl.
	0·264583̇

Also x = 0·264583̇ fl. × 104·5

5401

264583
10583
1323

= 27·6489 fl.
× 60

38·934. kr.
× 4

3·736 pf.

Nämlich x = 27 fl. 38 kr. 3·736 pf.

Ich suchte hier, nach §. 41, nur vier Decimalen im Produkte, weil dasselbe hinlänglich genau ist. Der Fehler beträgt hier nur ·014 pf., der im bürgerlichen Leben als Null anzusehen ist.

III. Wenn ein Pfund Sterling 10 fl. 41 kr. 3 pf. C. M. werth ist, wie viel sind 347 Pfund Sterling 17 Schilling 11 Denier werth? 1 Pfd. Sterling = 20 Schilling = 240 Denier, 1 Schilling = 12 Denier.

Man verwandle hier den Multiplicand 10 fl. 41 kr. 3 pf. in Gulden, und die andere als Multiplicator zu betrachtende Größe bringe man auf die Benennung Pfund Sterling.

Rechnung.	4	pf. 3	12	Den. 11
	60	kr. 41·75	20	Schill. 17·916̇
		fl. 10·69583̇		Pfd. St. 347·89583̇

Also x = 10·69583 fl. × 347·89583̇

```
               3338 59601
               ----------
                347 89583
                 20 87375
                  3 13106
                    17395
                     2782
                      104
                       10
                        1
               ----------
                3721·0356 fl.
                     × 60
               ----------
                    2·136 kr.
                      × 4
               ----------
                    0·544 pf.
```

Also x = 3721 fl. 2 kr. ·544 pf.

Viele Vortheile, die bei der Multiplication benannter Zahlen angewendet werden können, werden nur durch eine fleißige Uebung erlernt, da sich keine allgemeinen Regeln angeben lassen. Das weitere hiervon beim mündlichen Vortrage.

§. 165.

Aufgabe.

Benannte Zahlen zu dividiren.

Auflösung.

1. Sind beide Zahlen, die durch einander dividirt werden sollen, von verschiedener Art, so bringe man beide Zahlen auf dieselbe Benennung, und dividire dann nach den gewöhnlichen Divisionsregeln.

2. Ist der Divisor eine unbenannte Zahl, so reducirt man den Dividend auf die höchste, oder man resolvirt ihn auf Einheiten der niedrigsten Benennung, und dividirt dann auf gewöhnliche Art, oder man dividirt jeden Theil des Dividends durch den gegebenen Divisor, indem man bei der höchsten Benennung die Division beginnt. Diese letzte Verfahrungsart ist die zweckmäßigere.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß, wie man sich auszudrücken pflegt, Flächenmaß durch Längenmaß, oder Körpermaß durch Flächenmaß dividirt, Längenmaß gibt, Kubikmaß durch Längenmaß dividirt, aber Flächenmaß.

Beispiel 1.

Der Fußboden eines Zimmers bildet ein Rechteck, dessen Länge $= 3^0\, 4'\, 7''$, und dessen Flächeninhalt $= 12 \square^0\, 19 \square'\, 96 \square''$. Wie breit ist das Zimmer? — Da die Länge mit der Breite multiplicirt, den Flächeninhalt gibt, so muß umgekehrt der Flächeninhalt durch die Länge dividirt, die Breite geben. Man bringe demnach beide Größen auf die kleinste Benennung (Zolle), und dividire auf gewöhnliche Art.

Rechnung. $(12 \square^0\, 19 \square'\, 96 \square'') : (3^0\, 4'\, 7''$ Längenmaß$)$
$= 65040 \square'' : 271'' = 240'' = 20' = 3^0\, 2'$.

Beispiel 2.

Man soll 67 fl. 43 kr. 1 pf. unter vier Personen vertheilen; wie viel beträgt der Antheil eines jeden?

Man setze: (67 fl. 43 kr. 1 pf.) : 4 = 16 fl. 55 kr. $3\frac{1}{4}$ pf. Dividirt man nämlich 67 durch 4, so erhält man 16 fl., mit dem Reste 3 fl. = 180 kr., welche, zu 43 kr. addirt, den zweiten Dividend = 223 kr. geben. Aber 223 : 4 = 55 mit dem Reste 3 kr. = 12 pf. Zu diesen den 1 pf. addirt, gibt 13 pf. als neuen Dividend. Oder

4	pf. 1
60	kr. 43·25
	fl. 67·7208$\dot{3}$

und 67·7208$\dot{3}$ fl. : 4 = 16·930208$\dot{3}$ fl.
$\times$ 60
55·8125000 kr.
$\times$ 4
3·25000 pf.

also der gesuchte Quotient = 16 fl. 55 kr. 3·25 pf.

Oder endlich auf folgende Art:

67 fl. 43 kr. 1 pf.
60
4063 kr.
$\times$ 4
16253 pf.

Also x = 16253 pf. : 4 = 4063·25 pf. = 1015 kr. 3·25 pf.
= 16 fl. 55 kr. 3·25 pf.

Anmerkungen. 1. Die Division findet überhaupt in praktischen Fällen Statt, wenn aus dem gegebenen Werthe W einer Quan-

tität A der Werth x der Einheit gesucht wird, wo dann, wie bei der Multiplication, die Natur der Aufgabe den Grad der Genauigkeit bestimmen muß. Der Werth W der gegebenen Menge A wird immer der Dividend, diese aber der Divisor; es ist nämlich $x = \frac{W}{A}$.

Beispiel.

Wenn 348 Pfd. 24 Loth $3\frac{5}{8}$ Qt. mit 780 fl. 36 kr. $3\frac{1}{4}$ pf. bezahlt werden; wie hoch kömmt das Pfund zu stehen? — Da der Werth eines Pfundes gesucht wird, so verwandle man die gegebene Quantität in Pfunde, und weil im Resultate, wie ein wenig Beurtheilung zeigt, Gulden vorkommen müssen, so reducire man den gegebenen Werth auf die Benennung Gulden, und da im Resultate endlich nur eine Stelle für die Ganzen erscheinen kann, so suche man das Resultat mit drei Decimalen genau, also vier Decimalen, oder in allem nur fünf Stellen. Es wird daher in diesem Falle hinreichend sein, beide Größen bis auf drei Decimalen genau zu reduciren.

Rechnung.			
4	pf. 3·75	4	Qt. 3·625
60	kr. 36·9375	32	Loth 24·90625
	fl. 780·6156...		Pfd. 348·778...

Also der Werth eines Pfundes

$$= 780{\cdot}616 \text{ fl.} : 348{\cdot}778 = 2{\cdot}2381 \text{ fl} = 2 \text{ fl. } 14 \text{ kr. } 1{\cdot}14 \text{ pf.}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline 14{\cdot}2860 \text{ kr.} \\ 4 \\ \hline 1{\cdot}144 \text{ pf.} \end{array}$$

2. Soll aber aus dem gegebenen Werthe W der Quantität A der Werth z einer gegebenen Quantität a gesucht werden, so suche man zuvor den Werth der Einheit (nach 1, Anm.), der durch den Ausdruck $\frac{W}{A}$ dargestellt wird, und multiplicire diesen mit der Größe a, deren Werth gesucht wird. Es ist nämlich $z = \frac{W}{A} \cdot a$.

Beispiel.

3 Mark 10 Loth 3 Qtchn. Wiener Markgewicht machen 288768 köln. Richtpfennige, wie viel köln. Richtpfennige machen 1 Mark 4 Loth 2 Qtch. $3\frac{1}{2}$ Pfg. Wiener Markgewicht?

Hier ist A = 3 Mark 10 Loth 3 Qtchn.; W = 288768 köln. Richtpfennige, und a = 1 Mark 4 Loth 2 Qtch. 3·5 Pfg.

Rechnung.	4	Qt. 3	4	Pfg. 3·5
	16	Loth 10·75	4	Qt. 2·875
		Mk. 3·671875 (A)	16	Loth 4·71875
				Mark 1·2949219 (a)

Also $z = \frac{288768 \times 1{\cdot}2949219}{3{\cdot}671875}$.

Da hier im Resultate sechs Stellen für die Ganzen erscheinen müssen, und noch eine Decimale gesucht werden soll, so ist es hinreichend, den Dividend mit zwei Decimalen anzugeben, um die sieben Stellen des Quotienten bestimmen zu können. Man setze demnach

```
288768·0 0
912949 2 1
----------
288768 0 0
 57753 6 0
 25989 1 2
  1155 0 7
   259 8 8
     5 7 7
       2 9
       2 5
----------
373931·9,8 : 3·,6,7,1,8,7,5 = 101836·79
  „„6744 4 8
    3072 6 0
     135 1 0
      24 9 5
       2 9 2
         3 5
           3
```

Also ist z = 101836·79 köln. Richtpfennige.

Sechster Abschnitt.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, mit ihrer Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Von den Verhältnissen.

§. 166.

Wenn zwei Größen auf einander bezogen werden, so erhält man ein Verhältniß. Ein Verhältniß ist daher die Vergleichung zweier Größen, um zu sehen, wie die eine aus der andern entsprungen ist, oder entsprungen gedacht wird. Daß nur gleichartige Größen mit einander verglichen werden können, versteht sich von selbst. Also können Größen, die sich nicht gleichartig machen lassen, auch kein Verhältniß bilden. Die Ausmittelung des Verhältnisses zweier gleichartigen Größen ist demnach die Vergleichung derselben zu dem Ende, um die Quantität der einen aus der Quantität der andern unmittelbar zu bestimmen, und diese Bestimmung selbst ist das Verhältniß der beiden Größen zu einander.

Die Größen, welche mit einander verglichen werden, heißen Glieder des Verhältnisses; die erste heißt Vorderglied (Antecedens), und die zweite Hinterglied (Consequens). Sind beide Glieder gleich, so heißt das Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit. Sind die Glieder eines Verhältnisses ungleich, so heißt dieses entweder ein steigendes (wachsendes), oder ein fallendes (abnehmendes), je nachdem das Hinterglied größer oder kleiner als das Vorderglied ist.

Zwar ist es bei den folgenden Untersuchungen einerlei, ob man sich das Hinterglied aus dem Vorderglied entsprungen denkt, oder

umgekehrt; allein wir werden, um der Gleichförmigkeit willen, uns immer das Hinterglied aus dem Vordergliede entstanden denken.

Sieht man bei dem Verhältnisse auf die Art, wie das Hinterglied (b) aus dem Vordergliede (a) dadurch entspringt, daß man zu diesem eine gewisse Zahl (d) addirt, oder davon subtrahirt, so betrachtet man das Verhältniß als ein arithmetisches. Jene Zahl (d), welche zum Vordergliede addirt, oder davon subtrahirt, das Hinterglied erzeugt, heißt der Name, Exponent, oder die Differenz des Verhältnisses, weil sie den Unterschied zwischen beiden Gliedern angibt.

Daß zwei Größen a und b im arithmetischen Verhältnisse stehen, oder gedacht werden, bezeichnet man dadurch, daß man zwischen beide Größen das Zeichen $\dot{-}$ setzt; man schreibt nämlich $a \dot{-} b$, und spricht: a verhält sich zu b, oder kurz a zu b.

Die Differenz des Verhältnisses $a \dot{-} b$ ist $b - a = \pm d$, und das Verhältniß selbst ist entweder steigend oder fallend, je nachdem di Differenz positiv oder negativ ist. — Aus der Gleichung $b - a = \pm d$ folgt $b = a \pm d$, wenn man auf beiden Seiten a addirt. Es ist demnach $a \dot{-} (a \pm d)$ die allgemeine Form der arithmetischen Verhältnisse.

Beabsichtigt man bei der Vergleichung zweier Größen die Beantwortung der Frage, das Wievielfache die eine Größe von der andern sei, d. h. sieht man bei dem Verhältnisse auf die Art, wie das Hinterglied aus dem Vordergliede dadurch entsteht, daß man dieses mit einer gewissen Zahl multiplicirt, so betrachtet man das Verhältniß als ein geometrisches, oder das Verhältniß heißt dann geometrisch. Jene Zahl, mit welcher das Vorderglied multiplicirt das Hinterglied erzeugt, heißt der Exponent oder der Quotient des Verhältnisses, weil er durch Division des Hintergliedes durch das Vorderglied gefunden wird. Wir werden deßhalb den Exponenten des geometrischen Verhältnisses immer mit q bezeichnen.

Das geometrische Verhältniß wird dadurch bezeichnet, daß man zwischen beide Glieder das Zeichen $\div$ setzt; man schreibt nämlich $a \div b$ und spricht: a verhält sich zu b, oder kurz a zu b.

Statt $\div$ setzt man häufig bloß das gewöhnliche Divisionszeichen :.

Der Exponent des Verhältnisses $a \div b$ ist $\frac{b}{a} = q$, und das Verhältniß ist demnach steigend oder fallend, je nachdem $q > 1$ oder $q < 1$ ist.

Aus der Gleichung $\frac{b}{a} = q$ folgt $b = aq$, und daher ist $a \div aq$ die allgemeine Form des geometrischen Verhältnisses.

Bei Verhältnissen der Gleichheit wird also $d = 0$ und $q = 1$.

Das geometrische Verhältniß ist entweder commensurabel (rational) oder incommensurabel (irrational), je nachdem der Exponent desselben rational oder irrational ist. So z. B. ist $3 \div 12$ ein rationales Verhältniß, weil der Exponent $\frac{12}{3} = 4$ eine Rationalzahl ist. Eben so ist auch $\sqrt{3} \div \sqrt{12}$ ein rationales Verhältniß, obgleich beide Glieder desselben irrational sind, denn es ist der Exponent $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$ rational. Ist aber z. B. $b = a\sqrt{3}$, so ist das Verhältniß $a \div b$ oder $a \div a\sqrt{3}$ irrational, weil der Exponent $\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$ irrational ist. Beim incommensurablen Verhältnisse zweier Größen kann man zwar nicht angeben, wie vielmal die eine in der andern enthalten ist, aber doch wenigstens die Grenzen, zwischen denen die erstere enthalten ist.

Kehrt man die Ordnung der Glieder eines Verhältnisses um, macht man nämlich das Vorderglied zum Hintergliede, und dieses zum Vordergliede, so heißt das neue Verhältniß, in Bezug auf das gegebene, das umgekehrte oder indirecte, und das vorige das gerade oder directe.

§. 167.

Zwei arithmetische oder zwei geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben. So z. B. sind $3 \dot{-} 5$ und $7 \dot{-} 9$ zwei gleiche arithmetische Verhältnisse, weil beide dieselbe Differenz $+2$ haben. Eben so sind $3 \div 12$ und $5 \div 20$ zwei gleiche geometrische Verhältnisse, weil die Quotienten $\frac{12}{3} = \frac{20}{5} = 4$ gleich sind. Bei der Bestimmung der Größe eines Verhältnisses kömmt es also lediglich auf den Exponenten des Verhältnisses an, die Glieder mögen wie immer beschaffen sein.

Wenn zwei Verhältnisse ungleiche Exponenten haben, so heißen sie ungleich, und zwar ist jenes das größere, welches den größern Exponenten hat. Ist z. B. $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$, so ist auch $a \div b > c \div d$, und umgekehrt ist das Verhältniß $a \div b < c \div d$ wenn $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$.

§. 168.

Das arithmetische Verhältniß wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man beide Glieder desselben um die nämliche Zahl vermehrt oder vermindert. Denn wenn man in der allgemeinen Formel $a \dot{-} (a + d)$ zu beiden Gliedern die Zahl n addirt, oder n von beiden subtrahirt, so erhält man das Verhältniß $(a \pm n) \dot{-} (a + d \pm n)$, dessen Differenz $(a + d \pm n) - (a \pm n) = a + d \pm n - a \mp n = d$ ist.

Wenn man aber beide Glieder des arithmetischen Verhältnisses mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt, so bleibt das Verhältniß nicht mehr ungeändert. Denn setzt man im Verhältnisse $a \dot{-} b$ die Differenz $b - a = d$, so ist im Verhältnisse $am \dot{-} bm$ die Differenz $= bm - am = m(b - a) = md$, und im Verhältnisse $\frac{a}{n} \dot{-} \frac{b}{n}$ ist die Differenz $\frac{b}{n} - \frac{a}{n} = \frac{b - a}{n} = \frac{d}{n}$ (§. 167).

Zusatz.

Ist d der Exponent des Verhältnisses $a \dot{-} b$, so folgt:

1) $b = a + d$, 2) $d = b - a$ und 8) $a = b - d$.

Sind also zwei von den drei Größen a, b, d gegeben, so kann auch die dritte bestimmt werden.

§. 169.

Das geometrische Verhältniß zweier Größen wird dem Werthe nach nicht geändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Denn hat das Verhältniß $a \div b$ den Exponenten q, oder ist $\frac{b}{a} = q$, so ist auch $\frac{mb}{ma}$ und $\frac{b:n}{a:n} = q$, und also sind die Verhältnisse $ma \div mb$ und $\frac{a}{n} \div \frac{b}{n}$ dem Verhältnisse $a \div b$ gleich (§. 167).

Hingegen wird das geometrische Verhältniß geändert, wenn man zu beiden Gliedern desselben die nämliche Größe addirt, oder davon abzieht. Denn der Exponent des Verhältnisses $(a \pm m) \div (b \pm m)$ ist $= \frac{b \pm m}{a \pm m}$, und der Exponent des Verhältnisses $a \div b$ ist $= \frac{b}{a} = q$

Nun ist aber

$$\frac{b}{a} - \frac{b \pm m}{a \pm m} = \frac{ab \pm bm - ab \mp am}{a(a \pm m)} = \frac{\pm m(b - a)}{a(a \pm m)},$$

welcher Ausdruck nur dann $= 0$ wird, wenn entweder $m = 0$ oder $b = a$ ist, d. h. nur unter diesen Bedingungen werden jene Verhältnisse dem gegebenen gleich.

Zusatz 1.

Wenn q der Exponent des Verhältnisses $a \div b$ ist, so ist

$$q = \frac{b}{a}, \text{ also } b = aq \text{ und } a = \frac{b}{q}.$$

Sind also von den drei Größen a, b, q zwei gegeben, so kann die dritte gefunden werden.

Zusatz 2.

Da das Verhältniß

$$\frac{a}{m} \div \frac{b}{m} = \frac{a}{m} \cdot m \div \frac{b}{m} \cdot m = a \div b,$$

und weil man das Verhältniß $\frac{a}{m} \div \frac{b}{m}$ überhaupt als ein Verhältniß von Brüchen betrachten kann, so ist klar, daß Brüche von einerlei Nenner sich verhalten, wie ihre Zähler. Es ist aber

$$\frac{a}{m} \div \frac{a}{n} = \frac{a}{m} \times \frac{mn}{a} \div \frac{a}{n} \times \frac{mn}{a} = n \div m,$$

d. h. Brüche von gleichen Zählern verhalten sich umgekehrt, wie ihre Nenner.

Zusatz 3.

Dividirt man die Glieder des Verhältnisses $a \div aq$ durch a, so erhält man das gleiche Verhältniß $1 \div q$, d. i. für jedes Verhältniß kann man das Verhältniß der Einheit zum Exponenten jenes Verhältnisses setzen.

§. 170.

Wenn man mehrere gleiche Verhältnisse $a \div b$, $c \div d$, $e \div f$ und $g \div h$ hat, deren gemeinschaftlicher Quotient $= q$ sein soll, so hat das Verhältniß der Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder denselben Exponenten. Denn weil

$$b = aq,\ d = cq,\ f = eq \text{ und } h = gq,$$

so ist auch

$$b + d + f + h = aq + cq + eq + gq = (a + c + e + g) q$$

und daher

$$(a + c + e + g) \div (b + d + f + h) = (a + c + e + g) \div (a + c + e + g) . q$$
$$= 1 \div q \text{ (§. 169, Zus. 3) } = a \div b = c \div d = \text{u. s. w.}$$

Also verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede, oder wie die Einheit zum Exponenten der gegebenen gleichen Verhältnisse.

§. 171.

Wenn die beiden Verhältnisse $a \div b$ und $c \div d$ denselben Exponenten q haben, so ist

$$(a \pm c) \div (b \pm d) = (a \pm c) \div (aq \pm cq),$$

wo der Quotient $\frac{aq \pm cq}{a \pm c} = \frac{q\,(a \pm c)}{a \pm c} = q$, d. h. die Summe oder Differenz der Vorderglieder zweier gleichen geometrischen Verhältnisse hat zur Summe oder Differenz der Hinterglieder derselben das nämliche Verhältniß, welches jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede hat.

§. 172.

Multiplicirt man sowohl die Vorderglieder, als die Hinterglieder mehrerer gegebenen geometrischen Verhältnisse mit einander, so heißt das Verhältniß der erhaltenen Produkte ein zusammengesetztes (componirtes) Verhältniß. Der Exponent eines solchen Verhältnisses ist demnach das Produkt aus den Exponenten aller Verhältnisse, aus welchen es zusammengesetzt wurde. So z. B. sei im Verhältnisse

$$a \div b \text{ der Quotient } \frac{b}{a} = p \text{ oder } b = ap,$$

$$c \div d \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{d}{c} = q \text{ oder } d = cq,$$

$$e \div f \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{f}{e} = r \text{ oder } f = er,$$

so ist im Verhältnisse

$$ace \div bdf \text{ der Quotient } \frac{bdf}{ace} = \frac{ap.cq.er}{ace} = \frac{ace.pqr}{ace} = pqr$$

Sind jene Verhältnisse gleich, ist nämlich $p = q = r$, so heißt das aus ihnen zusammengesetzte Verhältniß das multiplicirte und zwar das duplicirte, triplicirte, ... Verhältniß, je nachdem es aus zwei oder drei ... gleichen Verhältnissen zusammengesetzt wurde. Jedes der gleichen Verhältnisse, aus welchen das multiplicirte entstanden ist, heißt das submultiplicirte, und insbesondere das subduplicirte, subtriplicirte ... Verhältniß. So wäre also für den Fall, daß $p = q$ ist, $ac \div bd$ das duplicirte Verhältniß von $a \div b$ oder von $c \div d$, und dieses das subduplicirte in Bezug auf jenes. Eben so ist $ace \div bdf$ das triplicirte Verhältniß, wenn wir

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{c} \text{ oder } p = q = r$$

setzen, und $a \div b$, oder $c \div d$, oder $e \div f$ das subtriplicirte Verhältniß in Bezug auf $ace \div bdf$.

Zusatz.

Weil wir die Gleichheit der Verhältnisse $a \div b$, $c \div d$, $e \div f$, u. s. f. hier voraussetzen, so können wir das eine für das andere nehmen, und auch so componiren:

$$\begin{array}{l} a \div b \\ a \div b \\ \hline a^2 \div b^2 \end{array} \text{ oder } \begin{array}{l} c \div d \\ c \div d \\ \hline c^2 \div d^2 \end{array} \text{ und } \begin{array}{l} a \div b \\ a \div b \\ a \div b \\ \hline a^3 \div b^3 \end{array} \text{ oder } \begin{array}{l} c \div d \\ c \div d \\ c \div d \\ \hline c^3 \div d^3 \end{array} \text{ oder } \begin{array}{l} e \div f \\ e \div f \\ e \div f \\ \hline c^3 \div f^3 \end{array}$$

d. i. das duplicirte Verhältniß ist das Verhältniß der Quadrate, und das triplicirte ist das Verhältniß der Würfel der Glieder in irgend einem jener gleichen Verhältnisse. Folglich ist auch umgekehrt das submultiplicirte Verhältniß das Verhältniß der gleichnamigen Wurzeln.

Componirt man m gleiche Verhältnisse, deren eines $a \div b$ sein soll, so erhält man

$$a^m \div b^m = a^m \div (a\,q)^m = a^m \div a^m\,q^m = 1 \div q^m,$$

d. i. man kann statt des multiplicirten Verhältnisses überhaupt das Verhältniß der Einheit zum Exponenten eines der gegebenen Verhältnisse setzen, zu jener Potenz erhoben, welche die Anzahl der gegebenen Verhältnisse anzeigt. Umgekehrt, ist $\frac{B}{A} = Q$, so ist

$$\sqrt[m]{A} \div \sqrt[m]{B} = 1 \div \frac{\sqrt[m]{B}}{\sqrt[m]{A}} = 1 \div \sqrt[m]{\frac{B}{A}} = 1 \div \sqrt[m]{Q},$$

d. h. statt des submultiplicirten Verhältnisses läßt sich überhaupt das Verhältniß der Einheit zur m^{ten} Wurzel aus dem Quotienten des multiplicirten Verhältnisses setzen.

§. 173.

1. **Jedes rationale Verhältniß läßt sich durch das Verhältniß zweier ganzen Zahlen ausdrücken.**

Denn haben die Größen A und B ein Rationalverhältniß zu einander, so muß auch $\frac{B}{A}$ eine Rationalzahl sein. Es sei also $\frac{B}{A} = \frac{n}{m}$, wo m und n ganze Zahlen sein sollen, so ist $A \div B = m \div n$.

2. Aus der Gleichung $\frac{B}{A} = \frac{n}{m}$ folgt $\frac{B}{n} = \frac{A}{m}$, und wenn man diesen Quotienten durch M bezeichnet, so wird

$$\frac{A}{m} = M \text{ oder } \frac{A}{M} = m \text{ und}$$
$$\frac{B}{n} = M \text{ oder } \frac{B}{M} = n;$$

d. h. M ist ein gemeinschaftliches Maß von A und B. Haben demnach zwei Größen A und B ein rationales Verhältniß zu einander, so haben sie auch ein gemeinschaftliches Maß M.

3. Auch der umgekehrte Satz ist gültig, nämlich: Wenn zwei Größen A und B ein gemeinschaftliches Maß M haben, so bilden sie ein rationales Verhältniß. Denn es sei $\frac{A}{M} = m$ und $\frac{B}{M} = n$, also $A = mM$ und $B = nM$, wo m und n ganze Zahlen bezeichnen müssen, so wird

$$A \div B = mM \div nM = m \div n \text{ (§. 169)},$$

welches letztere Verhältniß ein Verhältniß zweier ganzen Zahlen und daher rational ist.

4. Es sei $A\,\mathfrak{U}. \div B\,\mathfrak{U}. = m \div n$, wo m und n unbenannte Zahlen sein sollen, so ist $\frac{B}{A} = \frac{n}{m} = q$, also $B = Aq$ und $n = mq$, mithin auch

$$m \div n = m \div mq = 1 \div q = A \div Aq \text{ (§. 169)} = A \div B,$$

nämlich es ist $m \div n = A \div B$, folglich auch $A\mathit{fl.} : B\mathit{fl.} = A : B$, d. h. zwei benannte Zahlen, die sich auf einerlei Einheit beziehen, verhalten sich wie die zugehörigen unbenannten Zahlen.

Zweites Kapitel.

Von den Proportionen.

§. 174.

Die Gleichheit zweier Verhältnisse nennt man eine Proportion, welche entweder eine arithmetische oder geometrische ist, je nachdem sie eine Gleichung zwischen zwei arithmetischen oder geometrischen Verhältnissen darstellt. So z. B. ist

$$a \doteq (a + d) = b \doteq (b + d)$$

eine arithmetische Proportion, weil sie aus zwei gleichen arithmetischen Verhältnissen besteht, und man spricht: a verhält sich zu $a + d$ wie b zu $b + d$; und $a \div aq = b \div bq$ ist eine geometrische Proportion, weil sie eine Gleichung zwischen zwei geometrischen Verhältnissen ist, und man spricht: a verhält sich zu aq, wie $b \div bq$.

Haben mehrere Größen dasselbe Verhältniß zu einander, so sagt man, sie seien einander proportional.

Die einzelnen Größen, welche die Proportion bilden, heißen Glieder derselben, und zwar das erste und letzte äußere, das zweite und dritte aber mittlere Glieder. Das erste und dritte, und das zweite und vierte Glied heißen homolog oder gleichnamig, weil erstere die Vorderglieder und letztere die Hinterglieder der beiden Verhältnisse sind, aus welchen die Proportion besteht.

Sind die mittlern Glieder einer Proportion einander gleich, so heißt die Proportion stätig oder zusammenhängend, im entgegengesetzten Falle aber discret oder abgesondert. So z. B. ist $a \doteq b = b \doteq c$ eine stätige arithmetische Proportion, welche man auch kurz also zu bezeichnen pflegt: $\doteq a \doteq b \doteq c$, und wo b die mittlere arithmetische Proportionale zwischen a und c genannt wird. Eben so ist $a \div b = b \div c$,

oder kürzer $\div a \div b \div c$ eine stätige geometrische Proportion, wo b die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und c, und c die dritte stätige Proportionale zu a und b heißt.

Zusatz.

Die geometrische Proportion sagt also ihrer Natur nach aus: „Wie das zweite Glied aus dem ersten entspringt, eben so entspringt auch das vierte Glied aus dem dritten." Dieser Satz heißt mit anderen Worten: „Das vierte Glied ist so viel Mal größer oder kleiner als das dritte Glied, wie viel Mal das zweite Glied größer oder kleiner ist als das erste."

Diese beiden Sätze sind gleichsam ein Prüfstein für die Gültigkeit einer gegebenen Proportion in einem praktischen Falle; denn sie zeigen, ob die Glieder zweier gegebenen Verhältnisse wahrhaft geometrisch proportional seien oder nicht. Muß eines der gegebenen Verhältnisse umgekehrt werden (§. 166), damit die Proportion einem der obigen Sätze entspricht, so sagt man, die Glieder der beiden ersten Verhältnisse seien umgekehrt proportional, um sie von den gerade proportionalen Gliedern zu unterscheiden, welche eine wahre Proportion bilden. Wollte man z. B. die Geschwindigkeit zweier Menschen bestimmen, welche in derselben Zeit verschiedene Räume durchlaufen, so hat offenbar jener die größere Geschwindigkeit, welcher den größern Raum zurücklegt, d. i. die Geschwindigkeiten sind den Räumen gerade proportional, oder Geschwindigkeiten und die in der nämlichen Zeit durchlaufenen Räume stehen im geraden Verhältnisse. Legen aber zwei Personen in verschiedenen Zeiten denselben Raum zurück, so hat gewiß jene die größere Geschwindigkeit, welche in der kleinern Zeit denselben Weg zurückgelegt hat; d. i. Geschwindigkeiten und Zeiten stehen im umgekehrten Verhältnisse, oder das Verhältniß der beiden Geschwindigkeiten ist dem umgekehrten Verhältnisse der entsprechender Zeiten gleich. Bezeichnen wir nämlich die beiden Geschwindigkeiten durch G und g, und die entsprechenden Zeiten durch T und t, so ist das Verhältniß $G \div g$ nicht $= T \div t$, sondern es ist

$$G \div g = t \div T.$$

A. Von den arithmetischen Proportionen.

§. 175.

Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittleren Glieder, und wenn die Proportion stätig ist, gleich dem doppelten mittleren Gliede.

Beweis.

Ist nämlich $a \dot{-} b = m \dot{-} n$, so ist $a + n = b + m$, und wenn $b = m$, so ist $a + n = 2b$. Denn setzt man $b - a = d$, also auch $n - m = d$, so ist $b = a + d$ und $n = m + d$ (§. 168). Daher ist $a + n = a + m + d$ und $b + m = a + d + m$, also auch $a + n = b + m$, und für $b = m$ ist $a + n = b + b = 2b$. So ist z. B. in der Proportion $5 \dot{-} 7 = 9 \dot{-} 11$ auch $5 + 11 = 7 + 9 = 16$, und in $\dot{-} 5 \dot{-} 7 \dot{-} 9$ ist $5 + 9 = 2 . 7 = 14$.

Zusatz 1.

Wir können demnach mit den Gliedern der Proportion $a \dot{-} b = m \dot{-} n$ rücksichtlich ihrer Anordnung, acht Veränderungen vornehmen, nämlich wir können statt der Proportion

1) $a \dot{-} b = m \dot{-} n$ auch setzen:
2) $a \dot{-} m = b \dot{-} n$, durch Verwechslung der mittlern Glieder,
3) $n \dot{-} b = m \dot{-} a$, durch Verwechslung der äußern Glieder,
4) $b \dot{-} a = n \dot{-} m$, durch Umkehren der Verhältnisse,
5) $n \dot{-} m = b \dot{-} a$, durch Verwechsl. der äußern u. mittlern Glieder.
6) $b \dot{-} n = a \dot{-} m$, durch Umkehrung der Verhältnisse in (3),
7) $m \dot{-} n = a \dot{-} b$, durch Versetzung der Verhältnisse in (1),
8) $m \dot{-} a = n \dot{-} b$, durch Umkehrung der Verhältnisse in (2),

denn in allen diesen Proportionen bleibt immer $a + n = b + m$.

Zusatz 2.

Da nun $a + n = b + m$, so ist $a = b + m - n$, $n = b + m - a$, $b = a + n - m$ und $m = a + n - b$. Ist demnach eines der vier Glieder einer arithmetischen Proportion unbekannt, so kann es mittelst des vorstehenden Satzes gefunden werden.

Also wird ein äußeres Glied gefunden, wenn man von der Summe der mittleren Glieder, und wenn die Proportion stätig ist, von dem doppelten mittleren Gliede das bekannte äußere Glied abzieht; ein mittleres Glied aber wird gefunden, wenn man von der Summe der äußern Glieder das gegebene mittlere Glied abzieht.

Hat man aber $\div a \cdot x \cdot n$, so ist $2x = a + n$, also $x = \frac{a+n}{2}$, d. h. die mittlere arithmetische Proportionale oder das arithmetische Mittel zwischen a und n ist gleich der halben Summe der beiden gegebenen Größen.

B. Von den geometrischen Proportionen.

§. 176.

Wenn $a \div b = c \div d$ eine wahre geometrische Proportion sein soll, so muß $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ sein. Hieraus folgt $bc = ad$, wenn man beide Ausdrücke mit ac multiplicirt. Also ist in jeder geometrischen Proportion das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittleren.

Zusatz.

Ist die Proportion stätig, oder $b = c$, so erhält man $ad = bc = b^2$, d. i. in jeder stätigen geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder dem Quadrate des mittlern Gliedes gleich.

Da die arithmetischen Proportionen nur selten eine Anwendung finden, die geometrischen dagegen in der Mathematik sehr häufig gebraucht werden, so wollen wir in der Folge, wenn von Proportionen schlechtweg die Rede ist, immer die geometrischen verstanden wissen, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich erinnert wird.

§. 177.

Der vorstehende Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, jedes beliebige Glied einer Proportion zu bestimmen, wenn drei Glieder bekannt sind. Denn es sei $a \div b = c \div d$, so ist $ad = bc$, und hieraus folgt $a = \frac{bc}{d}$ und $d = \frac{bc}{a}$, d. h. ein äußeres Glied wird gefunden, wenn man das Produkt der beiden mittleren durch das bekannte äußere Glied dividirt. Aus der

Gleichung $ad = bc$ folgt ferner $b = \frac{ad}{c}$ und $c = \frac{ad}{b}$, d. i. ein mittleres Glied wird gefunden, wenn man das Produkt der beiden äußeren Glieder durch das bekannte mittlere dividirt.

Soll man z. B. zu den Zahlen 3, 7 und 12 die vierte Proportionalzahl (x) finden, so ist $x = \frac{7 \,.\, 12}{3} = 28$, und man hat die Proportion $3 \div 7 = 12 \div 28$. Eben so findet man aus der Proportion $2a \div 5mn = x \div 20am^2$, daß $x = \frac{2a \,.\, 20am^2}{5mn} = \frac{8a^2m}{n}$ sei.

Zusatz 1.

Hat man $\div a \div b \div c$, so ist $ac = b^2$, woraus $a = \frac{b^2}{c}$ und $c = \frac{b^2}{a}$ folgt; d. h. in jeder stätigen Proportion wird ein äußeres Glied gefunden, wenn man das Quadrat des mittleren Gliedes durch das bekannte äußere dividirt. Aus der Gleichung $b^2 = ac$ findet man endlich $b = \sqrt{ac}$, d. i. die mittlere Proportionale zwischen den Größen a und c wird gefunden, wenn man aus dem Produkte der gegebenen Glieder die Quadratwurzel auszieht. Z. B.:

1) $\div 2 \div 4 \div x$; $x = \frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

2) $\div x \div 25 \div 125$; $x = \frac{25^2}{125} = \frac{25}{5} = 5$.

3) $\div 4 \div x \div 64$; $x^2 = 4 \,.\, 64$, also

$$x = \sqrt{4 \,.\, 64} = 2 \,.\, 8 = 16.$$

Wir haben also zwei Kennzeichen für die Gültigkeit einer Proportion, nämlich 1) die Gleichheit der Verhältnisse, d. i. die Gleichheit der Exponenten derselben, und 2) die Gleichheit der Produkte aus den äußern und den mittlern Gliedern.

Zusatz 2.

Das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ zweier Zahlen a und b ist immer größer als die mittlere geometrische Proportionale $\sqrt{ab}$ zwischen denselben Zahlen.

Denn es sei $a > b$, mithin $a - b > 0$ und demnach auch $(a-b)^2 > 0$, oder $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, mithin auch $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$, oder $a + b > 2\sqrt{ab}$, d. i. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

§. 178.

1. Weil aus der Proportion $a \div b = c \div d$ die Gleichung $ad = bc$ hervorgeht, so folgt auch umgekehrt aus dieser Gleichung jene Proportion. Denn ist $ad = bc$ oder $bc = ad$, so ist auch

$$\frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac}, \text{ oder } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \text{ d. i. } a \div b = c \div d.$$

Hieraus ziehen wir nun den Schluß, daß die Faktoren zweier gleichen Produkte umgekehrt proportional seien (§. 174, Zusatz). Es bilden nämlich die Faktoren des einen Produktes immer die beiden äußern, und die des andern die beiden mittlern Glieder der Proportion; übrigens kömmt es dann auf die Ordnung der Faktoren nicht an. Z. B.

$am = bx$ gibt $a \div b = x \div m$, oder $b \div a = m \div x$;

$a = mnx$ gibt $1 \div mn = x \div a$, denn $a = 1 . a$;

$a^2 - am = x^2 - ax$ gibt $a \div x = x - a \div a - m$;

$x^2 = abc$ gibt $\div a \div x \div bc$, oder $\div ab \div x \div c$, $\div b \div x \div ac$, u. s. w.

$xy = \sqrt{m^2 - n^2}$ gibt $\div (m + n) \div xy \div (m - n)$

oder $\div (m - n) \div xy \div (m + n)$,

oder $(m - n) \div x^2 = y^2 \div m + n$, u. s. f.

2. $(\sqrt{N})^2 = N$ gibt die Proportion $\div 1 \div \sqrt{N} \div N$, d. h. die Quadratwurzel aus einer Zahl N ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der primitiven Einheit und der Zahl N selbst.

3. Sind A Ellen = B Fußen, oder A (1 . Elle) = B . (1 . Fuß), so folgt:

1 Elle : 1 Fuß = B : A, oder

1 Fuß : 1 Elle = A : B.

Wenn demnach zwei verschieden benannte Zahlen einander gleich sind, so verhalten sich diese Zahlen umgekehrt wie die Benennungen.

Ist $x = ma$ und $y = n . b$, so ist auch $\frac{x}{y} = \frac{ma}{nb}$, und daher $y \div x = nb \div ma$,

§. 179.

Wenn vier Größen a, b, c und d geometrisch proportionirt sind so kann die Proportion selbst in 8 verschiedenen Formen dargestellt werden, nämlich

1) $a \div b = c \div d$; dann, wenn man die mittlern Glieder verwechselt (alternirt),

2) $a \div c = b \div d$; wenn man in (1) die Verhältnisse umkehrt, so ist

3) $b \div a = d \div c$; durch Verwechslung der Verhältnisse in (2) hat man

4) $b \div d = a \div c$; und durch Umkehrung der Verhältnisse in (2) wird

5) $c \div a = d \div b$; verwechselt man in (1) die Verhältnisse, so ist

6) $c \div d = a \div b$; durch Verwechslung der äußern Glieder in (1) wird

7) $d \div b = c \div a$; und endlich durch Verwechslung der äußern Glieder in (2) erhält man

8) $d \div c = b \div a$;

denn aus allen diesen Proportionen erhält man die Gleichung $ad = bc$, welche bei der ersten Proportion als wahr angenommen wurde.

Wenn die Glieder des Verhältnisses $a \div b$ mit jenen des andern $c \div d$ nicht gleichartig sind, so kann man die Glieder des einen Verhältnisses nicht mit den Gliedern des andern verwechseln, weil ungleichartige Größen kein Verhältniß bilden können. In einem solchen Falle würden die verwandelten Proportionen 2, 4, 5 und 7 wegfallen.

§. 180.

1. Wenn $a \div b = c \div d$, so ist nach §. 172,

$$(a \pm c) \div (b \pm d) = a \div b = c \div d,$$

d. h. in jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

2. Da also $(a + c) \div (b + d) = a \div b$, und

$(a - c) \div (b - d) = a \div b$, so ist auch

$$(a + c) \div (b + d) = (a - c) \div (b - d),$$

denn zwei Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich. In jeder Proportion $a \div b = c \div d$ sind demnach die

Summen der Vorderglieder und Hinterglieder den Differenzen derselben proportional.

3. Wenn man in der Proportion $a \div b = c \div d$ alternirt, so erhält man $a \div c = b \div d$, daher ist (nach Nr. 1) auch

$$(a \pm b) \div (c \pm d) = a \div c,$$

und durch Alterniren

$$(a \pm b) \div a = (c \pm d) \div c \text{ oder } (a \pm b) \div (c \pm d) = b \div d,$$

und durch Alterniren

$$(a \pm b) \div b = (c \pm d) \div d.$$

In jeder Proportion verhält sich demnach die Summe oder Differenz der Glieder eines Verhältnisses zum Vordergliede oder Hintergliede desselben, wie die Summe oder Differenz der Glieder des andern Verhältnisses zum Vordergliede oder Hintergliede desselben.

4. Es sei wieder $a \div b = c \div d$. Verwechselt man die mittlern Glieder, so ist $a \div c = b \div d$, und demnach

$$(a + b) \div (c + d) = (a - b) \div (c - d) \text{ (nach Nr. 2)},$$

und durch Alterniren

$$(a + b) \div (a - b) = (c + d) \div (c - d);$$

d. i. die Summe der Glieder eines Verhältnisses verhält sich zur Differenz derselben, wie die Summe der Glieder des andern Verhältnisses zur Differenz eben derselben.

Der Beweis für die Gültigkeit der angeführten vier Sätze läßt sich auch so führen, daß man die Gleichheit der Exponenten in den Verhältnissen der umgewandelten Proportionen erweist (§. 169, Zus.).

§. 181.

Es sei $a \div b = c \div d$. Da nun

$$a \div b = ma \div mb = \frac{a}{n} \div \frac{b}{n} \text{ (§. 169)},$$

so ist auch

$$ma \div mb = c \div d \text{ und } \frac{a}{n} \div \frac{b}{n} = c \div d,$$

oder allgemein

$$\frac{ma}{n} \div \frac{mb}{n} = c \div d.$$

Verwechselt man die mittlern Glieder der gegebenen Proportion $a \div b = c \div d$, so ist $a \div c = b \div d$. Es ist demnach aus demselben Grunde, wie vorhin, $\frac{ma}{n} \div \frac{mc}{n} = b \div d$, und durch Verwechslung der mittlern Glieder

$$\frac{m \cdot a}{n} \div b = \frac{m \cdot c}{n} \div d.$$

Ganz auf dieselbe Art zeigt man auch, daß

$$a \div b = \frac{m \cdot c}{n} \div \frac{m \cdot d}{n} \text{ und } a \div \frac{mb}{n} = c \div \frac{md}{n}$$

wahre Proportionen seien.

Hieraus geht nun folgende Wahrheit hervor. „Die Proportionalität der Glieder einer geometrischen Proportion wird nicht aufgehoben, wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied der Proportion durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt. Wenn z. B.

$a \div b = c \div d$, so ist auch $amn \div bmp = cnr \div drp$

$$\text{und } \frac{a}{mn} \div \frac{b}{mp} = \frac{c}{nr} \div \frac{d}{pr},$$

wo m, n, p und r was immer für Zahlen sein mögen.

Zusatz 1.

Diese Eigenschaft der Proportionen setzt uns in den Stand, aus einer Proportion die Brüche wegzuschaffen, und die Glieder so einfach als möglich darzustellen. Wenn man z. B. in der Proportion

$$7\tfrac{1}{5} \div 9\tfrac{1}{7} = 2\tfrac{1}{10} \div x \text{ oder } \tfrac{36}{5} \div \tfrac{64}{7} = \tfrac{21}{10} \div x$$

die beiden Vorderglieder mit 10, und die beiden Hinterglieder mit 7 multiplicirt, so erhält man $72 \div 64 = 21 \div 7x$, und dividirt man die Glieder des ersten Verhältnisses durch 8, und die des zweiten durch 7, so ist $9 \div 8 = 3 \div x$ oder $3 \div 8 = 1 \div x$, wenn man die beiden Vorderglieder durch 3 dividirt.

Zusatz 2.

Wenn man in der Proportion $ma \div nb = c \div d$ die Vorderglieder durch m, und die Hinterglieder durch n dividirt, so ist

$$a \div b = \frac{c}{m} \div \frac{d}{n},$$

und wenn man die Glieder des zweiten Verhältnisses mit mn multiplicirt, $a \div b = cn \div dm$. Vergleicht man diese Proportion mit der gegebenen, so zeigt sich, daß man der Proportionalität unbeschadet die Faktoren aus einem äußeren Gliede ins andere äußere, und aus einem mittleren ins andere mittlere Glied versetzen könne. Z. B.:

$$3 \,.\, 4 \div 5 \,.\, 7 = 6 \div 10x \text{ gibt}$$
$$4 \,.\, 10 \div 5 = 7 \,.\, 6 \div 3 \,.\, x, \text{ oder}$$
$$4 \,.\, 2 \div 1 = 7 \,.\, 2 \div x, \text{ oder}$$
$$4 \div 1 = 7 \div x.$$

§. 182.

Wenn $\frac{b}{a} = \frac{n}{m} = \frac{d}{c} = \frac{q}{p}$, oder wenn die Proportionen

$$a \div b = m \div n \text{ und } c \div d = p \div q$$

gleiche Exponenten haben, so sind auch die Summen und die Differenzen der homologen Glieder proportional, oder es ist

$$(a \pm c) \div (b \pm d) = (m \pm p) \div (n \pm q) \text{ (§. 171).}$$

Dieser Satz ist rücksichtlich der Summe der homologen Glieder noch gültig, wenn man auch noch so viele Proportionen auf diese Art mit einander verbindet, wenn nur die Exponenten derselben gleich sind.

§. 183.

Wenn man die homologen Glieder zweier oder mehrerer Proportionen mit einander multiplicirt, so stehen auch die so erzeugten Produkte in Proportion; nämlich wenn

$$a \div ap = b \div bp$$
$$c \div cq = d \div dq$$
$$e \div er = f \div fr$$
$$g \div gs = h \div hs; \text{ so ist auch}$$
$$aceg \div aceg \,.\, pqrs = bdfh \div bdfh \,.\, pqrs,$$

denn beide Verhältnisse haben denselben Exponenten pqrs.

Zusatz 1.

Es sei

$$a \div x = m \div n$$
$$x \div y = p \div q$$
$$y \div z = r \div s,$$

$$\text{so ist } axy \div xyz = mpr \div nqs,$$
$$\text{oder } a \div z = mpr \div nqs,$$

d. h. wenn man mehrere Proportionen zusammensetzt, und es ist immer das Hinterglied des einen Verhältnisses gleich dem Vordergliede des folgenden Verhältnisses in der nächsten Proportion; so sind das erste Vorderglied der ersten Proportion, und das erste Hinterglied der letzten Proportion im zusammengesetzten Verhältnisse aller zweiten Verhältnisse der gegebenen Proportionen.

Solche Verhältnisse, wie $a \div x$, $x \div y$, $y \div z$ u. s. w. nennt man aneinander hängende, oder zusammenhängende Verhältnisse, und das aus ihnen zusammengesetzte Verhältniß $axy \div xyz$ ist immer gleich dem Verhältnisse des ersten Vordergliedes zum letzten Hintergliede, nämlich $= a \div z$.

Zusatz 2.

Aus der Proportion $a \div b = c \div d$ folgt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, mithin auch

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{d}{c}\right)^m \text{ oder } \frac{b^m}{a^m} = \frac{d^m}{c^m},$$

und daher ist $a^m \div b^m = c^m \div d^m$, d. h. bilden vier Wurzeln eine Proportion, so sind auch die gleichnamigen Potenzen derselben proportional. Umgekehrt, ist $a \div b = c \div d$, so ist auch

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} \div \sqrt[n]{d}; \text{ denn es ist}$$

$$\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{d}}{\sqrt[n]{b}} \text{ oder } \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{\frac{d}{c}},$$

weil $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ vermöge der Voraussetzung. Es ist also allgemein

$$\sqrt[n]{a^m} \div \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{c^m} \div \sqrt[n]{d^m},$$

wenn $a \div b = c \div d$ ist, und hierbei können m und n was immer für ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bezeichnen.

§. 184.

Wenn $a \div b = cd \div ef$ und $d \div f = m \div n$ wahre Proportionen sind, so ist auch $a \div b = cm \div en$. Denn weil der Voraussetzung gemäß

$$\frac{f}{d} = \frac{n}{m} \text{ und } \frac{e}{c} = \frac{e}{c}, \text{ so ist auch}$$

$$\frac{f}{d} \cdot \frac{e}{c} = \frac{n}{m} \cdot \frac{e}{c} \text{ oder } \frac{ef}{cd} = \frac{en}{cm}, \text{ d. i.}$$

$$cd \div ef = cm \div en, \text{ folglich } a \div b = cm \div en.$$

§. 185

Wenn man die homologen Glieder zweier Proportionen durch einander dividirt, so bilden auch die Quotienten wieder eine wahre Proportion. Denn es sei

$$\begin{array}{l} a \div aq = b \div bq \text{ und} \\ m \div mp = n \div np, \text{ so ist auch} \\ \hline \frac{a}{m} \div \frac{aq}{mp} = \frac{b}{n} \div \frac{bq}{np} \text{ (§. 172).} \end{array}$$

Es sei z. B.

$$\begin{array}{l} 4 \div 9 = 6 \div xy \text{ und} \\ 2 \div 3 = 1 \div x, \\ \hline \end{array}$$

$$\text{so ist auch } \tfrac{4}{2} \div \tfrac{9}{3} = 6 \div \frac{xy}{x},$$

oder $2 \div 3 = 6 \div y$, d. i. $1 \div 3 = 3 \div y$.

§. 186.

I. Wenn die Hinterglieder einer Proportion den Vordergliedern einer andern Proportion gleich sind, so sind die übrigen Glieder beider Proportionen gerade proportional. Denn es sei z. B.

$$\begin{array}{l} a \div b = c \div d \\ b \div m = d \div n, \text{ so ist auch} \\ \hline ab \div bm = cd \div dn \text{ (§. 183), oder} \\ a \div m = c \div n. \end{array}$$

II. Wenn zwei Proportionen die Vorderglieder oder die Hinterglieder gleich haben, so sind im ersten Falle die Hinterglieder, im andern aber die Vorderglieder direkt proportional. Es sei z. B.

$$\begin{array}{ll} 1) & a \div b = c \div d \text{ und} \\ & a \div m = c \div n. \end{array}$$

Man kehre die Verhältnisse der ersten Proportion um, und schreibe dann die zweite unter, so ist.

$$\begin{array}{l} b \div a = d \div c \\ a \div m = c \div n \\ \hline \text{also } b \div m = d \div n \text{ (Nro. 1).} \end{array}$$

Es sei

$$\begin{array}{l} 2)\quad a \div b = c \div d \\ \quad\ \ m \div b = n \div d, \text{ so ist} \\ \hline \quad\ \ a \div m = c \div n, \end{array}$$

wenn man die Verhältnisse der zweiten Proportion umkehrt, und mit der ersten zusammensetzt.

III. Wenn die mittleren Glieder einer Proportion den äußern Gliedern einer andern Proportion gleich sind, so sind die äußern Glieder der ersten und die mittleren der andern umgekehrt proportional. Denn wenn

$$\begin{array}{l} a \div b = c \div d \text{ und} \\ b \div m = n \div c, \text{ so ist} \\ \hline a \div m = n \div d \ (\S.\ 183). \end{array}$$

IV. Haben zwei Proportionen die äußern oder die mittlern Glieder gleich, so sind im ersteren Falle die mittleren, im andern aber die äußern Glieder umgekehrt proportional. Denn es sei

$$\begin{array}{l} a \div b = c \div d \text{ und} \\ a \div m = n \div d, \text{ so ist} \\ \hline b \div m = n \div c, \end{array}$$

wenn man die Verhältnisse der ersten Proportion umkehrt, und mit der zweiten zusammensetzt (§. 183). Hat man aber

$$\begin{array}{l} a \div b = c \div d \text{ und} \\ m \div b = c \div n, \text{ so ist} \\ \hline a \div m = n \div d, \end{array}$$

wenn man die zweite Proportion, nach Umkehrung der Verhältnisse, mit der ersten zusammensetzt.

V. Sind drei Größen a, b und c von der Beschaffenheit, daß $a : c = a - b : b - c$ oder $a : c = b - a : c - b$ wie z. B. $6 : 3 = 6 - 4 : 4 - 3$ eine wahre geometrische Proportion ist, so sagt man: a, b und c (6, 4 und 3) sind in harmonischer Proportion, oder a, b und c sind harmonisch proportionirt. — Setzen wir $c = x$, so finden wir aus der harmonischen Proportion

$$a : x = a - b : b - x$$

$$x = \frac{a\,b}{2a - b}.$$

Setzen wir aber $a = y$, so folgt aus

$$y : c = y - b : b - c$$

$$y = \frac{bc}{2c - b}.$$

Ist endlich $b = z$ unbekannt, so ergibt sich aus der Proportion $a : c = a - z : z - c$, $z = \frac{2ac}{a + c}$. — Sind demnach von den drei Größen a, b und c zwei gegeben, so läßt sich die fehlende jedes Mal durch Rechnung bestimmen.

Sind die drei Größen a, b und c harmonisch proportionirt, so sind auch die Größen ma, mb und mc, eben so $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$ und $\frac{c}{n}$ harmonisch proportionirt.

Zusatz 1.

Bilden drei Größen α, β, γ eine stätige arithmetische Proportion, so sind die Produkte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ harmonisch proportionirt, nämlich es ist

$$\alpha\beta : \beta\gamma = (\alpha\gamma - \alpha\beta) : (\beta\gamma - \alpha\gamma) \ldots . (\odot).$$

Denn setzen wir $\beta = \alpha + \delta$, also $\gamma = \alpha + 2\delta$,

so wird $\alpha\beta = \alpha(\alpha + \delta)$, $\alpha\gamma = \alpha(\alpha + 2\delta)$

und $\beta\gamma = (\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta) = \alpha^2 + 3\alpha\delta + 2\delta^2$,

mithin $\alpha\gamma - \alpha\beta = \alpha(\alpha + 2\delta) - \alpha(\alpha + \delta) = \alpha\delta$

und $\beta\gamma - \alpha\gamma = (\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta) - \alpha(\alpha + 2\delta)$

$= \delta(\alpha + 2\delta) = \alpha\delta + 2\delta^2$,

folglich

$$\alpha(\alpha + \delta) : (\alpha + \delta)(\alpha + 2\delta) = \alpha\delta : \delta(\alpha + 2\delta)$$

d. i.

$$\alpha : (\alpha + 2\delta) = \alpha : (\alpha + 2\delta),$$

welche zwei Verhältnisse identisch sind, woraus demnach die Gültigkeit der Proportion $(\odot)$ von selbst erhellt.

Zusatz 2.

Nimmt man zwischen zwei Zahlen A und C das arithmetische Mittel $M = \frac{A + C}{2}$ und auch die mittlere harmonische Proportionale

$H = \frac{2AC}{A+C}$ (Nr. V) so ist $A : M = H : C$ eine wahre geometrische Proportion, denn es ist $\frac{M}{A} = \frac{A+C}{2A}$ und

$$\frac{C}{H} = C \cdot \frac{A+C}{2AC} = \frac{A+C}{2A}, \text{ folglich } \frac{M}{A} = \frac{C}{H}.$$

VI. Haben drei Zahlen a, b und c die Eigenschaft, daß die Proportion Statt findet:

$$a : c = (b - c) : (a - b) = (c - b) : (b - a)$$

so pflegt man zu sagen, diese Proportion sei eine contraharmonische, oder jene drei Zahlen seien contraharmonisch proportionirt.

Aus jener Proportion folgt $b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}$; man findet demnach zwischen zwei Zahlen a und c die mittlere contraharmonische Proportionale, wenn man die Summe der Quadrate jener zwei Zahlen durch die Summe dieser beiden Zahlen dividirt. So z. B. ist $b = \frac{6^2 + 2^2}{6 + 2} = \frac{40}{8} = 5$ die mittlere contraharmonische Proportionale zwischen 2 und 6.

§. 187.

Wenn das Verhältniß zweier Größen $= 0 \div 0$ ist, so kann man nicht allgemein schließen, daß das erste Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit sei, denn das Verhältniß $0 \div 0$, oder $\frac{0}{0}$ kann jede mögliche Größe bedeuten. So z. B. gibt die Proportion $1 \div 1 = a \div a$ folgende: $(1 - 1) \div 1 = (a - a) \div a$, oder $(1 - 1) \div (a - a) = 1 \div a$, d. i. $0 \div 0 = 1 \div a$ oder $\frac{0}{0} = a$. Setzt man $x = a$ in dem Verhältnisse $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, so wird $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0}$.

Da aber

$$\frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{(a + a)(a - a)}{(a - a)} = a + a = 2a,$$

so ist auch $\frac{0}{0} = 2a$.

Es ist demnach $\frac{0}{0}$ ein unbestimmtes Verhältniß, dessen bestimmter Werth nur aus der Natur der Aufgabe, und in den meisten Fällen nur mit Hülfe der höheren Analysis ausgemittelt werden kann.

Drittes Kapitel.

Anwendung der Proportionen.

§. 188.

Der Nutzen der Proportionen zeigt sich in der gesammten Mathematik, und ihre Anwendung leistet im gemeinen Leben vorzügliche Dienste; denn die meisten Dinge, welche im bürgerlichen Leben in Rechnungen vorkommen, lassen sich in geometrischen Verhältnissen darstellen. Ob aber in einem gegebenen Falle dieses möglich, und wie es möglich sei, muß durch die Urtheilskraft entschieden werden. Eine allgemeine Vorschrift hierzu ist im Zusatze zu §. 174 enthalten. So sind z. B. Waaren und die entsprechenden Preise geometrisch proportional; denn zwei, drei, vier... mal größere Quantitäten derselben Waare haben auch zwei, drei, vier... mal größere Preise. Eben so trägt auch ein $n$mal größeres Kapital $n$mal mehr Zinsen als das einfache, u. s. f. Obgleich nun hier die Größen, welche in eine Proportion gebracht werden, selbst verschiedener Art, oder ungleichartig sind, wie z. B. Waaren und Preise, so können sie dennoch als gezählte, und in sofern als homogene Größen zwei gleiche Verhältnisse oder eine wahre geometrische Proportion bilden, indem man durch das quantitative Verhältniß, z. B. der Gewichte, das quantitative Verhältniß der Preise ausmittelt, oder umgekehrt, wie auch aus §. 173, 4 erhellt.

§. 189.

Alle benannten Größen, welche in einem geometrischen Verhältnisse stehen, lassen sich unter den allgemeinen Benennungen Ursache und Wirkung zusammenfassen. — Ein Ding, welches ein anderes hervorbringt, oder ein anderes rücksichtlich seiner Quantität bestimmt, pflegt man die Ursache (Kraft) des letztern zu nennen; dieses aber, als das bestimmte, heißt man Wirkung. Z. B. die größere oder kleinere Quantität (Menge, Größe, Schwere) der Waare ist die Ursache des größern oder kleinern Preises; das größere oder kleinere Kapital ist die Ursache des größern oder kleinern Zinsertrags. Eben so betrachtet man die Arbeiter als Ursache oder Kraft, und das hervorgebrachte Werk als Wirkung. Vergleicht man nun die von gleichartigen Ursachen oder Kräften, unter sonst ganz gleichen Umständen, hervorgebrachten

gleichartigen Wirkungen, so gilt im Allgemeinen der Satz: Gleichartige Ursachen oder Kräfte verhalten sich wie ihre Wirkungen. Bezeichnen wir erstere durch K und k, und letztere mit W und w, so ist die Proportion K ÷ k = W ÷ w allgemein gültig.

§. 190.

Das Verfahren, aus drei gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden, heißt die Regel de tri (regula de tribus), welche wegen ihrer häufigen und nützlichen Anwendung im bürgerlichen Leben auch goldene Regel genannt wird. Man pflegt sie in die einfache und zusammengesetzte goldene Regel, und in die Theilregel einzutheilen. Die goldene Regel heißt einfach, wenn zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte unbekannte Glied zu suchen ist, oder wenn zur Bestimmung der unbekannten Größe einer Aufgabe eine einzige Proportion hinreichend ist. Müssen aber zur Auffindung der unbekannten Größe mehrere Proportionen gebildet werden, oder muß zum genannten Zwecke die einfache goldene Regel mehrmals angewendet werden, so heißt sie zusammengesetzt, und zwar insbesondere die Regel von Fünfen (regula de quinque), von Sieben (regula de septem), von Neunen (regula de novem) u. s. w., je nachdem fünf, sieben, neun, ... Größen gegeben sind, oder je nachdem die einfache goldene Regel zwei, drei, vier ... mal angewendet werden muß.

Die Theilregel unterscheidet sich von der zusammengesetzten goldenen Regel dadurch, daß sie die einfache goldene Regel zur Auffindung verschiedener Zahlen mehrmals anwendet, die zusammengesetzte goldene Regel aber bloß zur Bestimmung einer und derselben Zahl. Die Theilregel lehrt, ein gegebenes Ganze in ungleiche Theile nach bestimmten Verhältnissen zu theilen.

A. Von der einfachen goldenen Regel.

§. 191.

Bei jeder Aufgabe über die einfache goldene Regel kommen vier Größen vor, wovon immer zwei und zwei von einerlei Art sein müssen. Ein Paar solcher Größen ist gegeben, von dem andern Paare aber ist nur eine gegeben, und die andere wird gesucht, an deren Stelle man einen der letzten Buchstaben des Alphabetes z, y, x ... setzt. Jene

Größe, welcher die Frage angehängt wird, heißt Fragglied, und die gesuchte Größe heißt das unbekannte Glied. Die Größen, welche von einerlei Art sind, werden am zweckmäßigsten immer in einem Verhältnisse zusammengestellt, und zwar in folgender Ordnung: Die Fragezahl bildet das zweite Glied, die gesuchte Zahl das vierte Glied der Proportion. Im ersten Gliede steht die mit der Fragezahl, und im dritten Gliede die mit der gesuchten Zal gleichartige Größe. Z. B. 9 Pfund Zucker kosten 8 fl., was (wie viel Gulden W. W.) kosten 6 Pfund? Hier setzt man

$$\begin{matrix} \text{U.} & & \text{U.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} \\ 9 & : & 6 & = & 8 & : & x. \end{matrix}$$

In dieser Proportion ist 6 Pfd. das Frageglied, und der Preis dieser 6 Pfd. das unbekannte Glied.

In der Anwendung schreibt man wegen der Bequemlichkeit statt

$a \div b = c \div d$ gewöhnlich $a : b = c : d$.

Die Regel de tri kann man auch rücksichtlich ihrer Anwendung in die gerade und umgekehrte eintheilen, je nachdem die Fragegröße und die gesuchte Zahl zwei homologe Glieder (§. 174) der Proportion bilden können oder nicht (§. 174 Zusatz).

Die Auflösung der Aufgaben über die goldene Regel ist im §. 177 enthalten, wobei rücksichtlich der Reduktion folgende Regel zu beobachten ist: Man stelle in der Proportion zwischen den Größen, welche von einerlei Art sind, jene Gleichartigkeit her, welche bei der Multiplikation und Division benannter Zahlen überhaupt erfordert wird (§. 164 und 165).

§. 192.

Erläuterung der Regel de tri durch Beispiele.

I. 3 Pfund Kaffee kosten 8 fl., was kosten 9 Pfund?

$$\begin{matrix} \text{U.} & & \text{U.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} \\ 3 & : & 9 & = & 8 & : & x \\ 1 & : & 3 & = & 8 & : & x \text{ (§. 181),} \end{matrix}$$

$$\text{also } x = 3 \,.\, 8 \text{ fl.} = 24 \text{ fl. (§. 177).}$$

Die Vorschrift zur Prüfung, ob der für x gefundene Werth der wahre sei, ist oben (§. 177) angegeben worden. Uebrigens könnte man

die Probe auch dadurch machen, daß man mit Hülfe der gefundenen vierten Proportionalzahl ein beliebiges anderes Glied, welches man als unbekannt annimmt, auf ähnliche Art sucht.

II. Die Räume freifallender Körper verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten (dieser Satz wird in der Naturlehre erwiesen). Wenn nun ein freigelassener Körper in der ersten Sekunde 15·597 rhein. Fuß tief fällt, in wie viel Zeit wird ein Körper von einer Höhe von 75 Klaftern herabfallen? Bezeichnet man die Räume mit s und S, und die entsprechenden Zeiten mit t und T, so erhält man

$$s : S = t^2 : T^2.$$

Weil nun $s = 15'.597$, $S = 75^{0}$, $t = 1''$ und $T = x$, so ist

$$15'.597 : 75^{0} = 1'' : x^2, \text{ oder}$$

$$2^{0}5995 : 75^{0} = 1'' : x^2, \text{ oder}$$

$$\sqrt{2{\cdot}5995} : \sqrt{75} = 1'' : x \text{ (§. 183, Zus. 2)},$$

$$\text{also } x = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2{\cdot}5995}} = \frac{8{\cdot}660254\ldots}{1{\cdot}612296\ldots} = 5''{\cdot}371\ldots$$

III. Wenn $3\frac{3}{5}$ Ellen Tuch mit 8 fl. 42 kr. bezahlt werden, wie hoch kommen $7\frac{7}{8}$ Ellen?

$$3\tfrac{3}{5} \text{ Ellen} : 7\tfrac{7}{8} \text{ Ellen} = 8 \text{ fl. } 42 \text{ kr.} : x \text{ fl. oder}$$

$$\tfrac{18}{5} \text{ Ellen} : \tfrac{63}{8} \text{ Ellen} = 8{\cdot}7 \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

$$8 . 18 : 63 = 8{\cdot}7 . 5 : x$$

$$8 . 2 : 7 = 43{\cdot}5 : x, \text{ also}$$

$$x = \frac{7 \times 43{\cdot}5}{16} = 304{\cdot}5 : 16 = 19{\cdot}03125 \text{ fl.},$$

d. i. $x = 19$ fl. 1 kr. $3\frac{1}{2}$ pf.

IV. Wenn die Wiener Mark 280·6494 Gramme wiegt, wie viel wiegen 3 Mark 12 Loth 2 Qtchn. $3\frac{1}{2}$ Pf.?

W.Mk.		W.M.	Loth.	Qt.	Pf.		Gr.		Gr.
1	:	3	12	2	$3\frac{1}{2}$	=	280·6494	:	x

(§. 161) 4	Pf.	3·5
4	Qt.	2·875
16	Loth	12·71875
	Mk.	3·79492...

	Mk.	Mk.	Gr.	Gr.
also	1 :	3·79492 =	280·6494· :	x

294973

84194820 (§. 101)
19645458
2525845
112260
25258
561

x = 1065·04202 Gramme
= 1·06504202 Kilogramme
= 1065042·02 Milligramme

V. 3 Ztr. 48 Pfund 23 Loth $2\frac{3}{4}$ Qt. von irgend einer Waare werden mit 97 fl. 36 kr: $3\frac{1}{2}$ pf. bezahlt; wie hoch kommt das Pfund zu stehen?

Ztr.	℔.	Loth	Qt.		℔.		fl.	kr.	pf.	
3	48	23	$2\frac{3}{4}$	:	1	=	97	36	$3\frac{1}{2}$	: x

Da hier im Resultate nur Kreuzer vorkommen können, so bringe man das dritte Glied auf die Benennung Kreuzer, das erste aber verwandle man in lauter Pfunde.

4	2·75	97 fl. 36 kr. 3·5 pf.
32	23·6875	60
	348·74023 . . .	5856·875 kr.

℔.		℔.		kr.		kr.
348·74023	:	1	=	5856·875	:	x

also x = 5856·875 : 348·74023 = 16·79 . . kr.
2369 ×4
277 3·16 pf.
33 (§. 103)
2

x = 16 kr. 3·16 pf.

VI. Wenn 100 fl. Kapital jährlich $6\frac{1}{2}$ fl. Interesse geben, wie viel geben 1300 fl. Kapital? Diese Aufgabe heißt mit andern Worten: „Wie viel Zins tragen 1300 fl. Kapital zu $6\frac{1}{2}$ Prozent (à $6\frac{1}{2}\%$) in einem Jahre?

$$\begin{array}{rl} & \text{fl.K.} \quad \text{fl.K.} \quad \text{Proz.} \\ & 100 : 1300 = 6\cdot5 : x \\ \text{oder} & 1 : 13 = 6\cdot5 : x \\ & 19\cdot5 \\ \hline & x = 84\cdot5 \text{ fl.} = 84 \text{ fl. } 30 \text{ kr.} \end{array}$$

VII. Wie groß muß ein Kapital sein, das zu 7% angelegt wird, damit es jährlich 580 fl. Interessen trägt?

$$\begin{array}{c} \text{fl.} \quad \text{fl.} \quad \text{fl.K.} \quad \text{fl.K.} \\ 7 : 580 = 100 : x \\ x = 58000 : 7 = 8285\tfrac{5}{7} \text{ fl.} \end{array}$$

VIII. A hat einen Wechsel zu 3000 fl., der auf B ausgestellt ist, und zwar erst nach 3 Monaten zahlbar. A hat das Geld sogleich nöthig, und B zahlt den Wechsel gegen 3% Abzug. Wie viel muß sich nun A von jener Summe abziehen lassen?

$$100 \text{ fl.} : 3000 \text{ fl.} = 3 : x$$
$$1 \text{ fl.} : 30 \text{ fl.} = 3 : x,$$

also $x = 90$ fl A empfängt daher nur $3000 - 90 = 2910$ fl.

Würde man hier die Proportion so bilden, daß man sagt: Wenn für 100 fl. nur $(100 - 3)$ fl. $= 97$ fl. bezahlt werden, wie viel ist für 3000 fl. zu zahlen? so hätte man $100 : 3000 = 97 : x$, also $x = 97.30 = 2910$ fl., und daher der Abzug $= 90$ fl. wie vorhin.

Würde man aber sagen: (für $100 + 3$) fl. $= 103$ fl. werden nur 100 fl. gezahlt, wie viel ist für 3000 fl. zu zahlen? so hätte man $103 : 3000 = 100 : x$, woraus $x = \frac{300000}{103}$ fl. $= 2912$ fl. $37\cdot3$ kr. gefunden wird, und demnach wäre der Abzug hier

$$= 3000 \text{ fl.} - 2912 \text{ fl. } 37\cdot3 \text{ kr.} = 87 \text{ fl. } 22\cdot7 \text{ kr.}$$

Dieser Abzug heißt Rabat oder Sconto oder Disconto, oder Escompte. — Die erste Verfahrungsart nennt man die Rechnung in Hundert, die zweite aber die Rechnung auf Hundert. Welche Verfahrungsart ist der Billigkeit angemessener?

IX. Kaufleute nennen das Gewicht der Fässer, Kisten, Umschläge u. s. w., oder das Gewicht der Emballage, welche mit der Waare selbst gewogen werden muß, Tara. Es sind hier zwei Fälle möglich, denn entweder kann die Waare aus der Emballage herausgenommen, und diese für sich gewogen werden; oder die Emballage muß nothwendig mit der Waare zugleich gewogen werden Im ersten

Falle zieht man vom Brutto- oder Sporco-Gewicht (d. i. vom Gewicht der Waare sammt der Emballage) das Gewicht der Emballage, oder die Tara ab, d. h. man tarirt die Waare, und berechnet den Preis des Unterschiedes beider Gewichte, d. i. des Netto-Gewichtes. Im andern Falle aber, wenn Sporco gezahlt werden muß, gibt der Verkäufer einige Pfunde auf den Zentner zu, welches man die Tara auf den Zentner, oder auf Hundert nennt, oder er läßt sich vom Zentner einige Pfunde abziehen, und dieses nennt man die Tara von dem Zentner, oder die Tara in Hundert. Bezeichnet man den Preis eines Pfundes mit m fl., das Brutto-Gewicht mit A ℔., und setzt man das Gewicht der Emballage = B ℔., so ist der Preis des Netto-Gewichtes = (A — B) . m fl. Im andern Falle aber wird das Netto-Gewicht nicht bestimmt; sondern man sagt bei der Tara auf Hundert: (100 Pfund + Tara) kommen eben so hoch zu stehen, als 100 Pfd. netto; und bei der Tara von Hundert: 100 Pfd. sporco kosten eben so viel (100 — Tara) Pfund netto.

Gutgewicht ist der Ersatz für den Schaden, welcher dem kleinen Kaufmanne oder Detail-Händler durch den Transport und das Auswägen der Waare erwächst.

Fusti ist der Abzug für das Unreine, und Refactie der Abzug für beschädigte Waaren.

Decort ist der Abzug am Betrag der Waare als Ersatz für den Schaden, den man durch Verschulden des Versenders erleidet.

Besemschon ist der Abzug für dasjenige, was beim Zucker nicht rein aus der Kiste gebracht wird.

Beispiele.

1. Ein Kaufmann erhielt 5 Ztr. 70 Pfd. Kaffee brutto, den Zentner netto à 225 fl. W. W. Wie viel hat er zu zahlen, wenn die Kiste 30 Pfund wiegt?

5 Ztr. 70 Pfd. — 30 Pfd. = (570 — 30) Pfd. = 540 Pfd. netto.

℔. ℔. fl. fl.
also 100 : 540 = 225 : x

woraus x = 1215 fl. W. W. gefunden wird.

2. Wenn der Zentner Häringe Netto-Gewicht 72 fl. W. W. kostet, wie hoch kömmt eine Tonne von 580 Pfd. brutto, die Tara = 10 Pfd. gesetzt?

Rechnet man in Hundert, so findet man die ganze Tara durch die Proportion:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pfd. br.} & & \text{Pfd. br.} & & \text{Pfd. Tara.} & & \text{Pfd.} \\ 100 & : & 580 & = & 10 & : & x \end{array}$$

also $x = 58$ Pfund, demnach das Netto-Gewicht

$= (580 - 58)$ Pfund $= 522$ Pfund.

Das Netto-Gewicht findet man kürzer durch die Proportion

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pfd. br.} & & \text{Pfd. br.} & & \text{Pfd. n.} & & \text{Pfd. n.} \\ 100 & : & 580 & = & 90 & : & x, \end{array}$$

folglich $x = 522$ Pfund netto.

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{℔.} & & \text{℔.} & & \text{fl.} & & \text{fl.} \\ \text{Also} & 100 & : & 522 & = & 72 & : & x \end{array}$$

und $x = 375{\cdot}84$ fl. W. W. $= 375$ fl. $50{\cdot}4$ kr.

Berechnet man dieses Beispiel mit der Tara auf Hundert, so findet man das Netto-Gewicht durch die Proportion

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pfd. br.} & & \text{Pfd. br.} & & \text{Pfd. n.} & & \text{Pfd.} \\ 110 & : & 580 & = & 100 & : & y, \text{ also} \end{array}$$

$y = \frac{5800}{11} = 527\frac{3}{11}$ Pfd., daher 100 Pfd. n. : $\frac{5800}{11}$ Pfd. n. $= 72$ fl. : x fl.

oder $11 : 58 = 72 : x$

mithin $x = 4176 : 11 = 379\frac{7}{11}$ fl. W. W.

Bei der Tara auf Hundert gewinnt demnach der Verkäufer, und der Käufer verliert, Diesem ist aber die Tara in Hundert vortheilhafter.

X. Ein Kaufmann hat S Stücke einer Waare gekauft, und für m Stücke à fl. bezahlt. Wie viel gewinnt oder verliert der Kaufmann, wenn er n Stücke um b fl. verkauft?

Da m Stücke a fl. kosten, so kömmt 1 Stück auf $\frac{a}{m}$ fl., folglich die S Stücke auf $S \cdot \frac{a}{m}$ fl. Er verkauft aber n Stücke um b fl., also 1 Stück um $\frac{b}{n}$ fl., und S Stücke um $S \cdot \frac{b}{n}$ fl.

Ist nun in dem Ausdrucke

$$S \cdot \frac{b}{n} - S \cdot \frac{a}{m} = S\left(\frac{b}{n} - \frac{a}{m}\right) = S\left(\frac{bm - an}{mn}\right)$$

das Produkt $bm > an$, z. B. $bm - an = d$, so bezeichnet er den Gewinn für das Ganze. Ist aber $bm < an$, z. B. $bm - an = -\delta$,

also $an - bm = \delta$, so wird durch jene Formel der Verlust für das Ganze ausgedrückt.

Z. B. Ein Kaufmann kauft ein Stück Tuch von 30 Ellen, und zwar kommen ihm 4 Ellen auf 37 fl. Wenn er nun 6 Ellen um 57 fl. 30 kr. verkauft, wie viel gewinnt er im Ganzen; und wie viel an jeder Elle?

Hier ist

$$S = 30,\ m = 4,\ a = 37,\ n = 6,\ b = 57\tfrac{1}{2} = 57\cdot 5,$$

also

$$S\left(\frac{bm - an}{mn}\right) = 30\left(\frac{57\cdot 5 \times 4 - 37 \times 6}{4 . 6}\right) \text{fl.} = \frac{30.8}{4 . 6} \text{fl.} = 10 \text{ fl.}$$

Der Gewinn per Elle ist

$$\frac{b}{n} - \frac{a}{m} = \left(\frac{57\cdot 5}{6} - \frac{37}{4}\right) \text{fl.} = \frac{8}{4 . 6} \text{fl.} = \tfrac{1}{3} \text{fl.} = 20 \text{ kr.}$$

XI. Wenn man zur Aushebung eines Grabens, der 50 Fuß lang ist, 3 Tage braucht, wie viel Zeit wird unter gleichen Umständen zur Aushebung eines Grabens von 465 Fuß erfordert?

$$50' : 465' = 3\,\text{T} : x\,\text{T}$$
$$10 : 93 = 3 : x,$$

wo $x = 27\cdot 9$ Tagen

XII. Zur Vollendung irgend einer Arbeit haben 6 Arbeiter 14 Tage nöthig; in wie viel Tagen werden 15 Arbeiter dieselbe Arbeit verrichten?

Je mehr Arbeiter vorhanden sind, desto weniger Zeit wird zur Vollendung einer und derselben Arbeit erfordert, also stehen die Arbeiter mit den Zeiten im umgekehrten Verhältnisse (§. 174, Zus.); man setze demnach

$$\begin{array}{cccc} \text{Arb.} & \text{Arb.} & \text{T.} & \text{T.} \\ 15 : & 6 = & 14 : & x \end{array}$$

wo $x = \frac{2 . 14}{5} = 5\frac{3}{5}$ Tagen.

Es ist nämlich das Verhältniß der Arbeiter $6 \div 15$ ein steigendes Verhältniß; das Verhältniß der entsprechenden Zeiten $14 \div x$ aber ist ein fallendes Verhältniß, weil der Natur der Sache gemäß $x < 14$ sein muß, und daher ist das erste Verhältniß umgekehrt dem letztern gleich zu setzen.

XIII. Ein Bothe braucht zur Erreichung eines bestimmten Ortes 8 Tage, wenn er täglich 5 Meilen zurücklegt. In wie viel Zeit wird er zurückkommen, wenn er nun täglich 6 Meilen macht?

Es ist einleuchtend, daß ein bestimmter Weg in desto weniger Tagen zurückgelegt werde, je mehr Meilen man täglich macht; also sind die durchlaufenen Räume den Zeiten umgekehrt proportional. Man setze daher

$$\begin{matrix} \text{M.} & & \text{M.} & & \text{T.} & & \text{T.} \\ 6 & : & 5 & = & 8 & : & x \end{matrix}$$

$x = \frac{20}{3}$ Tage $= 6\frac{2}{3}$ Tage.

XIV. Es braucht jemand zu einem Kleide 4 Ellen $\frac{7}{4}$ breiten Zeug; wie viel Ellen $\frac{9}{4}$ breiten Zeug hat derselbe zu einem Kleide nöthig?

Je breiter der Zeug ist, desto weniger lang braucht er zu demselben Zwecke zu sein, oder die Breite steht mit der Länge im umgekehrten Verhältnisse. Man setze also:

$$\tfrac{9}{4} : \tfrac{7}{4} = 4 : x \text{ oder}$$
$$9 : 7 = 4 : x,$$

wo $x = \frac{28}{9}$ Ellen $= 3\frac{1}{9}$ Ellen.

XV. Ein Kapital K wird zu p Procente ($p\%$) auf eine bestimmte Zeit, z. B. $\frac{m}{n}$ Jahre, ausgeliehen; wie groß ist nach Ablauf dieser Zeit jenes Kapital sammt Zinsen?

Bezeichnen wir die Interessen oder Zinsen für die bestimmte Zeit durch Z und Kapital sammt Zinsen durch C; so ist, weil

$$\alpha)\ Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{n} = K \cdot \frac{mp}{n \cdot 100}, \text{ offenbar}$$

$$\beta)\ C = K + Z = K\left[1 + \frac{mp}{n \cdot 100}\right],$$

denn wenn 100 fl. Kapital p fl. Interessen in einem Jahre bringen, so gibt 1 fl. Kap. nur $\frac{p}{100}$ fl. Interessen in 1 Jahre, mithin $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{100}$ fl. in $\frac{m}{n}$ Jahren, und demnach geben K fl. Kapital $K \cdot \frac{mp}{n \cdot 100}$ fl. Interessen in $\frac{m}{n}$ Jahren.

Aus den Gleichungen α und β folgt:

$$\gamma)\ K = \frac{100\,Z}{p} \cdot \frac{n}{m} = \frac{C}{1 + \frac{mp}{n \cdot 100}},$$

$$\delta)\ p = \frac{100\,Z}{K} \cdot \frac{n}{m} = \frac{100\,(C - K)}{K} \cdot \frac{n}{m},$$

$$\varepsilon)\ \frac{m}{n} = \frac{100\,Z}{p \cdot K} = \frac{100 \cdot (C - K)}{p \cdot K}.$$

Mittels dieser Gleichungen läßt sich jede hieher gehörige Frage beantworten. Werden die Zinsen nach Tagen berechnet, so muß man $n = 365$ setzen, allein wegen der Bequemlichkeit oder wegen des Gebrauches setzen Kaufleute $n = 360$ und rechnen demnach den Monat im Durchschnitte zu 30 Tagen. Zur Erläuterung dieser Formeln mögen folgende Beispiele dienen.

1. Wie viel Zinsen bringt ein zu 5% angelegtes Kapital von 4800 fl. in 8 Monaten?

Hier ist $Z = 4800 \,.\, \frac{5}{100} \,.\, \frac{8}{12}$ fl. $= 4 \,.\, 5 \,.\, 8$ fl. $= 160$ fl.

2. A sollte am 1. Mai 1800 fl. zahlen, zahlt aber erst am 15. Juni desselben Jahres, mithin um 45 Tage später; wie viel hat nun A zu berichtigen, wenn 6% Verzugszinsen gerechnet werden?

Hier ist

$$C = 1800 \,.\, \left[1 + \frac{45 \,.\, 6}{360 \,.\, 100}\right] = 1800 \,.\, 1{\cdot}0075 \text{ fl.} = 1813{\cdot}5 \text{ fl.}$$
$$= 1813 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}$$

3. A blieb von einem Kaufschillinge 12000 fl. schuldig, welche er mit 4% zu verzinsen hatte; nach Verlauf einer bestimmten Zeit zahlte A zur Tilgung jener Schuld sammt Zinsen die Summe von 12600 fl., wann hat also A gezahlt?

Hier ist

$$\frac{m}{n} = \frac{100 \,.\, (12600 - 12000)}{4 \,.\, 12000} = \frac{100 \,.\, 600}{4 \,.\, 12000} = \tfrac{5}{4} \text{ Jahren} = 1 \text{ Jahr } 3 \text{ Monat.}$$

4. Es zahlt Jemand 7236 fl., um ein Kapital von 6480 fl., welches bereits vor $2\frac{1}{2}$ Jahren fällig war, sammt Interessen abzutragen; wie viel Prozente wurden gerechnet?

Hier ist

$$p = \frac{100\,[7236 - 6480]}{6480} \,.\, \frac{2}{5} = \frac{100 \,.\, 756}{6480} \,.\, \frac{2}{5} = 4\tfrac{2}{3} \text{ Prozent.}$$

5. Es zahlte Jemand eine Schuld um 205 Tage später, als sie fällig war, und da er 6% Verzugszinsen vergüten mußte, so hatte er im Ganzen 2482 fl. zu zahlen; wie viel betrug also jene Schuld?

Hier ist

$$K = \frac{2482}{1 + \frac{205}{360} \,.\, \frac{6}{100}} = \frac{2482}{1 + \frac{0{\cdot}205}{6}} = 14892 : 6{\cdot}205 = 2400 \text{ fl.}$$

Die mannigfaltigen praktischen Vortheile, welche bei diesen Rechnungen in Anwendung kommen, überlassen wir dem mündlichen Vortrage.

Einiges von der sogenannten wälschen Praktik.

§. 193.

Praktik ist ein griechisches Wort (von πράκτικος), welches im allgemeinsten Sinne das bedeutet, was zu einer Handlung gehört, im engern Sinne aber eine Fertigkeit in Verrichtung eines Geschäftes, im Handeln überhaupt bezeichnet. Die Praktik ist also im arithmetischen Sinne eine Fertigkeit, vorkommende Aufgaben möglichst kurz zu berechnen; oder eigentlich, sie ist der Inbegriff von Regeln, nach welchen möglichst kurz und vortheilhaft vorkommende Aufgaben gelöst werden können; sie enthält also alle Rechnungsvortheile. Die gewöhnlichen Rechenmeister nehmen sie in viel zu enger Bedeutung, indem sie bloß von einer Praktik bei Auflösung der Aufgaben über die einfache Regel de tri sprechen, und zwar vorzüglich nur dann, wenn das erste Glied der Proportion die Einheit, oder eine Potenz von 10 ist; wo sie demnach nur die Multiplikation erleichtern lehrt. — In den meisten Fällen wird derjenige, welcher mit Decimalbrüchen gehörig rechnen kann, das Resultat schneller und sicherer finden, als der sogenannte Praktiker, welcher nicht selten ein Dutzend Divisionen vorzunehmen hat, und am Ende eine Menge Posten addiren muß, um seinen Zweck zu erreichen. Er hat also bei allen seinen Vortheilen weit mehr Gelegenheit zu fehlen, als jener, der mit Decimalbrüchen rechnet. — Uebrigens hat die Praktik öfters Vorzüge. Dieß aber in vorkommenden Fällen zu entscheiden, dazu gehört eigentliche Praktik, d. i. Uebung. — Allgemeine Regeln kann die Praktik nicht aufstellen, denn es wird ein durch Uebung erworbener Scharfsinn erfordert, um bei vorkommenden speciellen Fällen beurtheilen zu können, wie die Aufgabe am kürzesten und also am zweckmäßigsten zu behandeln sei. — Der Handel blühte früher in Italien, als in Deutschland, und daher auch die damit in Verbindung stehenden Hülfswissenschaften. Aus diesem Grunde heißt die Praktik die wälsche oder italienische.

Die vorzüglichsten Regeln, welche man in der sogenannten Praktik gibt, sind folgende:

I. Wenn der Werth der Einheit, oder ihres 10, 100, 1000... fachen in Kreuzern gegeben ist, und diese sind ein aliquoter Theil eines Gulden, so verwandelt sich die Multiplikation in eine einfache Division. Z. B.

$$1 \text{ Pfd.} : 728 \text{ Pfd.} = 20 \text{ kr.} : x \text{ kr.}$$

$$x = 728 \times 20 \text{ kr.} = 728 \cdot \tfrac{1}{3} \text{ fl.} = 242 \text{ fl. } 40 \text{ kr.}$$

II. Ist der Werth der Einheit in Kreuzern gegeben, und sind diese theilbar durch 6, so multiplicire man die Quantität, deren Werth gesucht wird, mit dem erhaltenen Quotienten. Dieses Produkt, dessen erste Ziffer rechts eine Decimale ist, bezeichnet das verlangte Resultat in Gulden. Z. B.:

1 Elle : 372 Ellen = 54 kr. : x kr.

x = 372 × 54 kr. = 372 × ·9 fl. = 334·8 fl. = 334 fl. 48 kr.

III. Brüche, deren Zähler > 1, und deren Nenner keine Primzahlen sind, sucht man in kleinere Bruchtheile mit dem Zähler 1 zu zerlegen, so daß sich einer aus dem andern berechnen läßt; z. B.:

$$\tfrac{3}{4} = \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{3}{8} = \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4};\ \tfrac{5}{8} = \tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2};$$

$$\tfrac{7}{8} = \tfrac{4}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.2};\ \tfrac{4}{9} = \tfrac{1}{3} + \frac{1}{3.3}$$

$$\tfrac{5}{12} = \tfrac{1}{3} + \frac{1}{3.4};\ \tfrac{7}{12} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.6} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4};\ \tfrac{13}{16} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16};\ \text{u. s. w.}$$

Brüche von der Form $\frac{n \pm 1}{n}$ löst man auf in $1 \pm \frac{1}{n}$. Z. B.

$$\tfrac{3}{4} = 1 - \tfrac{1}{4};\ \tfrac{6}{5} = 1 + \tfrac{1}{5};\ \text{u. s. w.}$$

Beispiele.

a. Wenn 1 Pfd. Garn 3 fl. 30 kr., oder 3·5 fl. W. W. kostet, wie hoch kommen 6⅞ Pfd.?

1 Pfd. : 6⅞ Pfd. = 3·5 fl. : x fl.
21·0 Preis von 6 Pfd.
1·75 „ „ $\tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}$ Pfd.
0·875 „ „ $\tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}$ Pfd.
0·4375 „ „ $\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}$ Pfd.
x = 24·0625 fl. = 24 fl. 3¾ kr.

b. Was kosten $\tfrac{8}{9}$ Ellen, wenn 1 Elle 48 kr. kostet?

1 Elle : $\tfrac{8}{9}$ Ellen = 48 kr. : x kr.
— 5⅓ kr. = Preis von $\tfrac{1}{9}$ Elle
42⅔ kr.

c. 1 Pfund : $\tfrac{5}{4}$ Pfund = 6 fl. : x
+ 1 „ 30 kr. = Preis von ¼ Pfd.
x = 7 „ 30 kr. . . . (1 + ¼) Pfd.

IV. Wenn der Preis der Einheit kein aliquoter Theil eines Gulden oder Kreuzers ist, so zerlege man ihn in solche aliquote Theile. Z. B.:

1 Pfd. : 1074 Pfd. = 37 kr. : x kr.

537   30 kr. = $\frac{1}{2}$ fl.

107·4   + 6 kr. = $\frac{1}{10}$ fl.

17·9   + 1 kr. = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}$ fl.

662·3 fl. = 662 fl. 18 kr.

oder auch

1 Pfd. : 1074 Pfd. = 37 kr. : x

358   20 kr. = $\frac{1}{3}$ fl.

179   + 10 kr. = $\frac{1}{2}$. 20 kr.

89·5   + 5 kr. = $\frac{1}{2}$. 10 kr.

35·8   + 2 kr. = $\frac{1}{10}$. 20 kr.

x = 662·3 fl. = 662 fl. 18 kr.

V. Ist die Quantität, deren Preis gesucht wird, ein aliquoter Theil, oder ein Vielfaches der Einheit oder der Größe, deren Preis gegeben ist, so nimmt man von diesem denselben aliquoten Theil, oder dasselbe Vielfache. Z. B.:

1 Ztr. : 50 Pfd. = 247 fl. 20 kr. : x, weil 50 Pfd. = $\frac{1}{2}$ Ztr.

so ist x = 123 fl. 40 kr.

Eben so, wenn 3 Pfd. : 15 Pfd. = 17 fl. 24 kr. : x,

so ist 1 „ : 5 „ = 17 „ 24 kr. : x

x = 87 fl.

VI. Wenn der Quantität, deren Werth gesucht wird, noch ein aliquoter Theil der nächst höhern Einheit als Ergänzung zu dieser fehlt, so ziehe man das Produkt aus diesem aliquoten Theil in den gegebenen Werth von diesem ab. Z. B.:

1 Ztr. : 75 Pfund = 139 fl. 48 kr. : x oder

1 Ztr. : (1 — $\frac{1}{4}$) Ztr. = 139 „ 48 „ : x

— 34 „ 57 „

x = 104 fl. 51 kr.

VII. Ist die Quantität, deren Preis gesucht wird, weder ein Vielfaches, noch ein aliquoter Theil der Quantität, deren Preis gegeben ist und ist die Ergänzung zur nächst höhern oder nächst niedrigern

Einheit auch kein aliquoter Theil derselben; so zerlege man die Quantität, deren Werth gesucht wird, in solche aliquote Theile. Z. B.:

α) 1 Ztr. : 47 Pfund = 128 fl. 56 kr. : x

25 Pfd.	$\frac{1}{4}$ Ztr.	32 fl. 14 kr.
20 „	$\frac{1}{5}$ Ztr.	25 „ 47·2
2 „	$\frac{1}{10}$ von $\frac{1}{5}$ Ztr.	2 „ 34·72
		60 fl. 35·92.

β) 1 Eimer : 27 Maß = 57 fl. : x

20	$\frac{1}{2}$ Eimer	28 fl. 30 kr.
5	$\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{2}$ E.	7 „ 7·5
2	$\frac{1}{10}$ von $\frac{1}{2}$ E.	2 „ 51.
		x = 38 fl. 28·5 kr.

VIII. Ist die Quantität, deren Preis gesucht wird, mehrnamig, und die Zahl unter der höchsten Benennung ist mit der Einheit, deren Werth gegeben ist, gleichnamig; so sucht man zuerst den Preis für die Quantität unter der höchsten Benennung, und dann zerlegt man die Quantitäten unter den übrigen Benennungen in aliquote Theile der nächst höhern, und bestimmt ihren Werth nach den vorhergehenden Regeln. Z. B.:

1 Ztr. : 6 Ztr. 86 Pfd. 20 Loth = 213 fl. 24 kr. : x

	6 Ztr.	. . . .	1280 fl. 24 kr.
86 Pfund =	50 Pfd.	$\frac{1}{2}$ Ztr.	106 „ 42
	25 „	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ Ztr. . . .	53 „ 21
	10 „	$\frac{1}{10}$ Ztr.	21 „ 20·4
	1 „	$\frac{1}{10}$ von $\frac{1}{10}$ Ztr. .	2 „ 8·04
20 Loth	16 Loth	$\frac{1}{2}$ Pfd.	1 „ 4·02
	4 „	$\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{2}$ Pfd. .	— „ 16·005
		x =	1465 fl. 15·465 kr.

IX. Wenn die Quantität, deren Werth gesucht wird, einen Bruch bei sich hat, so sucht man erst den Preis für die Ganzen, und dann für die Bruchtheile, indem man sie in aliquote Theile der Einheit zerlegt, und eben solche Theile vom Werthe der Einheit nimmt. Z. B.:

1 Pfd. : $593\frac{5}{8}$ Pfd. = 3 fl. 19 kr. : x fl.
1779 . . . . . 3 „
118 — 36 kr. 12 kr. = $\frac{1}{5}$ fl. ⎫
59 — 18 . . 6 kr. = $\frac{1}{10}$ „ ⎬ = 19 kr.
9 — 53 . . 1 kr. = $\frac{1}{6}$. 6 kr. ⎭
1 — 39·5 Preis von $\frac{1}{2}$ Pfd. ⎫
— — 24·875 . . . $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$ Pfd. ⎭ = $\frac{5}{8}$ Pfd.
x = 1968 fl. 51·375 kr.

X. Haben beide mittlere Glieder Brüche bei sich, so verwandle man den Bruch in dem einen Gliede in Einheiten der niedrigern Benennungen, oder besser in einen Decimalbruch, und verfahre nach den bisherigen Regeln. Das vorige Beispiel würde also einfacher auf folgende Art berechnet:

a) 1 Pfd. : $593\frac{5}{8}$ Pfd. = 3 fl. 19 kr. : x fl.
1 Pfd. : 593·625 = 3 „ 19 „ : x „
× 3
1780·875 19 kr.
148·40625 . . . 15 kr. = $\frac{1}{4}$ fl.
29·68125 . . . 3 kr. = $\frac{1}{5}$. 15 kr.
9·89375 . . . 1 kr. = $\frac{1}{3}$. 3 kr.
1968·85625 fl. = 1968 fl. 51 kr. $1\frac{1}{2}$ pf.
60
51·375 . .
× 4
1·5 . .

b) 1 Pfd. : $806\frac{13}{16}$ Pfd. = $4\frac{3}{4}$ fl. : x fl.
Oder 1 Pfd. : $806\frac{13}{16}$ Pfd. = (5 — $\frac{1}{4}$) fl. : x fl.
4030 fl.
— 201 „ 30 kr.
3828 fl. 30 kr. Preis von 806 Pfd.
+ 2 „ 22·5 „ „ $\frac{8}{16}$ „
1 „ 11·25 „ „ $\frac{4}{16}$ „
— „ 17·81 „ „ $\frac{1}{16}$ „
x = 3832 fl. 21·56 kr.

Oder 1 Pfd. : 806·8125 Pfd. = 4 fl. 45 kr. : x
4
3227 2500 das Pfund à 4 fl.
403·4062 „ „ à 30 kr. = $\frac{1}{2}$ fl.
201·7031 „ „ à 15 kr. = $\frac{1}{2}$. 30 kr.
3832·3593 fl.
60
21·558 . kr.

XI. Wenn das erste Glied der Proportion weder 1, noch eine Potenz von 10 ist, so suche man dasselbe auf die Einheit zu bringen, und verfahre dann wie bisher. Z. B.

1) 420 St. : 354 St. = 756 fl. : x fl.
70 : 59 = 756 : x
10 : 59 = 108 : x
1 : 5·9 ·· = 108 : x
472
x = 637·2 fl. = 637 fl. 12 kr.

2) 15 E. : 23 E. = 40 fl. 45 kr. : x
3 : 23 = 8 fl. 9 kr. : x
1 : 7·666 = 8 fl. 9 kr. : x
61·333 . . . 8 fl.
0·767 . . . 6 kr. = $\frac{1}{10}$ fl.
0·383 . . . 3 kr. = $\frac{1}{2}$. 6 kr.
62·483 fl.
× 60, also x = 62 fl. 29 kr. beinahe
28·98 . kr.

XII. Man verwechselt auch öfters die Benennungen der mittlern Glieder in der Proportion, je nachdem sich das eine derselben schicklicher in einen Bruchtheil höherer Ordnung verwandeln läßt, als das andere. Z. B.:

1) Anstatt 1 Pfd. : 60 Pfd. = 29 kr. : x kr. setze man
1 Pfd. : 29 Pfd. = 60 kr. : x kr. oder
1 Pfd. : 29 Pfd. = 1 fl. : x fl.,
wo x = 29 fl. gefunden wird.

2) 1 Elle : 15 Ellen = 47 kr. : x kr.
1 Elle : 47 Ellen = 15 kr. . x kr.
1 Elle : 47 Ellen = $\frac{1}{4}$ fl. : x fl.,
also x = $\frac{47}{4}$ fl. = 11 fl. 45 kr.

B. Von der zusammengesetzten goldenen Regel.

§. 194.

Erste Methode, die hierher gehörigen Aufgaben aufzulösen.

Um Aufgaben von der Art, wo die unbekannte Größe mit der ihr gleichartigen durch mehrere Bestimmungen ausgedrückt wird, d. i. um Aufgaben über die zusammengesetzte Regel de tri aufzulösen, hat

man verschiedene Methoden erfunden. Die erste Methode besteht in einem wiederholten Anwenden der einfachen Regel de tri, welche für den Anfänger die schwierigste zu sein scheint. Wir wollen uns dieser Methode zur Auflösung folgender Aufgabe bedienen.

Wenn 45 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, in 15 Tagen 360 Ellen von irgend einem Zeuge verfertigen (Bedingungssatz); in wie viel Tagen (x) werden 30 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, 120 Ellen desselben Zeuges verfertigen (Fragesatz)?

a) Man untersuche zuerst, wie viel Tage die 30 Arbeiter nöthig haben, um dieselbe Arbeit zu verrichten, welche die 45 Arbeiter in 15 Tagen vollenden, mit der Voraussetzung, daß sie mit letztern täglich gleichviel Stunden arbeiten. Die Antwort auf diese Frage liegt in der Proportion

30 Arb. : 45 Arb. = 15 T. : z T.;

denn je mehr Arbeiter zur Verrichtung desselben Geschäftes verwendet werden, desto weniger Zeit wird (unter gleichen Umständen) hierzu erfordert, demnach mußte das Verhältniß 45 : 30 umgekehrt werden.

b) Nun frage man so: Wenn 30 Arbeiter zur Verfertigung von 360 Ellen z Tage nöthig haben, indem sie täglich 8 Stunden arbeiten, wie viel Tage brauchen sie unter derselben Voraussetzung zur Verfertigung von 120 Ellen. Man setze nämlich:

360 Ell. : 120 Ell. = z T. : y T.;

denn je weniger Ellen, desto weniger Zeit wird erfordert.

c) Da es hier aber auch auf die Anzahl von Stunden mit ankömmt, um x richtig bestimmen zu können, so setze man endlich:

10 St. : 8 St. = y T. : x T.

Denn da sich die Anzahl der Tage vermindert, wenn sich die Anzahl der täglichen Arbeitsstunden vermehrt, so mußte das Verhältniß 8 : 10 umgekehrt werden. Unserer Proportion liegt nämlich die Frage zum Grunde: Wie viel Tage haben 30 Arbeiter zur Verfertigung von 120 Ellen nöthig, indem sie täglich 10 Stunden arbeiten, wenn sie jene 120 Ellen, bei 8 Arbeitsstunden, in y Tagen fertig bringen?

Wir haben demnach folgende Proportionen:

$$\begin{array}{rcl} 30 : 45 = 15 : z & \text{oder} & 2 : 3 = 15 : z \\ 360 : 120 = z : y & \text{oder} & 3 : 1 = z : y \\ 10 : 8 = y : x & \text{oder} & 5 : 4 = y : x \\ \hline \end{array}$$

also 30 . 360 . 10 : 45 . 120 . 8 = 15 : x oder 2 . 3 . 5 : 3 . 1 . 4 = 15 : x (§. 183), wo x = 6 gefunden wird.

§. 195.

Zweite Methode, Aufgaben dieser Art zu lösen.

Zur leichtern Uebersicht wollen wir die Aufgabe des vorigen Paragraphen allgemein so stellen: Wenn A (= 45) Arbeiter, die täglich B (= 8) Stunden arbeiten, in C (= 15) Tagen D (= 360) Ellen von irgend einem Zeuge verfertigen: in wie viel (x) Tagen werden a (= 30) Arbeiter, die täglich b (= 10) Stunden arbeiten, d (= 120) Ellen desselben Zeuges verfertigen?

Auf ähnliche Art, wie oben, findet man

$$\begin{array}{rcccccc} & a & : & A & = & C & : z \\ & D & : & d & = & z & : y \\ & b & : & B & = & y & : x \\ \hline \text{also} & a.D.b & : & A.d.B & = & C & : x, \end{array}$$

woraus $x = \frac{C \,.\, A \,.\, d \,.\, B}{a \,.\, D \,.\, b}$ (§. 177) gefunden wird. Berücksichtigt man hier die Bildung dieses Bruches, durch welchen der Werth der gesuchten Zahl dargestellt wird, so ergibt sich Folgendes: 1) Im Zähler dieses Bruches kömmt aus dem Fragesatze nur die Größe d vor, deren multiplikatives Wachsen oder Abnehmen auch das multiplikative Wachsen oder Abnehmen der gesuchten Zahl x nach sich zieht. 2) Im Nenner jenes Bruches erscheinen aus dem Fragesatze jene Größen, mit deren multiplikativem Wachsen oder Abnehmen ein multiplikatives Abnehmen oder Wachsen von x verbunden ist. 3) Die Größen aus dem Bedingungssatze sind entweder Faktoren des Zählers oder Nenners, je nachdem die ihnen entsprechenden Größen des Fragesatzes Faktoren des Nenners oder Zählers sind. 4) Die mit x gleichartige Größe C des Bedingungssatzes erscheint als Faktor des Zählers.

Zur festern Ueberzeugung von der Allgemeinheit der hier aufgezählten Gesetze wollen wir noch folgende Aufgabe nach dem vorigen Paragraphe auflösen. — Wenn A Menschen, die täglich B Stunden arbeiten, in C Tagen einen Graben von D Fuß Länge, E Fuß Breite und F Fuß Tiefe ausheben; in wie viel (x) Tagen werden a Arbeiter, die täglich b Stunden arbeiten, einen Graben fertig bringen, der d Fuß lang, e Fuß breit und f Fuß tief ist?

1) Vergleicht man zuerst die Größen A, a und C, z, wo z mit C gleichnamig sein soll, so wird man einsehen, daß $z \gtrless C$ werde, wenn $a \lesseqgtr A$ wird. Setzt man also alle übrigen Größen gleich, so ist $a : A = C : z$.

2) Durch Vergleichung der Größen B, b und z, y, wo wieder y mit z gleichartig, erhält man aus dem vorhin angeführten Grunde $b : B = z : y$, wenn man die übrigen Größen nicht berücksichtigt, oder vielmehr dieselben beziehungsweise einander gleich gesetzt denkt.

3) Da ferner das Wachsen von d auch das Wachsen der mit y gleichartigen Größe v nach sich zieht, und umgekehrt, so ist $D : d = y : v$.

4) Eben so wird, unter sonst gleichen Umständen, der Werth von x um so größer oder kleiner werden, je größer oder kleiner e wird. Setzt man nun jenen Werth von $x = w$, so ist $E : e = v : w$.

5) Eben so findet man durch eine leichte Vergleichung, daß, alles Uebrige gleich gesetzt, die Tiefen F und f mit den Zeiten w und x im geraden Verhältnisse stehen, oder daß $F : f = w : x$.

Wir haben also die Proportionen:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a & : & A & = & C & : & z \\
b & : & B & = & z & : & y \\
D & : & d & = & y & : & v \\
E & : & e & = & v & : & w \\
F & : & f & = & w & : & x \\
\hline
\end{array}
$$

und $abDEF : ABdef = C : x$,

daher $x = \frac{C \cdot ABdef}{abDEF}$, oder $x \cdot abDEF = CABdef$,

welcher Ausdruck genau nach den obigen Regeln gebildet ist.

Schreibt man nun die letzte Gleichung so, daß die Faktoren des ersten Gliedes links, und die Faktoren des zweiten Gliedes rechts in vertikalen Richtungen unter einander zu stehen kommen, und sondert man beide Columnen durch eine Linie ab, so erhalten wir zur Auflösung dieser und ähnlicher Aufgaben folgende praktische Regel, welche (nach ihrem Erfinder) die Reesische genannt wird.

Schema.

$$
\begin{array}{r|l}
x & C \\
a & A \\
b & B \\
D & d \\
E & e \\
F & f \\
\hline
mx = & p
\end{array}
$$

Man ziehe eine Vertikallinie, setze links oben die gesuchte Zahl x an, und ihr gegenüber die mit ihr gleichartige C. Alsdann beurtheile

man bei jeder Größe des Fragesatzes einzeln ob, alles Uebrige gleichgesetzt, ihre Vervielfachung auch ein Vielfaches, oder nur einen aliquoten Theil der gesuchten Zahl zur Folge habe, und schreibe dann im ersten Falle jene Zahl des Fragesatzes rechter Hand vom Vertikalstriche an, die ihr entsprechende aus dem Bedingungssatze aber linker Hand. Im andern Falle aber verfährt man umgekehrt. Dividirt man endlich das Produkt p der rechts stehenden Zahlen durch das Produkt m der links stehenden, so gibt der Quotient die gesuchte Zahl $x = \frac{p}{m}$.

Anmerkung. Aus den vorhergehenden Sätzen leuchtet von selbst ein, daß, wenn man das Produkt der links stehenden bekannten Zahlen mit m, und jenes der rechts stehenden mit p bezeichnet, $mx = p$ sein müsse. Dividirt man beide Größen mit m, so ist $x = \frac{p}{m}$.

Da die Columne rechter Hand die Faktoren des Dividends enthält, und das Produkt der Faktoren linker Hand den Divisor bildet, so erhellt von selbst, daß man die Faktoren auf der einen Seite, und die Faktoren auf der andern gegen einander abkürzen, und bei etwa vorkommenden Brüchen die Nenner versetzen könne. Kommen gemischte Zahlen vor, so werden diese zuvor eingerichtet. Dadurch wird die Rechnung bedeutend abgekürzt.

Die Columne rechter Hand pflegt man die Multiplikations-, und die linker Hand die Divisions-Seite (Columne) zu nennen, aus einem Grunde, der leicht einzusehen ist.

Nach der Reesischen Regel würde demnach unsere erste Aufgabe so berechnet werden:

45 Arbeiter, 8 Stunden, 15 Tage, 360 Ellen (Bedingungssatz)
30 „ 10 „ x „ 120 „ (Fragesatz).

Rechnung.

x T.	15 T.		x	15		x	1
30 A.	45 Arb.		2	3		1	3
10 St.	8 St.	oder	5	4	oder	1	2
360 E.	120 Ell.		3	1		1	1
$mx =$	p		$m'x =$	p'		$x =$	6 T. wie ob.

Setzt man in der zweiten Aufgabe $A = 15$, $B = 10\frac{1}{2}$, $C = 12$, $D = 350'$, $E = 6'$, $F = 4'$ und $a = 36$, $b = 9$, $d = 630'$, $e = 3'\frac{1}{5}$ und $f = 7'\frac{1}{2}$; so steht die Rechnung also;

Arbeiter,	Stunden,	Tage,	Länge,	Breite,	Tiefe,	
15	$10\frac{1}{2}$	12	350′	6′	4′	(Bedingungssatz),
36	9	x	630′	$3'\frac{1}{5}$	$7'\frac{1}{2}$	(Fragesatz).

x T.	12 Tage
36 Arb.	15 Arb.
9 St.	$\frac{21}{2}$ St.
350′ L.	630′ L.
6′ Br.	$\frac{16}{5}$′ Br.
4′ T.	$\frac{15}{2}$′ Tiefe

oder

x	12
36	15
9	21
2	
350	630
6	16
5	
4	15
2	
2 x =	21,

also $x = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$ Tage.

Als Probe empfehle ich bei dieser Rechnung folgendes Verfahren: Man setze den für x gefundenen Werth in den Fragesatz, nehme ein beliebiges anderes Glied desselben als unbekannt an, und berechne das Beispiel nach der gegebenen Regel. Erhält man die schon gegebene Zahl wieder als Resultat, so ist der für das obige x gefundene Werth wahrscheinlich der wahre.

§. 196.

Dritte und allgemeine Methode, Aufgaben über die zusammengesetzte Regel de tri zu lösen.

Man erinnere sich hier des §. 189 Gesagten. Wenn zwei oder mehrere Kräfte dieselbe Zeit hindurch wirken, so ist klar, daß eine zwei, drei, vier . . . mal größere Kraft eine zwei, drei, vier . . . mal größere Wirkung hervorbringen müsse, oder daß die Kräfte (Ursachen) den Wirkungen direkt proportional seien. Denkt man sich aber gleiche Kräfte durch ungleiche Zeiten wirksam, so muß offenbar von jener Kraft eine zwei, drei, vier . . . mal größere Wirkung hervorgebracht werden, welche eine zwei, drei, vier . . . mal längere Zeit hindurch wirksam ist, d. h. bei gleichen Kräften verhalten sich die Wirkungen gerade wie die Zeiten. Bezeichnen nun C, c und γ drei Kräfte oder Ursachen, welche in den Zeiten T, t und τ die Wirkungen E, e und ε hervorbringen, und setzt man $T = \tau$ und $c = \gamma$, so erhält man folgende Proportionen:

$$
\begin{array}{rcl}
E : \varepsilon &=& C : \gamma \\
\varepsilon : e &=& \tau : t, \\
\hline
\text{also } E : e &=& C\tau : \gamma t, \\
\text{oder } E : e &=& CT : ct;
\end{array}
$$

d. h. die Wirkungen sind im zusammengesetzten Verhältnisse der Kräfte und der Zeiten.

Aus dieser Proportion ist klar, daß man die Zeitbestimmung als eine Krafterhöhung ansehen könne. So z. B. wird unter sonst gleichen Umständen dieselbe Wirkung erfolgen, wenn 4 Menschen 3 Tage lang arbeiten, oder $12 = 4 . 3$ Menschen 1 Tag. Sind mehrere Zeitbestimmungen, z. B. nebst den Tagen oder Wochen auch die Anzahl der täglichen Arbeitsstunden, gegeben, so erhält man dadurch eine neue und nähere Bestimmung der wirkenden Kraft. Wenn z. B. jene 4 Menschen in den 3 Tagen täglich 10 Stunden arbeiten, also im Ganzen 30 Stunden, so werden, alles Uebrige gleich gesetzt, 4 . 30, d. i. 120 Menschen in einer Stunde dieselbe Arbeit verrichten können. Es ist aber in diesem Falle die wirkende Kraft $= 4 . 3 . 10$, d. i. das Produkt aus der ersten Kraft in die Zeitbestimmungen. Dasselbe gilt auch, wenn noch mehrere Bestimmungen der Zeit gegeben sind. Bezeichnen wir diese mit $T, T', T'', T''', \ldots$ und $t, t', t'', t''', \ldots$, so ist allgemein

$$E : e = C . T . T' . T'' \ldots : c . t . t' . t'' \ldots .$$

Berücksichtigt man endlich den Widerstand, der eine Kraft im Wirken hindert, so ist einleuchtend, daß von gleichen Kräften diejenige in derselben Zeit nur eine, zwei, drei, vier . . . mal kleinere Wirkung hervorbringen könne, welche einen zwei, drei, vier . . . mal größern Widerstand zu überwinden hat, und umgekehrt. Bei ungleichen Kräften, aber gleichen Widerständen, ist die von der größern Kraft hervorgebrachte Wirkung die größere. Denken wir uns demnach, daß die Kräfte K, k, $\varkappa$, welche die Widerstände W, w, φ zu überwinden haben, die Wirkungen E, e, ε hervorbringen, so ist, wenn $K = \varkappa$ und $w = \varphi$ gesetzt wird:

$$
\begin{array}{rcl}
E : \varepsilon &=& \varphi : W \\
\varepsilon : e &=& \varkappa : k \\
\hline
\text{also } E : e &=& \varkappa\varphi : kW, \\
\text{oder } E : e &=& Kw : kW,
\end{array}
$$

und das zweite Verhältniß durch wW dividirt:

$$E : e = \frac{K}{W} : \frac{k}{w},$$

d. i. die Wirkungen verhalten sich direkt wie die Kräfte, und umgekehrt wie die Wiederstände; oder: die Wirkungen verhalten sich wie die Kräfte dividirt durch die Widerstände. Es ist einleuchtend, daß, wenn mehrere Hindernisse zugleich einer Kraft entgegenwirken, das Produkt derselben als Totalwiderstand der Kraft betrachtet werden könne. Es lassen sich demnach die Widerstände als Kraftverminderungen, so wie die Zeitbestimmungen als Krafterhöhungen ansehen. Bei der Bestimmung der Größe einer Kraft erscheinen demnach die Zeiten als Faktoren, und die Widerstände als Divisoren. Bezeichnen wir letztere mit W, W', W'', ... und w, w', w'', ..., so erhalten wir folgende Proportion als allgemeine Norm für die Auflösung der Aufgaben für die zusammengesetzte Regel de tri:

$$\frac{C \cdot T \cdot T' \cdot T'' \ldots}{W \cdot W' \cdot W'' \ldots} : \frac{c \cdot t \cdot t' \cdot t'' \ldots}{w \cdot w' \cdot w'' \ldots} = E : e \text{ oder}$$

$$C \cdot T \cdot T' \cdot T'' \ldots \times w \cdot w' \cdot w'' : c \cdot t \cdot t' \cdot t'' \ldots \times W \cdot W' \cdot W'' \ldots = E : e.$$

In unserem oben gegebenen Beispiele würden also 45 Arb. = C, 15 Tage = T, 8 St. = T', 350 Ell. = E, 30 Arb. = c, x = t, 10 St. = t' und 120 Ellen = e gesetzt werden müssen, um dasselbe nach dieser Proportion zu berechnen; man hätte nämlich:

$$\begin{aligned} 45 \cdot 15 \cdot 8 : 30 \cdot x \cdot 10 &= 360 : 120 \text{ oder} \\ 3 \cdot 15 \cdot 4 : 2 \cdot x \cdot 5 &= 3 : 1 \\ 3 \cdot 3 \cdot 2 : x &= 3 : 1 \\ 3 \cdot 2 : x &= 1 : 1 \end{aligned}$$

also $x = 3 \cdot 2 = 6$ Tagen, wie oben.

Das zweite Beispiel (§. 195) wollen wir um der Deutlichkeit willen auch nach unserer allgemeinen Formel berechnen.

	Arb.	St.	Tage	Länge	Br.	Tiefe
Es hieß:	15,	$10\frac{1}{2}$,	12,	350',	6',	4,
	36,	9,	x,	630',	$3'\frac{1}{5}$,	$7\frac{1}{2}$.

Hier ist also

$$C = 15,\ c = 36,\ T = 12,\ t = x,\ T' = 10\tfrac{1}{2} = \tfrac{21}{2},$$
$$t' = 9,\ E = 350' \cdot 6 \cdot 4 \text{ und}$$
$$e = 630' \cdot \tfrac{16}{5} \cdot \tfrac{15}{2} = 63 \cdot 16 \cdot 15;$$

wenn wir, wie in der Stereometrie wird gezeigt werden, das Produkt aus der Länge in die Breite und Tiefe als die gesammte Wirkung betrachten.

Es ist daher

$$15 \,.\, 12 \,.\, \tfrac{21}{2} : 36 \,.\, x \,.\, 9 = 350 \,.\, 6 \,.\, 4 : 63 \,.\, 16 \,.\, 15$$
$$5 \,.\, 1 \,.\, 21 : 3 \,.\, x \,.\, 3 = 2 \times 50 \,.\, 2 \,.\, 1 : 9 \,.\, 4 \,.\, 5$$
$$5 \,.\, 7 : 3x = 10 : 9$$
$$7 : x = 2 : 3,$$

also $x = \frac{7 \,.\, 3}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$ Tagen, wie oben.

Betrachten wir aber die Breite und Tiefe des Grabens in Bezug auf seine Länge als Hindernisse, indem wir sagen: je breiter und tiefer der Graben werden soll, desto weniger lang kann er von einer bestimmten Anzahl Arbeiter in einer festgesetzten Zeit gemacht werden; so wird

$$W = 6', \; W' = 4, \; w = \tfrac{16}{5}, \; w' = \tfrac{15}{2},$$

und daher

$$15 \,.\, 12 \,.\, \tfrac{21}{2} \times \tfrac{16}{5} \,.\, \tfrac{15}{2} : 36 \,.\, x \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 4 = 350 : 630$$
$$15 \,.\, 12 \,.\, 21 \,.\, 4 \,.\, 3 : 36 \,.\, x \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 4 = 5 : 9$$
$$3 \,.\, 21 : x \,.\, 9 \,.\, 6 = 1 : 9$$
$$21 : 2x = 1 : 1,$$

also $x = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$, wie vorhin.

Für jenen, der den Sinn der allgemeinen Formel richtig gefaßt hat, ist die dritte Auflösungsart die bequemste und leichteste.

Zur Uebung wollen wir noch folgende Aufgabe nach den angeführten drei Methoden berechnen.

Wenn 18 Weber in 8 Wochen, da sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 10 Stunden arbeiten, 100 Stück Leinwand verfertigen, wo jedes Stück 30 Ellen lang und $1\frac{1}{2}$ Ellen breit ist; wie viel Stück Leinwand werden 42 Weber in 12 Wochen verfertigen, wenn sie wöchentlich nur 5 Tage, aber täglich 12 Stunden arbeiten, und wenn jedes Stück 36 Ellen lang und 2 Ellen breit werden soll?

18 Weber,	8 Wochen,	6 Tage,	10 St.,	100 Stück,	30 Ell. l.,	$\frac{3}{2}$ Ell. br.
42 „	12 „	5 „	12 „	x „	36 „	2 „

Nach der ersten Methode steht die Rechnung wie folgt:

18 Web. : 42 Web. = 100 Stück : z Stück oder 3 : 7 = 100 : z
8 Woch. : 12 Woch. = z Stück : y Stück „ 2 : 3 = z : y
6 Tage : 5 Tage = y Stück : u Stück „ 6 : 5 = y : u
10 St. : 12 St. = u Stück : v Stück „ 5 : 6 = u : v
36 Ell. l. : 30 Ell. l. = v Stück : w Stück „ 26 : 5 = v : w
2 E. br. : $\frac{3}{2}$ E. br. = w Stück : x Stück „ 4 : 3 = w : x

also 18.8.6.10.36.2 : 42.12.5.12.30.$\frac{3}{2}$ = 100 : x oder 16 : 35 = 100 : x
oder 4 : 35 = 25 : x, also $x = \frac{35 \cdot 25}{4} = \frac{875}{4} = 218\frac{3}{4}$ Stück.

Nach der zweiten Methode:

x Stück	100 Stück	oder	x	100	oder	x	25
18 Weber	42 Weber		3	7		2	7
8 Wochen	12 Wochen		2	3		2	5
6 Tage	5 Tage		1	1		4x =	875
10 Stund.	12 Stunden		2	2			
36 Ellen l.	30 Ellen lang		26	5		$x = \frac{875}{4} = 218\frac{3}{4}$	
2 Ell. br.	$\frac{3}{2}$ Ellen breit		2	3			
			2				

Nach der allgemeinen Proportion

$$C.T.T'.T'' \ldots w.w'.w'' \ldots : c.t.t'.t'' \ldots W.W'.W'' \ldots = E : e$$

ist $18 . 8 . 6 . 10 \times 36 . 2 : 42 . 12 . 5 . 12 \times 30 . \frac{3}{2} = 100 : x$,

oder $2 . 2 : 7 . 5 = 25 : x$

$4 : 35 = 25 : x$,

wo $x = \frac{35 . 25}{4} = \frac{875}{4} = 218\frac{3}{4}$, wie vorhin.

Nach den hier vorgetragenen Regeln lassen sich die mannigfaltigsten Beispiele berechnen, wie bei dem mündlichen Vortrage umständlich gezeigt werden wird.

§. 197.

Zur zusammengesetzten Regel de tri gehört auch die Kettenregel, deren man sich bedient, wenn das Verhältniß zweier Größen nicht unmittelbar bekannt, sondern erst durch bekannte Zwischenverhältnisse bestimmt werden muß. Ihre vorzügliche Anwendung findet die Kettenregel bei der Vergleichung der Gewichte, Maße, Münzen, bei Wechselreduktionen u. s. w. Die Regel selbst hat ihren Namen daher, daß, wenn alle Größen, die bei der Aufgabe in Rechnung kommen

in Verhältnisse gebracht werden, das erste Glied des nächst folgenden Verhältnisses mit dem letzten Gliede des vorhergehenden von einerlei Art ist; daß demnach die Glieder jener Verhältnisse wie die Glieder einer Kette in einander greifen.

Die Regel wird gewöhnlich so gegeben:

„Man ziehe eine vertikale Linie, schreibe oben links die gesuchte Zahl x an, und ihr gegenüber rechts die Fragegröße, d. i. die zu verwandelnde. Links unter x schreibt man dann von den gegebenen Größen die mit der Fragezahl gleichnamige, und ihr gegenüber rechts jene Größe, welche mit der vorigen nach den Bestimmungen der Aufgabe gleichen Werth hat. Dann setzt man zur Linken wieder jene der gegebenen Größen, welche mit der letztgenannten gleiche Benennung hat, ihr Aequivalent aber wieder zur Rechten. Auf diese Art fahre man mit dem Ansatze fort, bis man endlich rechts eine Zahl erhält, welche mit der gesuchten (x) gleiche Benennung hat, und verfahre dann gerade wie bei der Reesischen Regel" (§. 195).

Den Gebrauch dieser Regel werden wir aus folgenden Beispielen kennen lernen.

1. Wie verhält sich der Wiener Fuß zum Nürnberger, wenn sich der Wiener Fuß zum Berliner wie 51 : 50, der Berliner zum Pariser wie 41 : 43, der Pariser zum Londner wie 16 : 15, und der Londner zum Nürnberger wie 336 : 337 verhält? Bezeichnen wir den Wiener Fuß mit W, den Nürnberger mit N, den Berliner mit B, den Pariser mit P, den Londner mit L, so ist

$$\begin{array}{llll} W : B = 51 : 50 & \text{oder} & 50\,W = 51\,B \\ B : P = 41 : 43 & „ & 43\,B = 41\,P \\ P : L = 16 : 15 & „ & 15\,P = 16\,L \\ L : N = 336 : 337 & „ & 337\,L = 336\,N \end{array}$$

$$\text{also } W : N = 51 . 41 . 16 . 336 : 50 . 43 . 15 . 337$$
$$= 17 . 41 . 16 . 168 : 25 . 43 . 5 . 337 \text{ und}$$
$$25 . 43 . 5 . 337\,W = 17 . 41 . 16 . 168\,N$$

$$1\,W = \frac{17 . 41 . 16 . 168}{25 . 43 . 5 . 337} N = \frac{1873536}{1811375} N = 1{\cdot}03 \ldots N,$$

daher W : N = 1·03 . . . : 1, welches Verhältniß jedoch etwas zu

klein ist, weil die Zwischenverhältnisse nur näherungsweise angegeben wurden.

Nach der Kettenregel würde die Rechnung also stehen:

x W	1 N
336 N	337 L
16 L	15 P
41 P	43 B
51 B	50 W
mx =	p

Verfährt man hier wie bei der Reesischen Regel, so findet man ganz dasselbe Resultat.

2. Was kostet die Wiener Elle in Wiener Währung, wenn 1 Stück Tuch von 30 Leipziger Ellen 16 Dukaten kostet, und 11 Dukaten = 20 Laubthlr., 4 Laubthlr. = 11 fl. Reichswährung, 6 fl. R. W. = 5 fl. Conv. Münze, 100 fl. C. M. = 250 fl. W. W., und endlich 51 Leipziger Ellen = 37 Wiener Ellen?

x fl. W. W.	1 W. Elle.
37 W. Ell.	51 L. Ellen
30 L. Ell.	16 Duk.
11 Duk.	20 Laubthlr.
4 Laubthlr.	11 fl. R. W.
6 fl. R. W.	5 fl. C. M.
100 fl. C. M.	250 fl. W. W.

woraus $x = \frac{850}{111}$ fl. = 7·6576 fl. = 7 fl. 39 kr. 1·8 pf.

Zur Uebung noch folgendes Beispiel:

Ein Wiener Kaufmann kauft 2 Zentner 87 Pfund 24 Loth Amsterdamer Gewicht von irgend einer Waare, welche ihm sammt allen Nebenauslagen auf 987 fl. 12 Stüwer Holl. Courant zu stehen kommen. Wie hoch muß nun das Wiener Pfund dieser Waare in Wiener Währung verkauft werden, wenn der Kaufmann 12 Procent gewinnen will, und wenn 1096 Amsterd. Pfd. = 967 Wiener Pfd., 100 fl. Conv. Münze = $249\frac{5}{8}$ fl. W. W., 1 fl. Holl. Cour. = 20 Stüwer, $35\frac{1}{8}$ Stüwer Holl. Cour. = 2 Mark Hamb. Bco., 3 Mark Hamb. Banco = 1 Thlr. Hamb. Bco. und 100 Thaler Hamb. Bco. = 144 fl. $47\frac{3}{4}$ kr. Conv. Münze.

C. Von der Theilregel.

§. 198.

Zur Theilregel (§. 190) gehört a) die Gesellschaftsrechnung, b) die Vermischungsrechnung, c) die Habereirechnung, d) die Falcidienrechnung, e) die Durchschnittsrechnung und f) die Alligationsrechnung.

Die unter b), c) und d) angeführten Rechnungsarten sind von der Gesellschaftsrechnung (Societätsrechnung) nur dem Gegenstande nach verschieden, wie wir in einigen nachfolgenden Beispielen sehen werden. Die Alligationsrechnung läßt sich nur in der Lehre von den Gleichungen gründlich darstellen, weßwegen wir sie hier übergehen.

§. 199.

I. Von der Gesellschaftsrechnung.

Die Gesellschaftsrechnung lehrt ein gegebenes Ganze in mehrere ungleiche Theile theilen, die in bestimmten Verhältnissen zu einander stehen, oder die andern gegebenen Größen proportional sind. Man kann die Gesellschaftsrechnung eintheilen in die einfache und zusammengesetzte, je nachdem die Zahlen, welche den gesuchten Theilen des zu vertheilenden Ganzen proportional sein sollen, d. i. je nachdem die Verhältnißzahlen unmittelbar gegeben sind oder nicht. Im letzten Falle müssen die Verhältnißzahlen erst aus den Bedingungen der Aufgabe berechnet werden.

Alle Aufgaben über die Gesellschaftsrechnung lassen sich unter folgendes allgemeine Problem subsumiren.

§. 200.

Aufgabe.

Eine gegebene Größe A in mehrere Theile z, y, x, w, v, . . zu zerlegen, welche sich verhalten, wie die bestimmten Zahlen a, b, c, d, e, . . .

Auflösung.

Der gemachten Voraussetzung zur Folge ist

$$z \div y \div x \div w \div v \div \ldots = a \div b \div c \div d \div e \div \ldots$$

oder

$$z \div a = y \div b = x \div c = w \div d = v \div e = \ldots,$$

mithin (nach §. 170)

$$(z + y + x + w + v + \ldots) \div (a + b + c + d + e + \ldots) = z \div a$$
$$= y \div b = x \div c = w \div d = v \div e = \ldots$$

Setzen wir Kürze halber

$$a + b + c + d + e + \ldots = s,$$

so wird, weil

$$z + y + x + w + v + \ldots = A \text{ sein muß,}$$

$$A \div s = z \div a = y \div b = x \div c = w \div d = v \div e = \ldots,$$

oder, wenn wir die mittlern Glieder wieder verwechseln:

$$A \div z = s \div a, \text{ also } z = \frac{Aa}{s} = \frac{A}{s} . a$$

$$A \div y = s \div b, \text{ „ } y = \frac{Ab}{s} = \frac{A}{s} . b$$

$$A \div x = s \div c, \text{ „ } x = \frac{Ac}{s} = \frac{A}{s} . c$$

$$A \div w = s \div d, \text{ „ } w = \frac{Ad}{s} = \frac{A}{s} . d$$

$$A \div v = s \div e, \text{ „ } v = \frac{Ae}{s} = \frac{A}{s} . e$$

. . . .

Hieraus geht nun folgende praktische Regel für die Auflösung der Aufgaben über die Gesellschaftsrechnung hervor:

„Man dividire das zu vertheilende Ganze durch die Summe aller Verhältnißzahlen, und multiplicire diesen beständigen Quotienten mit jeder einzelnen Verhältnißzahl, so erhält man die entsprechenden gesuchten Theile."

Zusatz.

Ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, $c = m\gamma$, $d = m\delta$, $e = m\varepsilon$, 2c. und bezeichnet m das größte gemeinschaftliche Maß von a, b, c, d, e,... sind also die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ relative Primzahlen, so ist auch s durch m theilbar (§. 67), und z. B. $s = m\sigma$.

In diesem Falle erhält man demnach

$$z = \frac{A}{s} . a = \frac{A}{m\sigma} . m\alpha = \frac{A}{\sigma} . \alpha,$$

$$y = \frac{A}{s} . b = \frac{A}{m\sigma} . m\beta = \frac{A}{\sigma} . \beta,$$

$$x = \frac{A}{s} . c = \frac{A}{m\sigma} . m\gamma = \frac{A}{\sigma} . \gamma,$$

$$w = \frac{A}{s} . d = \frac{A}{m\sigma} . m\delta = \frac{A}{\sigma} . \delta,$$

$$v = \frac{A}{s} . e = \frac{A}{m\sigma} . m\varepsilon = \frac{A}{\sigma} . \varepsilon,$$

. . . .

und es ist

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots$$

Haben also die gegebenen Verhältnißzahlen einen gemeinschaftlichen Faktor m, so kann man sie zur Vereinfachung der Rechnung noch vor der Anwendung unserer Regel durch diesen Faktor abkürzen.

Eben so können wir auch die Verhältnißzahlen a, b, c, d, . . . durch eine beliebige Zahl n multipliciren, ohne die Endresultate zu ändern, und sind dadurch in den Stand gesetzt, die Verhältnißzahlen immer als ganze Zahlen darzustellen, wenn eine oder die andere ein Bruch sein sollte.

Beispiele.

1. Vier Kaufleute, A, B, C, D, traten in Compagnie, A legte 3200 fl. B 4500 fl., C 2700 fl., D 4000 fl. ein; sie gewinnen mit der Summe aller Einlagen 4320 fl.; wie viel gebührt nun einem jeden von dem Gewinne nach dem Verhältnisse seines Beitrages?

Hier ist $A = 4320$ fl., $a = 3200$, $b = 4500$, $c = 2700$, $d = 4000$, also $s = 3200 + 4500 + 2700 + 4000 = 14400$ fl. und $\frac{A}{s} = \frac{3}{10}$. Demnach ist der Antheil des

A oder	$z = \frac{3}{10} . 3200 =$	960	fl.
B „	$y = \frac{3}{10} . 4500 =$	1350	„
C „	$x = \frac{3}{10} . 2700 =$	810	„
D „	$w = \frac{3}{10} . 4000 =$	1200	„

$$w + x + y + z = 4320 \text{ fl.} = A.$$

2. Bei der Fabrikation des feinen rothen Siegellacks nimmt man auf 2 Pfd. Terpentin, 3 Pfd. Zinnober, 3 Pfd. Schellack und $\frac{1}{2}$ Pfd. Kreide; wie viel muß man von jedem dieser Ingredienzen nehmen, wenn man 25 Pfd. Siegellack verfertigen will?

Hier ist

$$s = (2 + 3 + 3 + \tfrac{1}{2}) = 8\tfrac{1}{2} = \tfrac{17}{2}$$

$$A = 25 \text{ und } \frac{A}{s} = \tfrac{50}{17};$$

also braucht man

$\tfrac{50}{17} \cdot 2 = \tfrac{100}{17} = 5\tfrac{15}{17}$ Pfund Terpentin,
$\tfrac{50}{17} \cdot 3 = \tfrac{150}{17} = 8\tfrac{14}{17}$ „ Zinnober
$\tfrac{50}{17} \cdot 3 = \tfrac{150}{17} = 8\tfrac{14}{17}$ „ Schellack, und
$\tfrac{50}{17} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{25}{17} = 1\tfrac{8}{17}$ „ Kreide;

$A = 25$ Pfund.

3. Bei Verfertigung guten Schießpulvers rechnet man auf 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel. Wie viel Pfunde müssen nun von jedem Ingredienz zu 84 Zentner genommen werden?

Hier ist

$$s = 16 + 3 + 2 = 21$$

$$A = 84 \text{ und } \frac{A}{s} = \tfrac{84}{21} = 4;$$

oder

$4 \cdot 16 = 64$ Zentner Salpeter,
$4 \cdot 3 = 12$ „ Kohlen,
$4 \cdot 2 = 8$ „ Schwefel;

$A = 84$ Zentner

Wenn man die Gesellschaftsregel zur Auflösung der Aufgaben von der Art, wie die beiden letzten sind, anwendet, so nennt man diese Rechnung die **Vermischungsrechnung**. Diese betrifft nämlich die Fälle, wo man die Quantität der Ingredienzen für eine gegebene Quantität der Mischung aus ihren bekannten Verhältnißzahlen berechnen soll.

4. Während eines Sturmes auf dem Meere müssen aus einem Schiffe 3 Fässer Kaffee, dem A gehörig, deren Werth 1000 fl. beträgt, 5 Tonnen Häringe, im Werthe zu 900 fl., dem B gehörig, und 2 Kisten Farbstoffe, im Werthe zu 600 fl., dem C gehörig, über Bord geworfen werden. Dadurch wird dem Schiffer D das Schiff, im Werthe zu 8100 fl., dem E um 5000 fl. Weine, dem F um 3000 fl. Tücher, und dem G mehrere Tonnen Fischthran, 2400 fl. am Werthe gerettet. Da nun nach einem bekannten Seegesetze der im Sturme erlittene Schaden auf alle Interessenten repartirt werden muß, so entsteht die

die Frage; wie viel muß jeder an dem ganzen Verluste von 2500 fl. tragen?

Verhältnißzahlen.

A	1000	oder	10
B	900	„	9
C	600	„	6
D	8100	„	81
E	5000	„	50
F	3000	„	30
G	2400	„	24
		x =	210,

$A = 2500, \frac{A}{s} = \frac{2500}{210} = \frac{250}{21}$.

Es ist demnach der verhältnißmäßige Verlust des

$$\begin{array}{llll} A & \frac{250}{21} \,.\, 10 = \frac{2500}{21} & = 119\frac{1}{21} & \text{fl.} \\ B & \frac{250}{21} \,.\, 9 = \frac{750}{7} & = 107\frac{3}{21} & „ \\ C & \frac{250}{21} \,.\, 6 = \frac{500}{7} & = 71\frac{9}{21} & „ \\ D & \frac{250}{21} \,.\, 81 = \frac{6750}{7} & = 964\frac{6}{21} & „ \\ E & \frac{250}{21} \,.\, 50 = \frac{12500}{21} & = 595\frac{5}{21} & „ \\ F & \frac{259}{21} \,.\, 30 = \frac{2500}{7} & = 357\frac{3}{21} & „ \\ G & \frac{250}{21} \,.\, 24 = \frac{2000}{7} & = 285\frac{15}{21} & „ \\ \hline & & A = 2500 & \text{fl.} \end{array}$$

Die Berechnung der Beispiele dieser Art nennt man die Habereirechnung.

5. Ein römisches Gesetz (Lex falcidia) bestimmt, daß, wenn in einem Testamente die Legate $\frac{3}{4}$ des hinterlassenen Vermögens übersteigen, der Haupterbe $\frac{1}{4}$ des Vermögens (quartam falcidiam) im Voraus nehmen dürfe, und daß dann die übrigen $\frac{3}{4}$ unter die Legatarien nach der im Testamente festgesetzten Ordnung vertheilt werden sollen. Wenn nun Jemand den A als seinen Haupterben ernannte, dem B ein Legat von 800 fl., dem C ein Legat von 1000 fl., und dem D ein Legat von 600 fl. bestimmte, und sein ganzes Vermögen beträgt nur 2600 fl.; wie viel gebührt jedem der Legatarien von Rechtswegen?

Die Summe der Legaten (800 + 1000 + 600) fl. = 2400 fl. übersteigt $\frac{3}{4} \,.\, 2600 = 3 \,.\, 650 = 1950$ fl. um 450 fl. Nimmt also

der Haupterbe A die quartam falcidiam hinweg, so bleiben für die Legatarien nur noch $2600 - \frac{2600}{4} = 2600 - 650 = 1950$ fl. $= A$ zu vertheilen, und zwar auf folgende Art:

Verhältnißzahlen.		Antheile.
800 oder 4,	also erhält B	$\frac{1950}{12} \cdot 4 = 650$
1000 „ 5,	„ „ C	$\frac{1950}{12} \cdot 5 = 812\frac{1}{2}$
600 „ 3,	„ „ D	$\frac{1950}{12} \cdot 3 = 487\frac{1}{2}$
$s = 12$,		$A = 1950$ fl.

Die Auflösung dieser und ähnlicher Aufgaben nennt man die **Falcidienrechnung**.

§. 201.

Von der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung.

Hier werden die Verhältnißzahlen durch das Zusammenwirken mehrerer Ursachen bestimmt, und müssen demnach erst ausgemittelt werden. Wenn z. B. die Kraft m durch m′ Zeittheile, die Kraft n durch n′ Zeittheile, und die Kraft p durch p′ Zeittheile wirksam ist und es wird gefragt, welchen Antheil jede einzelne Kraft an der gesammten Wirkung habe; so kann diese Frage leicht beantwortet werden, wenn man die Dauer der Wirksamkeit aller Kräfte auf die Zeiteinheit reducirt, weil alsdann die Wirkungen den so reducirten Kräften proportional sein müssen (§. 196). Nun ist es aber rücksichtlich des Effektes einerlei, ob die Kraft m durch m′ Zeittheile, oder ob die Kraft $M = m \cdot m'$ durch 1 Zeittheil wirksam ist, d. i. jene reducirten Kräfte sind die Produkte aus den gegebenen Kräften in die Zeiten, innerhalb welchen sie wirksam sind. Unsere Frage geht demnach in folgende über: „Welchen Antheil nehmen die in einerlei Zeit wirkenden Kräfte $M = m \cdot m'$, $N = n \cdot n'$ und $P = p \cdot p'$ an der gesammten Wirkung a?“ und wird durch die im vorigen Paragraphe gegebene Regel beantwortet.

Beispiele.

1. Drei Personen, A, B, C, gewannen bei einem Geschäfte 6200 fl. A unternahm das Geschäft mit einem Kapital von 6000 fl.; $1\frac{1}{2}$ Monat später trat B mit A in Compagnie, und gab 8000 fl. in die Casse. Am Ende des zweiten Monats trat noch C mit einem Kapital von 9000 fl. bei, und zwei Monate später war das Geschäft beendet. Wie viel gebührt nun einem jeden von dem Gewinne?

A gab 6000 fl. auf 4 Monate, oder $4 . 6000 = 24000$ auf 1 Monat,
B „ 8000 „ „ $2\frac{1}{2}$ „ „ $\frac{5}{2} . 8000 = 20000$ „ 1 „
C „ 9000 „ „ 2 „ „ $2 . 9000 = 18000$ „ 1 „

Es sind also die Verhältnißzahlen

$$\left.\begin{array}{l} M = 24000 \text{ oder } 12 \\ N = 20000 \text{ „ } 10 \\ P = 18000 \text{ „ } 9 \end{array}\right\} \text{wenn man durch 2000 abkürzt}$$

$$s = 31; \; a = 6200 \text{ fl.};$$

also $\frac{a}{s} = \frac{6200}{31} = 200.$

Demnach beträgt der Antheil des

$$\begin{array}{l} A \; 200 \, . \, 12 = 2400 \text{ fl.} \\ B \; 200 \, . \, 10 = 2000 \text{ „} \\ C \; 200 \, . \; 9 = 1800 \text{ „} \\ \hline a = 6200 \text{ fl.} \end{array}$$

In unserem Beispiele sind die Interessen durch die Reduktion auf 1 Monat allerdings berücksichtiget worden, wenn der Gewinn dem vorhandenen Kapitale immer proportional blieb, wo dann 10 % auf 1 Monat gerechnet sind. Dieses gleichförmige Wachsen aber ist bei den Geschäften der Kaufleute nicht immer der Fall. Das Interesse eines jeden Associé erfordert dann, daß, wenn ein anderer der Gesellschaft beitritt, jederzeit die Rechnung abgeschlossen werde.

2. Drei Kaufleute haben in einem Geschäfte, welches im Ganzen 15 Monate dauerte, 97950 fl. gewonnen. A hatte mit 86000 fl. das Geschäft begonnen, und nach drei Monaten wieder 6000 fl. zurückgenommen und am Ende des vierten Monats wieder 10.000 fl. eingelegt. Der zweite B hat 60000 fl. gleich im Anfange eingelegt, und nach 6 Monaten noch 50000 fl., ließ sich aber am Ende des neunten Monats wieder 10000 fl. zurückzahlen. C trat am Ende des zweiten Monats der Gesellschaft mit einem Kapitale von 100000 fl. bei. Es wird nun verlangt, den Gewinn so zu vertheilen, daß die einzelnen Theile den Einlagen und den entsprechenden Zeiten proportional seien.

A gab 86000 fl. auf 3 Monate, oder 258.000 fl. auf 1 Monat
„ „ 80000 „ „ 1 „ „ 80.000 „ „ 1 „
„ „ 90000 „ „ 11 „ „ 990.000 „ „ 1 „
mithin im Ganzen 1.328.000 fl. auf 1 Monat.

B gab	60000	fl.	auf	6	Mon.,	oder	360000	fl.	auf	1	Monat
„ „	110000	„	„	3	„	„	330000	„	„	1	„
„ „	100000	„	„	6	„	„	600000	„	„	1	„
						daher überhaupt	1290000	fl.	auf	1	Monat.

Endlich gab

C 100000 fl. auf 13 Mon., oder 1300000 fl. auf 1 Monat.

Wir haben sonach folgende Verhältnißzahlen:

A	1328000	oder	664
B	1290000	„	645
C	1300000	„	650
		also s =	1959

und $\frac{A'}{s} = \frac{97950}{1959} = 50$, folglich gewannen

A	664 . 50 fl.	=	33200 fl.
B	645 . 50 „	=	32250 „
C	650 . 50 „	=	32500 „
	Summe	=	97950 fl.

Wenn die Interessen eines Kapitals nicht gleichförmig bleiben, so muß in solchen Fällen sowohl der Gewinn, als der Verlust für jeden einzelnen Zeitraum, in welchem die Interessen unverändert blieben, berechnet werden.

§. 202.

II. Von der Durchschnittsrechnung.

Diese Rechnung wird angewendet, wenn man ein aus ungleichen Theilen zusammengesetztes Ganze in gleiche Theile theilen soll. Die Regel, die man dabei zu beobachten hat, ist folgende: „Man dividire die Summe der gegebenen Theile durch die Anzahl der Theile selbst. Die so gefundene Zahl heißt das arithmetische Mittel."

Beispiele.

1. Ein Gut trug dem Besitzer

im ersten	Jahre	2400	fl.
im zweiten	„	2000	„
im dritten	„	2350	„
im vierten	„	1930	„
vierjähriger Ertrag		8680	fl.

Welches ist der mittlere Ertrag?

Es ist $x = \frac{8680}{4} = 2170$ fl.

Wie theuer muß der Eigenthümer dieses Gut verkaufen, wenn ihm das Kapital à 6% diese Zinssumme tragen soll?

2. Wenn die Metze Korn von der besten Qualität um 5 fl. 30 kr., von mittlerer Qualität um 5 fl., und von der geringsten um 4 fl. 20 kr. verkauft wird, welches ist der Mittelpreis des Kornes?

$$x = \frac{5 \text{ fl. } 30 \text{ kr.} + 5 \text{ fl.} + 4 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}}{3} = \frac{14 \text{ fl. } 50 \text{ kr.}}{3} = 4 \text{ fl. } 56\tfrac{2}{3} \text{ kr.}$$

Anmerkung. Bei Aufgaben dieser Art ist vorzüglich auf die Quantität der einzelnen Größen zu sehen, um das arithmetische Mittel richtig zu bestimmen. Denn gesetzt, es wären von der Sorte A 100 Metzen, von der Sorte B 180 Metzen, und von der Sorte C 320 Metzen gekauft worden, so muß man also verfahren:

von A	1 Metze	à 5 fl. 30 kr.,	also	100 Metzen	à	550 fl. — kr.
„ B	1 „	à 5 „ —	„	180 „	à	900 „ —
„ C	1 „	à 4 „ 20 kr.	„	320 „	à	1386 „ 40 kr.
			demnach	600 Metzen	à	2836 fl. 40 kr.

folglich 1 Metzen à $\frac{2836 \text{ fl. } 40 \text{ kr.}}{600} = 4$ fl. 43·67 kr.

Es ist demnach zur Steuer des Wuchers nöthig, die Quantitäten sorgfältig zu berücksichtigen.

3. Ein Wirth füllt 10 Eimer Wein, den Eimer à 36 fl.
12 „ „ „ „ à 40 „
14 „ „ „ „ à 30 „
in ein Faß. Wie viel ist nun der Eimer des so gemischten Weines werth?

Die 10 Eimer	betragen	360 fl.
12 „	„	480 „
14 „	„	420 „
also 36 Eimer	betragen	1260 fl.

folglich 1 Eimer $\frac{1260}{36} = 35$ fl.

4. Ein Silberarbeiter schmelzt folgendes Silber zusammen:

12 Mark	13 löthiges Silber,	also	12 . 13 =	156 Loth feines Silber
7 "	10 " "	"	7 . 10 =	70 " " "
5 "	12 " "	"	5 . 12 =	60 " " "
24 Mark.				286 Loth feines Silber.

Es frägt sich, wie viel löthig die Mischung sein wird.

Die ganze Mischung von 24 Mark enthält 286 Loth feines Silber, also 1 Mark $\frac{286}{24} = 11\frac{11}{12}$ Loth feines Silber. Mithin ist die Mischung $11\frac{11}{12}$ löthig.

Siebenter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

---

§ 203.

Vorbegriffe.

1. Der doppelte Ausdruck einer und derselben Größe heißt Gleichung. Beide durch das Gleichheitszeichen abgesonderte Ausdrücke nennt man die zwei Seiten oder Glieder der Gleichung, und die durch + und — auf jeder Seite der Gleichung verbundenen Größen ihre Theile. So ist z. B. in der Gleichung.

$$a - x = a^2 + ab - d$$

die Größe $(a - x)$ das eine Glied, und $(a^2 + ab - d)$ das andere Glied der Gleichung. Die erste Seite besteht hier aus zwei, und die andere aus drei Theilen. Uebrigens nennt man die einzelnen Theile einer Gleichung auch Glieder derselben.

2. Sind beide Seiten der Gleichung vollkommen gleich, wie z. B. $A = A$, $\frac{a + x}{m} = \frac{a + x}{m}$, u. s. w., so heißt die Gleichung identisch.

3. Der Satz, welcher verlangt, aus gewissen Bedingungen den Werth einer unbekannten (relativen, d. i. abhängigen) Größe aufzufinden, heißt Aufgabe (Problem).

Bedingungen sind nichts anders, als Sätze, welche gewisse Eigenschaften aussprechen, die den in Frage gestellten Unbekannten zukommen, oder gewisse Beziehungen, in welchen die Unbekannten theils unter sich, theils mit bekannten Größen stehen, wie wir im vorigen Abschnitte schon gesehen haben.

4. Die angegebenen Bedingungen, ganz der Aufgabe gemäß, mittelst der arithmetischen Zeichen in eine Gleichung bringen, heißt die Aufgabe ansetzen, oder die Gleichung bilden (formiren).

Die Formation oder Bildung der bestimmten Gleichungen, d. i. die Uebersetzung des Wortausdruckes einer Aufgabe in die algebraische Zeichensprache, ist ein Werk der Urtheilskraft, und kann folglich nicht gelehrt, sondern nur durch Uebung an Beispielen erleichtert werden. Man muß sich daher bemühen, Fertigkeit in der genannten algebraischen Zeichenschrift zu erlangen, und die Aufgabe in ihre Bedingungen zu zerlegen, diese mögen wörtlich ausgedrückt sein, oder in dem Sinne der Frage verborgen liegen. Wohl ist es wahr, daß man bei nicht zu sehr verwickelten Aufgaben durch bloßes Raisonnement, d. i. durch Urtheilen nach den Regeln des vernünftigen Denkens, den Werth der Unbekannten aus den gegebenen Größen bestimmen könne; aber der Calcül beweist durch Einfachheit, Leichtigkeit, Allgemeinheit und Kürze seinen Vorzug vor dem obschon logisch richtigen Raisonniren.

Bei der Bildung der Gleichungen mag Folgendes dem Anfänger einigermaßen leitende Vorschrift sein:

„Man betrachte die unbekannte Größe vorläufig als bekannt, behandle sie ganz den Bedingungen der Aufgabe gemäß, und suche dadurch für eine und dieselbe Größe einen doppelten Ausdruck zu erhalten."

Hätte man z. B. die Aufgabe, eine Zahl zu finden, welche, mit sich selbst multiplizirt und um 3 vermehrt, ihr Vierfaches gibt, so würde man die Gleichung so ansetzen müssen:

$$x \,.\, x + 3 = 4 \,.\, x \text{ oder } x^2 + 3 = 4x.$$

Diese so gebildete Gleichung nennt man die Bedingungsgleichung.

5. Jede Aenderung der Glieder einer Gleichung, wodurch die Gleichung selbst nicht gestört oder aufgehoben wird, nennt man eine Umformung — Transformation —, und diese bezieht sich entweder bloß auf einen einzelnen Theil der Gleichung, oder auf alle Theile derselben. Im letztern Falle stützt sich demnach die Transformation auf den Grundsatz: „Gleiche Größen auf gleiche Art verändert, geben wieder gleiche Resultate."

6. Eine Gleichung auflösen oder reduciren, wie manche Schriftsteller sich ausdrücken, heißt das Gesetz der Abhängigkeit der unbekannten Größe von den bekannten durch einen algebraischen Ausdruck anschaulich darstellen. So sieht man z. B. in der aufgelösten Gleichung $x = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ (wo a und b die gegebenen Größen bezeichnen

mögen) genau, welche arithmetische Operationen mit den gegebenen Größen zur Bestimmung der Unbekannten angewendet werden müssen.

Man betrachtet eine Gleichung als aufgelöst, wenn die unbekannte Größe positiv, mit dem Koefficienten 1, in der ersten Potenz ganz allein auf einer Seite der Gleichung steht, und alle bekannten Größen auf der andern Seite sich befinden, wie dieses im letzten Beispiele der Fall ist.

Von der Richtigkeit der Auflösung einer Gleichung überzeugt man sich durch Substitution des oder der für die unbekannte Größe gefundenen Werthe in der Bedingungsgleichung, wodurch man auf eine identische Gleichung geführt werden muß. Der Werth für x, welcher der Aufgabe Genüge leistet, heißt auch **Wurzel** der Gleichung.

§. 204.

Grundregeln zur Auflösung oder Reduktion der Gleichungen.

I. Es ist für sich klar, daß, wenn $A = B$, auch $B = A$ sein müsse, d. i. man kann die Glieder der Gleichung, der Gleichheit unbeschadet, verwechseln.

II. Man kann in einer Gleichung jeden beliebigen Theil von der einen Seite auf die andere bringen, ohne die Gleichheit aufzuheben, wenn man denselben mit verändertem Zeichen überträgt (nach Grunds. 7 und 8 in §. 6). Wenn z. B.

$$x \pm a = b - x, \text{ so ist auch } x = b - x \mp a \text{ und}$$
$$x + x = b \mp a \text{ oder } 2x = b \mp a.$$

Zusatz 1.

Kommen also auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Größen mit denselben Zeichen vor, so kann man sie geradezu weglassen. Wenn z. B.

$$3x - 2a + b = m - 2a + b - c, \text{ so ist auch}$$
$$3x = m - c.$$

Zusatz 2.

Aus der Gleichung

$$A - C = B - D \text{ folgt:}$$
$$-B + D = -A + C, \text{ also auch}$$
$$-A + C = -B + D \text{ (Nro. I.)};$$

d. h. die Gleichung bleibt beständig, wenn man durchaus die Zeichen ändert.

III. Bringt man alle Glieder der Gleichung auf eine Seite, so verschwindet ihre Summe (§. 6, Grunds. 4); wenn nämlich

$A + B = C - D$ ist, so muß
$A + B - C + D = 0$ sein.

IV. Die Gleichheit wird nicht gestört, wenn man die ganze Gleichung, d. i. alle ihre Glieder mit derselben Zahl multiplicirt. Ist nämlich

$A = B$, so ist auch $AC = BC$ (§. 53).

Dieser Satz dient dazu, in einer Gleichung die Brüche wegzuschaffen, indem man mit dem Nenner eines jeden einzelnen Bruches die gegebene Gleichung multiplicirt. Z. B. wenn

$$\frac{x}{m} - a = b - \frac{x}{n},$$

so ist auch, wenn man mit m multiplicirt:

$$x - am = bm - \frac{mx}{n},$$

und wenn man noch mit n multiplicirt:

$$nx - amn = bmn - mx, \text{ oder}$$
$$nx + mx = amn + bmn, \text{ oder}$$
$$(n + m)x = mn(a + b).$$

Kürzer verfährt man, wenn man die ganze Gleichung sogleich mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multiplicirt. Ist z. B. $\frac{2x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{7}{6}$, so ist, wenn man mit 12 multiplicirt, auch $8x - 3x = 14$, oder $5x = 14$.

Haben alle Glieder der Gleichung denselben Nenner, so kann man diesen der Gleichheit unbeschadet hinweglassen.

V. Eine Gleichung besteht noch, wenn man beide Glieder zu derselben Potenz erhebt. Denn wenn $A = B$ ist, so muß auch $A^m = B^m$ sein, und $A = B^m$, wenn $\sqrt[m]{A} = B$ ist.

Mittelst dieses Satzes kann öfters eine Gleichung, in welcher irrationale Theile vorkommen, rational gemacht werden. Es sei z. B.

$x - \sqrt{ax} = m$, so ist auch
$x - m = \sqrt{ax}$ (Nro. II.) und

$$(x - m)^2 = (\sqrt{ax})^2, \text{ d. i.}$$
$$x^2 - 2mx + m^2 = ax,$$

welche Gleichung lauter rationale Glieder hat.

Eben so, wenn $2 + \frac{\sqrt{1-x}}{3} = \frac{1+2x}{\sqrt{1-x}}$, ist auch

$$6\sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})^2 = 3 + 6x \text{ (Nr. IV.), oder}$$
$$6\sqrt{1-x} + 1 - x = 3 + 6x; \text{ oder}$$
$$6\sqrt{1-x} = 2 + 7x \text{ (Nr. II.) und}$$
$$(6\sqrt{1-x})^2 = (2 + 7x)^2, \text{ d. i.}$$
$$36\ (1 - x) = 4 + 28x + 49x^2.$$

VI. Eine Gleichung bleibt auch beständig, wenn man alle Glieder derselben durch dieselbe Größe dividirt (§. 59). Ist nämlich

$$A = B, \text{ so ist auch } \frac{A}{C} = \frac{B}{C}.$$

Haben demnach alle Theile der Gleichung einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird die Gleichung dadurch einfacher, daß man durch jenen Faktor dividirt. Ist z. B.

$$a^2x - am = a^2 - ab; \text{ so ist auch}$$
$$ax - m = a - b.$$

Eben so, wenn $12 - 8x = 2\sqrt{20 - 4x}$, ist auch

$$12 - 8x = 4\sqrt{5 - x} \text{ und}$$
$$3 - 2x = \sqrt{5 - x}.$$

Mittelst dieses Satzes können wir auch jedes beliebige Glied einer Gleichung von seinem Koefficienten befreien, wenn wir die ganze Gleichung durch denselben dividiren. Wollte man z. B. in der Gleichung $ax + b = m$ vom ersten Gliede den Faktor a trennen, so ist

$$x + \frac{b}{a} = \frac{m}{a}.$$

VII. Man kann ferner der Gleichheit unbeschadet auf beiden Seiten der Gleichung Wurzeln desselben Grades ausziehen. Ist nämlich $A = B$, so muß $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$ sein, und ist $x^n = a - b$, so muß auch $x = \sqrt[n]{a - b}$ sein (§. 124).

VIII. Besteht eine Gleichung aus rationalen und irrationalen Theilen, so müssen die rationalen Theile auf der einen Seite gleich sein den rationalen Theilen auf der andern Seite, und eben so muß auch die Gleichheit zwischen den irrationalen Theilen auf beiden Seiten Statt finden. Ist nämlich $a \pm b\sqrt{m} = A \pm B\sqrt{M}$, so muß $a = A$ und $b\sqrt{m} = B\sqrt{M}$ sein; denn wäre nicht $a = A$, so müßte $a \gtrless A$ sein. Nehmen wir also an, es sei $a + x = A$, so müßte auch

$$a \pm b\sqrt{m} = a + x \pm B\sqrt{M} \text{ sein, also auch}$$
$$\pm b\sqrt{m} = x \pm B\sqrt{M} \text{ (Nro. II., Zus. I.) und}$$
$$\pm b\sqrt{m} \mp B\sqrt{M} = x,$$

d. i. es müßte die Differenz zweier irrationalen Zahlen eine Rationalzahl sein, was unmöglich ist. Sohin muß $a = A$, also auch $b\sqrt{m} = B\sqrt{M}$ sein. Setzt man hier $m = M$, so muß auch $b = B$ sein.

IX. Ist die Summe mehrerer positiven Größen gleich Null, so muß jede Größe für sich $= 0$ sein. Ist z. B. $A^2 + B^2 + C^2 = 0$; so muß auch $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sein.

X. Ist $a + b\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, so muß $a = \alpha$ und $b = \beta$ sein. Denn aus jener Gleichung folgt

$$a - \alpha = (\beta - b)\sqrt{-1}, \text{ also auch}$$
$$(a - \alpha)^2 = -(\beta - b)^2 \text{ oder}$$
$$(a - \alpha)^2 + (\beta - b)^2 = 0,$$

folglich ist nach IX.

$$a - \alpha = 0 \text{ und } \beta - b = 0,$$
$$\text{oder } a = \alpha \text{ und } b = \beta.$$

Anmerkung. Der in Nro. II., Zus. 2 aufgestellte Satz wird auch bestätigt, wenn man die Gleichung nach Nro. IV. mit (-1) multiplicirt, oder nach VI. durch (-1) dividirt.

§. 205.

Eintheilung der Gleichungen.

Man theilt die Gleichungen in analytische und synthetische. Eine Gleichung wird analytisch genannt, wenn die beiden durch das Gleichheitszeichen mit einander verbundenen Ausdrücke nothwendig gleiche Werthe haben müssen, und sich demnach bloß der Form nach von einander unterscheiden, wie z. B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Werden aber zwei beliebige Ausdrücke, wie $a + bx$ und $cx - d$ durch das Gleichheitszeichen mit einander verbunden, so erhält man eine synthetische oder algebraische Gleichung, nämlich $a + bx = cx - d$, und demnach drückt hier das Gleichheitszeichen eine Bedingung oder ein Sollen aus. Denn da diese Gleichung nicht für jeden beliebigen Werth von x bestehen kann, wenn a, b, c und d bestimmte Werthe erhalten, so fragt es sich, unter welcher Bedingung $a + bx = cx - d$ sein könne, oder für welchen Werth von x diese beiden Ausdrücke einander gleich sein können, während die analytische Gleichung

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

für jeden Werth von a und b bestehen muß.

Bei der synthetischen Gleichung ist demnach wenigstens Eine Größe, wie vorhin x, von den Werthen aller übrigen vorkommenden Größen zugleich abhängig, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, eine Funktion dieser Größen, während in der analytischen Gleichung alle Größen von einander völlig unabhängig sind.

Gleichungen, in welchen außer den unbekannten Größen lauter bestimmte Zahlen erscheinen, nennt man gewöhnlich numerische Gleichungen, um sie von den Litteralgleichungen zu unterscheiden, welche bloß allgemeine Größen oder Buchstaben enthalten.

Eine reducirte Litteralgleichung wird auch Formel genannt.

Die algebraischen Gleichungen theilt man ein:

A. Nach der Anzahl der zu bestimmenden unbekannten Größen in Gleichungen mit einer oder mehreren unbekannten Größen;

B. nach der höchsten Summe der Exponenten, mit welchen die unbekannten Größen in einem und demselben Gliede behaftet sind, in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, . . . n^{ten} Grades, je nachdem die größte Summe der Exponenten der Unbekannten $= 1$, $= 2$, $= 3$,.. oder $= n$ ist. So sind z. B. $ax + b = m$ und $x + y = n$ Gleichungen des ersten Grades oder einfache Gleichungen. Folgende Gleichungen

$$x^2 = a,$$
$$ax^2 \pm bx = m,$$
$$xy = p,$$
$$x \pm axy + y = n, \text{ u. s. w.}$$

sind Gleichungen des zweiten Grades, welche auch quadratische heißen.

Die Gleichungen

$$x^3 = p,$$
$$x^3 \pm ax^2 \pm bx = c,$$
$$x^3 \pm mx^2 = n,$$
$$ax^3 \pm nx = b,$$
$$x^2y \pm ay^2 = bx^2, \text{ u. s. w.}$$

sind Gleichungen des dritten Grades, welche auch **kubische** genannt werden.

Ferner sind die Gleichungen

$$x^4 \pm ax^3 \pm bx^2 \pm cx = d,$$
$$x^4 \pm ax^2 \pm bx = c,$$
$$x^4 \pm ax^3 = b,$$
$$x^3y - ax^4 + y^3 = c, \text{ u. s. f.}$$

Gleichungen des vierten Grades, die man auch **biquadratische** zu nennen pflegt.

Allgemein sind

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots\ldots = P,$$
$$x^{m-2}y^2 + ax^{m-3}y^3 + bx^{m-4}y^4 + \ldots\ldots = Q,$$

Gleichungen des m^{ten} Grades, weil die höchste Summe der Exponenten $= m$ ist.

Bei der Bestimmung des Grades einer Gleichung muß diese zuvor so viel möglich abgekürzt, und von Brüchen befreit werden. Denn so scheint z. B. $x^3 - ax^2 = bx$ eine Gleichung des dritten Grades zu sein; kürzt man aber durch den gemeinschaftlichen Faktor x ab, so erhält man $x^2 - ax = b$, welches nur eine quadratische Gleichung ist. Eben so ist auch $x^3 - ax + c = m - \frac{n}{x}$ keine kubische Gleichung, sondern eine Gleichung des vierten Grades. Denn multiplicirt man die ganze Gleichung mit x, so findet man $x^4 - ax^2 + cx = mx - n$. Sollte die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen erscheinen, so muß die Gleichung rational dargestellt werden. Ist z. B.

$$x + \sqrt{1-x} = a, \text{ so ist } \sqrt{1-x} = a - x,$$

und daher $1 - x = a^2 - 2ax + x^2$ eine quadratische Gleichung.

Gleichungen, die den zweiten Grad übersteigen, nennt man **höhere** oder **zusammengesetzte** Gleichungen.

Die Gleichungen, welche den ersten Grad übersteigen, sind ferner:

1) rein, wenn die unbekannte Größe nur in einer und derselben Potenz erscheint;

2) unrein, gemischt, verwickelt oder unvollständig, wenn die unbekannte Größe in verschiedenen Potenzen erscheint.

Die allgemeine Form der reinen höhern Gleichungen ist $A.x^m = B$, wo A und B was immer für algebraische Größen, die jedoch x nicht enthalten, bezeichnen mögen.

Die Gleichung

$$ax^2 + bx = c$$

ist eine gemischte quadratische,

$$ax^3 + bx^2 + cx = d$$

ist eine unreine, aber vollständige kubische; eben so sind

$$ax^3 + bx^2 = c \quad \text{und} \quad ax^3 + bx = m$$

unvollständige kubische Gleichungen.

C. Endlich theilt man die Gleichungen in bestimmte und unbestimmte, je nachdem die unbekannte Größe nur einen, oder mehrere, oder unbestimmt viele Werthe zuläßt. Sind die Bedingungen einer Aufgabe von der Art, daß so viele wesentlich verschiedene Gleichungen gebildet werden können, wie viele unbekannte Größen in derselben vorkommen, so heißt die Aufgabe eine bestimmte; im entgegengesetzten Falle aber heißt sie unbestimmt. Die unbestimmte Aufgabe heißt entweder ganz, oder zum Theil unbestimmt, je nachdem sie eine begrenzte oder unbegrenzte Anzahl von Werthen für die unbekannten Größen zuläßt. Würde z. B. eine Aufgabe verlangen, zwei Zahlen zu finden, deren Summe $= 12$ ist, und man bezeichnet die eine mit x, die andere aber mit y, so ist $x + y = 12$, woraus $x = 12 - y$ folgt. So viele Werthe nun in dieser Gleichung für y gesetzt werden, eben so viele verschiedene Werthe wird man für x finden. Da man nun für y alle möglichen ganze und gebrochene, positive und negative Zahlen setzen kann, weil in der Aufgabe keine einschränkende Bedingung gegeben ist, so können auch unendlich viele Werthe für x gefunden werden. In einem solchen Falle sagt man, die unbestimmte Größe x sei von y abhängig (dependent), und nennt x eine Funktion von y, welches man gewöhnlich durch das Symbol $f(y)$, oder $F(y)$ oder $\varphi(y)$ ꝛc. bezeichnet, wo demnach die Buchstaben f, F und φ keine Faktoren andeuten, sondern bloß Zeichen sind, die der Bequemlichkeit halber eingeführt werden.

Wäre aber die Aufgabe so gestellt worden: Zwei ganze positive Zahlen zu finden, deren Summe $= 12$ ist, so hätte man in der Gleichung $x = 12 - y$ für y nur die 13 Werthe: 0, 1, 2, ... 11, 12 setzen können, und man würde demnach auch nur 13 Werthe für x gefunden haben. Die erste Aufgabe ist also ganz, letztere nur zum Theil unbestimmt.

Fügt man aber in der Aufgabe noch die Bedingung hinzu, daß die Differenz der zu suchenden Zahlen $= 2$ sein soll, so erhält man eine zweite von der ersten verschiedene Gleichung, nämlich $x - y = 2$, und die Aufgabe ist dann bestimmt; denn es ist in diesem Falle $x = 7$ und $y = 5$, wie wir unten sehen werden.

Anmerkung. Die niedere oder Elementar-Algebra lehrt nur folgende Gleichungen auflösen:

a) Alle einfachen Gleichungen mit einer oder mehreren unbekannten Größen;

b) jede reine und gemischte quadratische Gleichung;

c) jene Gleichungen, welche sich als quadratische behandeln lassen;

d) alle reinen höhern Gleichungen; und endlich

e) jene Gleichungen, auf welche leichtere unbestimmte Probleme führen.

Uebrigens kann man auch die Gleichungen des dritten und vierten Grades noch in das Gebiet der Elementar-Algebra rechnen.

Man nennt die Algebra auch Analysis (Analytik), und theilt sie

1) in die Analysis des Endlichen (Elementar-Algebra),

2) in die Analysis des Unendlichen (höhere Algebra oder Analysis).

Die Elementar-Algebra nennt man die bestimmte oder unbestimmte Analytik, je nachdem sie sich mit der Auflösung bestimmter oder unbestimmter Probleme beschäftigt.

§. 206.

Vom Ordnen der Gleichungen.

Eine Gleichung ordnen, heißt sie so darstellen, daß sie folgende Eigenschaften erhält:

1) Die unbekannte Größe darf in keinem Gliede als Divisor erscheinen.

Eigentlich dürfen in einer geordneten Gleichung gar keine Brüche vorkommen; jedoch ist diese Eigenschaft bei Gleichungen des ersten und zweiten Grades nicht nöthig.

2) Alle Glieder, in welchen die unbekannte Größe vorkommt, müssen auf einer Seite (gewöhnlich auf der ersten) der Gleichung stehen, und alle bekannten Theile auf der andern Seite.

3) Die Glieder, welche dieselbe Potenz der unbekannten Größe enthalten, müssen reducirt werden.

4) Die unbekannte Größe darf unter keinem Wurzelzeichen vorkommen.

5) Die einzelnen Glieder werden nach den fallenden Potenzen der gesuchten Größe geordnet.

6) Das erste Glied, welches demnach die höchste Potenz von x enthält, muß positiv sein, und darf nur die Einheit als Koefficienten haben.

Endlich suche man die Gleichung so einfach als möglich darzustellen, indem man dieselbe durch den größten gemeinschaftlichen Faktor dividirt.

Die Vorschrift, einer formirten Gleichung diese Eigenschaften zu verschaffen, ist in den (§. 204) gegebenen Fundamentalregeln enthalten.

Beispiele.

I. Man ordne die Gleichung $\frac{x+4}{x-2} = 3x - 8$.

$$x + 4 = (3x - 8)(x - 2),$$
$$x + 4 = 3x^2 - 8x - 6x + 16,$$
$$x - 3x^2 + 8x + 6x = 16 - 4,$$
$$-3x^2 + 15x = 12,$$
$$x^2 - 5x = -4.$$

II. Die Gleichung $\frac{3x-2}{x+2} + \frac{x}{3} = 6 - \frac{x+2}{x-2}$ soll geordnet werden. Multiplicirt man die ganze Gleichung mit $3(x^2 - 4)$, so findet man

$$3(x-2)(3x-2) + x(x^2-4) = 6.3(x^2-4) - 3(x+2)(x+2),$$
$$9x^2 - 24x + 12 + x^3 - 4x = 18x^2 - 72 - 3x^2 - 12x - 12,$$
$$9x^2 - 28x + 12 + x^3 = 15x^2 - 12x - 84,$$
$$x^3 - 6x^2 - 16x = -84 - 12 = -96.$$

III. Man ordne die Gleichung $\frac{a+x}{a-x} + \frac{mx}{a^2-x^2} = \frac{nx^2}{a+x} + 2$.

$$(a+x)^2 + mx = nx^2(a-x) + 2(a^2 - x^2),$$
$$a^2 + 2ax + x^2 + mx = anx^2 - nx^3 + 2a^2 - 2x^2,$$
$$2ax + x^2 + mx - anx^2 + nx^3 + 2x^2 = 2a^2 - a^2,$$
$$nx^3 - (an-3)x^2 + (2a+m)x = a^2,$$
$$x^3 - \frac{an-3}{n}x^2 + \frac{2a+m}{n}x = \frac{a^2}{n}.$$

IV. Man ordne die Gleichung $x - 2\sqrt{x} = 3$. Man setze

$$x - 3 = 2\sqrt{x},$$
$$(x-3)^2 = (2\sqrt{x})^2,$$
$$x^2 - 6x + 9 = 4x;$$
$$x^2 - 10x = -9 \text{ oder}$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0.$$

V. Die Gleichung $6\sqrt[3]{1-x} = 4x + 2\sqrt[3]{1-x}$ soll geordnet werden. Es folgt aus dieser Gleichung

$$\sqrt[3]{1-x} = x, \text{ und hieraus endlich}$$
$$x^3 + x = 1.$$

VI. Man ordne die Gleichung $3\sqrt{x-1} = 5\sqrt[4]{x-1}$.

$$[3\sqrt{x-1}]^2 = [5\sqrt[4]{x-1}]^2,$$
$$9(x-1) = 25\sqrt{x-1},$$
$$(9(x-1))^2 = (25\sqrt{x-1})^2,$$
$$81 x = 706,$$
$$x = \tfrac{706}{81} = 8\tfrac{58}{81}.$$

Zur Uebung ordne man noch folgende Gleichungen:

1) $3\sqrt{12 - \sqrt{x-3}} = \sqrt{5x+21}$,

2) $\dfrac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})} - \dfrac{3(2-\sqrt{x})}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$.

Erstes Kapitel.

Bestimmte Analytik.

A. Von der Auflösung einfacher Gleichungen.

§. 207.

a) Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Eine einfache Gleichung mit einer einzigen Unbekannten ist aufgelöst (§. 203), so bald man mittelst der §. 204 aufgestellten Grundprincipien alle §. 206 angegebenen Erfordernisse in die Gleichung gebracht hat, wie aus folgenden Beispielen zu ersehen ist.

I. $(x+a)(x-b)=(2a-x)(b-x)+c.$

$$x^2+ax-bx-ab=2ab-bx-2ax+x^2+c,$$

$$2ax+ax=2ab+c+ab,$$

$$3ax=3ab+c,$$

$$x=\frac{3ab+c}{3a}=b+\frac{c}{3a}.$$

II. $\frac{3x}{4}+\frac{5x}{2}-3=\frac{2x}{3}+2x+4.$

$$9x+30x-36=8x+24x+48,$$

wenn man mit 12 multiplicirt; also

$$39x-32x=48+36=84,$$

$$7x=84 \text{ und } x=\tfrac{84}{7}=12.$$

III. $\frac{ax^3}{a-x}=\frac{bx^3}{a+x}.$ Dividirt man durch x^3, so ist

$$\frac{a}{a-x}=\frac{b}{a+x}; \text{ woraus folgt}$$

$$x=\frac{a(b-a)}{a+b}.$$

IV. $\frac{3a-x}{a+x}-c=\frac{a-x}{x}-\frac{cx}{a+x}.$

$$3ax-acx=a^2,$$

$$x=\frac{a}{3-c}.$$

V. $5x + \sqrt{25x^2 + 3x + 50} = 71.$

$\sqrt{25x^2 + 3x + 50} = 71 - 5x,$

$25x^2 + 3x + 50 = (71 - 5x)^2 = 5041 - 710x + 25x^2,$

$x = \frac{4991}{713} = 7.$

VI. $\frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{b\sqrt{x}}{c} = (m - n)\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{x}}.$

$ac - bx = c(m - n)x + c^2,$

$x = \frac{c(c - a)}{c(n - m) - b}.$

VII. Sei $ax + b = \alpha x + \beta$, so folgt hieraus

$$x = \frac{\beta - b}{a - \alpha} = \frac{b - \beta}{\alpha - a}$$

und es entspricht der Gleichung nur ein einziger Werth.

Für $b = \beta$ und $a \gtrless \alpha$ wird $x = 0$

„ $b = \beta$ „ $a = \alpha$ „ $x = \frac{0}{0}$

„ $b \gtrless \beta$ „ $a \gtrless \alpha$ „ $x = \pm r$

„ $b \gtrless \beta$ „ $a = \alpha$ „ $x = \pm \infty$.

Der Werth von x ist also im Allgemeinen entweder Null, oder unbestimmt, oder eine positive oder negative endliche Größe oder unendlich groß.

§. 208.

Aufgaben mit einer unbekannten Größe.

Aufgabe 1.

Es wurden 63 fl. an vier Arme, A, B, C und D, so vertheilt, daß B um einen Gulden mehr bekam, als A; C erhielt 1 fl. mehr, als A und B zusammen, und D bekam um 1 fl. mehr, als die drei erstern zusammen. Wie viel erhielt nun jeder?

Anleitung zur Formation der Gleichung.

Setzen wir, es habe

A erhalten x fl., so hat

B „ $(x + 1)$ fl.,

C „ $2x + 1 + 1 = 2x + 2$ und

D „ $x + x + 1 + 2x + 2 + 1 = (4x + 4)$ fl. erhalten.

Da nun die ganze vertheilte Summe 63 fl. betrug, so muß offenbar $x + (x + 1) + (2x + 2) + (4x + 4) = 63$ sein, oder

$$8x + 7 = 63,$$
$$8x = 63 - 7 = 56 \text{ und}$$
$$x = \tfrac{56}{8} = 7.$$

Demnach erhielt A 7 fl. $= 7$ fl.
B $7 + 1 = 8$ „
C $15 + 1 = 16$ „
D $31 + 1 = 32$ „

Summe $= 63$ fl.

Aufgabe 2.

Ein Landmann sagte zu seinem Nachbar: Ich habe heute 5 Metzen Korn gekauft; im vorigen Jahre kosteten mich 9 Metzen nur 1 fl. mehr, als diese 5 Metzen; also ist jetzt die Metze um 3 fl. theurer, als voriges Jahr. Wie theuer wurde die Metze gekauft?

Formation der Gleichung.

Setzen wir, es seien x fl. für 5 Metzen bezahlt worden, so kostete 1 Metze $\frac{x}{5}$ fl. Ein Jahr früher wurden 9 Metzen um $(x + 1)$ fl. gekauft, also kam damals 1 Metze auf $\frac{x+1}{9}$ fl. Es ist daher der Bedingung der Aufgabe zur Folge

$$\frac{x}{5} = \frac{x+1}{9} + 3, \text{ also}$$
$$9x = 5x + 5 + 135,$$
$$4x = 140 \text{ und } x = \tfrac{140}{4} = 35 \text{ fl.}$$

d. i. die 5 Metzen kosteten 35 fl., also 1 Metze $\frac{35}{5} = 7$ fl., und 1 Jahr früher kam die Metze nur auf $7 - 3 = 4$ fl. zu stehen.

Aufgabe 3.

Ich bin jetzt 46 Jahre alt, sagte Cajus; mein älterer Sohn ist 11 Jahre, und mein jüngerer 9 Jahre alt. Wann werden meine beiden Söhne zusammen so alt sein, wie ich?

Auflösung.

Man nehme an, es geschehe in x Jahren, so ist dann der Vater $46+x$, der ältere Sohn $11+x$, und der jüngere $9+x$ Jahre alt; also muß

$$46+x=(11+x)+(9+x) \text{ sein, oder}$$
$$46+x=20+2x \text{ und daher}$$
$$46-20=x; \text{ d. i.}$$
$$x=26.$$

Aufgabe 4.

Ein Wirth mischte 8 Eimer Wein von zwei Sorten. Von der ersten Sorte rechnete er die Maß auf 1 fl. und von der zweiten Sorte zu 48 kr.; nun verkaufte er den Eimer des so gemischten Weines um 35 fl. Wie viel hat er von jeder Weinsorte zu der Mischung genommen?

Auflösung.

Hat er x Eimer von der bessern Sorte genommen, so nahm er $(8-x)$ Eimer von der schlechtern. Von der erstern Sorte kam der Eimer auf 40 fl., also x Eimer auf $40 . x$ fl. Von der andern Sorte kam der Eimer auf 40×48 kr. $= 40 . \frac{4}{5}$ fl. $= 32$ fl., also $(8-x)$ Eimer auf $32\ (8-x)$ fl. Da er nun die ganze Mischung um 8×35 fl. $= 280$ fl. verkaufte, so muß $40x + 32\ (8-x) = 280$ sein, oder

$$40x + 256 - 32x = 280,$$
$$8x = 280 - 256 = 24,$$
$$x = \tfrac{24}{8} = 3 \text{ und } 8 - x = 8 - 3 = 5.$$

Wie kann man diese Aufgabe kürzer auflösen?

Aufgabe 5.

Von zwei Brunnenröhren A und B, aus welchen mit unveränderter Geschwindigkeit Wasser fließt, füllt die eine A einen Behälter in a Stunden; die andere B aber in b Stunden. In wie viel Zeit wird jener Behälter gefüllt werden, wenn sich beide Röhren zugleich in denselben ergießen?

Auflösung.

Man nehme an, der Behälter würde unter der gegebenen Bedingung in x Stunden gefüllt, und schließe dann also: A füllt den

ganzen Behälter in a Stunden allein, also in 1 Stunde den $\frac{1}{a}$ Theil, und in x Stunden $\frac{x}{a}$ Theile. Eben so wird auch die Röhre B in x Stunden $\frac{x}{b}$ Theile des Behälters (dessen Capacität = 1 Eimer, Fuder oder Kubikfuß, oder was immer für einer andern Maßeinheit gleich sein mag) anfüllen. Hieraus folgt denn sogleich, daß beide Röhren, wenn sie zugleich x Stunden fließen, $\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{b}\right)$ Theile des Behälters, d. i. den ganzen Behälter anfüllen, und wir haben demnach die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1,$$
$$bx + ax = ab,$$
$$(a + b)\,x = ab$$
$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Aufgabe 6.

Ein Vater versprach seinem Sohne, ihm jeden Tag, wenn er seine Arbeit gut machen würde, 10 kr. zu schenken; fiel aber die Arbeit schlecht aus, so zog er ihm jedesmal 18 kr: ab. Nach 30 Tagen erhielt der Sohn 2 fl. 12 kr. von seinem Vater. Wie oft hat er nun gut, und wie oft schlecht gearbeitet?

Auflösung.

Wenn man die Anzahl der guten Arbeiten mit x bezeichnet, so ist klar, daß die Anzahl der schlechten durch 30 — x bezeichnet werden müsse. Der Sohn erhielt demnach 10 . x kr., und mußte 18 (30 — x) kr. Strafe zahlen. Da er aber am Ende des Monats 2 fl. 12 kr. oder 132 kr. erhielt. so wird obige Frage durch die Auflösung der Gleichung $10x - 18(30 - x) = 132$ beantwortet.

$$10x - 540 + 18x = 132,$$
$$28x = 132 + 540 = 672,$$
$$x = \tfrac{672}{28} = 24 \quad \text{und}$$
$$30 - x = 30 - 24 = 6;$$

d. i. der Sohn war 24 Tage fleißig und 6 Tage liederlich.

Aufgabe. 7.

Es bewegen sich zwei Körper k und k' in der Richtung einer und derselben geraden Linie; k durchläuft in der Zeit T den Raum R,

und k' in der Zeit t den Raum r, oder beide Körper bewegen sich beziehungsweise mit der Geschwindigkeit $G = \frac{R}{T}$ und $g = \frac{r}{t}$. Die Entfernung der Orte, von welchen aus sie sich zu bewegen anfangen, sei $= a$, und der Unterschied der Zeiten, in welchen die Bewegung beider Körper beginnt, sei $= d$. Man soll nun den Punkt bestimmen, in welchem sie zusammentreffen, oder, was dasselbe ist, den Weg, den beide Körper bis zu ihrem Zusammentreffen durchlaufen müssen.

Auflösung.

Es können hier zwei Hauptfälle Statt finden; denn entweder bewegen sich k und k' nach derselben Richtung, oder in entgegengesetzten Richtungen gegen einander.

Fall I. Zur leichtern Uebersicht wollen wir folgende Figur beifügen:

C″ kA C′ Bk′ C

wo AB die Entfernung a beider Körper bezeichnen soll, und zwar sei k im Punkte A, und k' im Punkte B, und beide sollen sich gegen C, also nach derselben Richtung hin bewegen. Man denke sich ferner, daß beide Körper im Punkte C endlich zusammentreffen, und setze also den Weg des Körpers k, nämlich $AC = x$, so ist $BC = AC - AB = x - a$ der von k' durchlaufene Raum.

Da wir die Gleichförmigkeit der Bewegung voraussetzen, so erhellt, (§. 175, Zus.) von selbst, daß, wenn wir vorläufig x als bekannt ansehen, die Zeiten y und y', welche k und k' zur Zurücklegung der bestimmten Räume nöthig haben, durch folgende Proportionen bestimmt werden:

$$R : x = T : y, \text{ wo } y = \frac{Tx}{R} = \frac{x}{G}$$

$$r : x - a = t : y', \text{ wo } y' = \frac{t}{r}(x - a) = \frac{x - a}{g}$$

Hier müssen wir nun im Allgemeinen wieder zwei Fälle unterscheiden. denn es kann $\frac{Tx}{R} \gtrless \frac{tx - at}{r}$ sein; d. i. es kann k oder k' sich früher zu bewegen beginnen.

α) Im ersten Falle ist offenbar $\frac{Tx}{R} > \frac{tx - at}{r}$, und zwar der Bedingung der Aufgabe zu Folge $\frac{Tx}{R} - d = \frac{tx - at}{r}$, also

$$rTx - Rr.d = Rtx - atR,$$
$$rTx - Rtx = Rrd - atR,$$
$$(rT - Rt)x = R(dr - at) \text{ und}$$
$$x = \frac{R(dr - at)}{rT - Rt}, \text{ oder}$$
$$x = \frac{R(at - dr)}{Rt - rT}.$$

β) Bewegt sich aber k' um d Zeittheile früher als k, so muß $\frac{Tx}{R} + d = \frac{tx - at}{r}$ sein, und dann ist

$$rTx + Rrd = Rtx - Rat, \text{ also}$$
$$Rat + Rrd = Rtx - rTx,$$
$$R(at + dr) = (Rt - rT)x,$$
$$x = \frac{R(at + dr)}{Rt - rT}.$$

Anmerkung. 1. Modificiren wir die Aufgabe dahin, daß beide Körper sich zu gleicher Zeit unter den übrigen Bedingungen bewegen, so dürfen wir in unsern Formeln nur $d = 0$ setzen, wodurch wir die Gleichung $x = \frac{atR}{Rt - rT}$ erhalten.

2. Setzen wir aber, daß k und k' von demselben Punkte (z. B. A) aus unter den übrigen Bedingungen der Aufgabe sich bewegen, so dürfen wir nur in den obigen Gleichungen $a = 0$ setzen, und dann erhält man $x = \frac{-rdR}{Rt - rT} = \frac{drR}{rT - Rt}$, wenn k sich früher bewegt, und $x = \frac{drR}{Rt - rT}$, wenn k' sich früher in Bewegung setzt.

3. Bewegen sich endlich k und k' gleichzeitig und von demselben Orte aus, so ist $a = 0$ und $d = 0$, und dann gibt die Gleichung $x = \frac{R.0}{Rt - rT} = 0$ die bestimmte Antwort: Sie holen einander nicht ein, oder streng genommen, sie sind nur im Momente ihres Abhanges beisammen.

4. Setzen wir $T = t = 1$, so ist $x = \frac{R(a - dr)}{R - r}$, wenn k früher abging, und $x = \frac{R(a + dr)}{R - r}$, wenn k' früher abging. Setzt man endlich $R = r$ und $a = d = 0$, so wird aus der ersten Gleichung

$x = \frac{0}{0}$ oder $x . 0 = 0$. Welcher Werth auch immer für x gesetzt werden mag, so ist doch immer $x . 0 = 0$ oder $x = \frac{0}{0}$, und daher ist $\frac{0}{0}$ das Symbol der Unbestimmtheit, wenn dieser Ausdruck das letzte Resultat der Rechnung ist.

Die Bedingungen dieser Aufgabe lassen sich noch auf verschiedene Arten modificiren, welches ich dem eigenen Nachdenken des Anfängers überlasse.

Fall II. Bewegen sich k und k′ gegen einander, so ist, wenn man den von k durchlaufenen Raum $AC' = x$ setzt, der von k′ zurückgelegte Weg $= BC' = AB - AC' = a - x$. Wir dürfen demnach in den beiden Bedingungsgleichungen des vorigen Falles statt $x - a$ nur $a - x$ setzen, um den letzten vorgelegten Fall richtig aufzulösen. Es ist nämlich

1) $\frac{Tx}{R} - d = \frac{at - tx}{r}$,

$rTx - Rrd = Rat - Rtx$,

$rTx + Rtx = Rat + Rrd$,

$x = \frac{R(at + dr)}{Rt + rT}$, wenn k früher sich bewegte.

2) $\frac{Tx}{R} + d = \frac{at - tx}{r}$,

$rTx + Rrd = Rat - Rtx$,

$rTx + Rtx = Rat - Rrd$,

$(rT + Rt)x = R(at - rd)$,

$x = \frac{R(at - dr)}{Rt + rT}$, wenn k′ sich zuerst in Bewegung setzte.

Für $a = 0$ finden wir aus der (Nr. 2) aufgestellten Gleichung $x = -\frac{drR}{Rt + rT}$, wo der negative Werth für x nichts anders aussagt, als daß die Richtung der Bewegung für k der angenommenen gerade entgegengesetzt sein müsse, wenn er den Körper k′ einholen soll.

Der negative Werth drückt demnach hier gewissermaßen eine Unmöglichkeit aus, welche zwar nicht absolut, aber doch in Beziehung auf den, den Größen beigelegten Sinn vorhanden ist. Wir wollen die hier allgemein abgeleiteten Formeln auf mehrere praktische Beispiele anwenden.

Beispiel 1.

Es geht von Wien ein Courier k nach Paris ab, und macht in 3 Stunden 5 Meilen. Von Linz wird ein anderer Courier k' 20 Stunden später, als der erste von Wien abging, jenem nachgeschickt. Wenn nun k' in 5 Stunden 12 Meilen macht, und Linz 26 Meilen von Wien entfernt ist; wann wird k' den k erreichen?

Auflösung.

Dieses Beispiel wird nach der Gleichung (α) Fall I. berechnet, wenn wir dort $T = 3$, $R = 5$, $t = 5$, $r = 12$, $a = 26$ und $d = 20$ setzen. Durch diese Substitution erhält man $x = \frac{5\,(26.5 - 20.12)}{5.5 - 12.3} = 50$, also $x - a = 50 - 26 = 24$ Meilen, d. i. k' hat 24 Meilen zu machen, um k zu erreichen, wozu er 10 Stunden Zeit nöthig hat; denn es ist

12 Meilen : 24 Meilen = 5 Stunden : y Stunden, oder
$1 : 2 = 5 : y$, also $y = 2 . 5 = 10$.

Hätte man in diesem Beispiele $d = 9$ gesetzt, so hätte man $x = -10$, also $x - a = -10 - 26 = -36$ gefunden, d. h. es müßte k' 36 Meilen nach der entgegengesetzten Richtung (von Linz gegen Wien hin) machen, und k 9 Stunden später 10 Meilen in derselben Richtung rückwärts, um von k' eingeholt zu werden. Aendert man also die Aufgabe so ab, daß man sagt: „k' geht von Linz über Wien (etwa nach Pest) mit der Geschwindigkeit $\frac{12}{5}$ (d. h. er macht 12 Meilen in 5 Stunden), und k geht 9 Stunden später von Wien nach Pesth ab, mit der Geschwindigkeit $\frac{5}{3}$ (d. h. er macht 5 Meilen in 3 Stunden); wann wird k' den k einholen?“ so erhält man für x den positiven Werth 36, als den Weg für k', und 10 als den Weg für k, wenn man in der obigen allgemeinen Formel die gehörigen Werthe substituirt. Nur bemerke ich hier noch, daß in der genannten Formel die Größen R und r, T und t der Natur der Formel gemäß verwechselt werden müssen.

Der oben für x gefundene negative Werth sagt auch hier wieder, daß die Bedingungen der Aufgabe im entgegengesetzten Sinne genommen werden müssen, wenn auf die in der Aufgabe gestellte Frage mit Bestimmtheit geantwortet werden soll.

Beispiel 2.

Es seien hier wieder dieselben Bedingungen, wie im vorigen Beispiele, nur setze man, daß k' von Wien aus dem k nachgeschickt werde, oder man setze $a = 0$.

Die Auflösung liegt in der Formel $x = \frac{drR}{rT - tR}$, aus welcher durch Substitution $x = \frac{20 . 12 . 5}{12 . 3 - 5 . 5} = \frac{1200}{36 - 25} = \frac{1200}{11} = 109\frac{1}{11}$ erhalten wird, welches der Weg für k und k' ist. Da nun k in 3 Stunden 5 Meilen macht, oder zur Zurücklegung von 1 Meile $\frac{3}{5}$ Stunden braucht, so hat er offenbar $\frac{1200}{11} \times \frac{3}{5} = \frac{720}{11}$ Stunden nöthig, um $\frac{1200}{11}$ Meilen zurückzulegen; k' aber braucht hierzu nur $\frac{1200}{11} . \frac{5}{12} = \frac{500}{11}$ Stunden. Weil nun $\frac{720}{11} - \frac{500}{11} = \frac{220}{11} = 20$ ist, so ist die Rechnung richtig.

Würde man hier $R = r$ und $T = t$, d. i. würde man die Geschwindigkeiten beider Couriere einander gleich setzen, so wäre dann $x = \frac{drR}{RT - RT} = \frac{drR}{0}$ ein Ausdruck, welcher sagt, daß die gestellte Frage absurd sei, und daß die Aufgabe etwas Unmögliches verlange. Es ist nämlich

$$x = \frac{dR^2}{0} = \infty,$$

d. h. größer, als jede noch so große angebbare Zahl, oder unendlich groß, es würde daher k erst in einer unendlichen Entfernung, d. i. niemals eingeholt werden können.

Setzen wir im letzten Beispiele, daß k' sich früher bewegt, als k, so liegt die Antwort auf die gestellte Frage in der Gleichung $x = \frac{drR}{Rt - rT}$ oder $x = \frac{20 . 12 . 5}{5 . 5 - 12 . 3} = \frac{1200}{25 - 36} = \frac{1200}{- 11} = - \frac{1200}{11}$, wo der negative Werth wieder das Sinnbild (Symbol) des Unmöglichen ist. Denn da k' schneller geht als k, so kann auch k' von k nicht eingeholt werden.

Beispiel 3.

Am 23. September brach ein Regiment von Lemberg nach Wien auf, und machte täglich 4 Meilen. Am 28. September reiste ein Courier von Wien aus dem Regimente entgegen um ihm Gegenordre zu bringen, und machte täglich 16 Meilen. Wann hat dieser Eilbote

das Regiment getroffen, wenn die Entfernung beider Orte $= 100$ Meilen gesetzt wird?

Die Auflösung enthält die Formel $x = \frac{R(at - dr)}{Rt + rT}$ (Fall II. 2). Hier ist $T = t = 1$ Tag; $R = 16$, $r = 4$, $a = 100$ und $d = 28 - 23 = 5$, also $x = \frac{16(100 - 5 \cdot 4)}{16 + 4} = \frac{4}{5} \cdot 80 = 64$ Meilen, als Weg für den Eilboten, zu dessen Zurücklegung derselbe 4 Tage brauchte; der Courier erreichte also das Regiment am 1. Oktober.

Beispiel 4.

Ein Komet bewegt sich mit dem Monde in derselben Richtung, und ist diesem um 25 Grade voraus. Wenn nun der Mond täglich 13^0, der Komet aber nur 10^0 durchläuft, wann wird der Mond den Kometen erreichen?

Dieser Fall wird (nach Fall I. Anm. 1) berechnet, wo $x = \frac{atR}{Rt - rT}$ gefunden wurde. Für unser Beispiel geht diese Formel über in $x = \frac{aR}{R - r}$, weil $t = T = 1$ gesetzt ist. Hier ist nun $a = 25^0$, $R = 13^0$, $r = 10^0$; also $x = \frac{25 \cdot 13}{13 - 10} = \frac{325}{3} = (108\frac{1}{3})^0 = 108^0\,20'$ (der Weg für den Mond), und $x - a = 108^0\,20' - 25^0 = 83^0\,20'$ (der Weg für den Kometen).

Da ferner der Mond täglich 13^0, und der Komet täglich 10^0 durchlauft, so findet man aus den Proportionen:

$$13^0 : \frac{325^0}{3} = 1 \text{ Tag} : y, \text{ oder}$$

$$1 : \frac{25}{3} = 1 : y \text{ und}$$

$$10^0 : 83^0\tfrac{1}{3} = 1 : z,$$

$$30 : 250 = 1 : z,$$

$$y = \tfrac{25}{3} \text{ Tag (Zeit für den Mond), und auch}$$

$$z = \tfrac{250}{30} = \tfrac{25}{3} \text{ Tag (Zeit für den Kometen);}$$

d. i. der Mond wird den Kometen in $\frac{25}{3}$ Tagen $= 8$ Tagen 8 Stunden einholen.

Beispiel 5.

A fragte den B, wie viel Uhr es sei. B antwortete: Ich kann es nicht mehr genau sehen; aber bemerke doch, daß beide Zeiger zwischen 6 und 7 Uhr genau über einander liegen. Wie viel Uhr mag es wohl gewesen sein?

Hier gilt, wie im vorigen Beispiele, die Formel $x = \frac{aR}{R - r}$, wo für die hier gegebene Frage $a = 30$, $R = 60$ und $r = 5$ ist. Denn man denke sich nur, daß der Stundenzeiger (z) genau auf 6 zeige, so muß der Minutenzeiger (Z) genau auf 12 zeigen, und beide stehen von einander um 30 Raumtheile ab, weil der ganze Kreis auf der Zifferplatte in 60 gleiche Theile getheilt ist. Da nun Z durch 60 Raumtheile läuft, bis z nur 5 solche Theile durchläuft, so sind eben diese Zahlen die Verhältnißzahlen der Geschwindigkeiten beider Zeiger, und daher $R = 60$ und $r = 5$; also

$$x = \frac{30 \cdot 60}{60 - 5} = \frac{30 \cdot 60}{55} = \tfrac{360}{11} = 32'\tfrac{8}{11},$$

d. i. Z muß $32'\frac{8}{11}$, oder $32'\,43''\frac{7}{11}$ durchlaufen, bis er z zwischen 6 und 7 decken kann. Es war demnach $6^h\,32'\,43''\frac{7}{11}$.

Wie viel Uhr ist es, wenn beide Zeiger genau in gerader Linie liegen, und der Stundenzeiger zwischen 4 und 5 Uhr steht? — Zur Uebung.

Aufgabe 8.

Ein Studirender schrieb seinem Vater: Ich habe von dem Gelde, welches Sie mir mitgaben, den achten Theil für Kost und Quartier, und den zwanzigsten Theil für Bücher und Wäsche monatlich ausgegeben. Nach fünf Monaten blieben mir nur noch 50 fl., und jetzt, nach einem Jahre, bin ich noch 40 fl. über mein mitgebrachtes Geld schuldig. Wie viel Geld hatte der Sohn von seinem Vater erhalten, und wie viel hat er ausgegeben?

Auflösung.

Bezeichnen wir das mitgebrachte Geld durch x, so ist die monatliche Ausgabe $\frac{x}{8} + \frac{x}{20} = \frac{7x}{40}$, und die 5-monatliche $5 \cdot \frac{7x}{40} = \frac{7x}{8}$, folglich ist der Aufgabe zu Folge $\frac{7x}{8} + 50 = x$; $7x + 400 = 8x$ und $x = 400$ fl.

Wir sehen, daß in der Aufgabe mehr Bedingungen angegeben wurden, als zur Bestimmung der Unbekannten nöthig waren. Wäre die Bedingung, daß der Sohn nach 5 Monaten nur noch 50 fl. gehabt habe, weggeblieben; so hätten wir die Gleichung

$$12 \cdot \frac{7x}{40} = x + (x + 40), \text{ oder } 21x = 20x + 400,$$

und hieraus $x = 400$ fl., wie vorhin gefunden. Die monatliche Auslage betrug demnach $\frac{7.400}{40} = 70$ fl., die 12monatliche aber $12.70 = 840$ fl., also hatte er $840 - 400 = 440$ fl. Schulden.

Aufgabe 9.

Man hat zweierlei Materien A und B; von A sei der Werth der Einheit $= a$, von B aber sei der Werth der Einheit $= b$. Wenn man nun aus beiden eine Mischung M von n Einheiten machen will, und der Werth einer jeden solchen Einheit $= c$ sein soll, wie viel Einheiten muß man von jeder Materie zur verlangten Mischung nehmen?

Auflösung.

Bezeichnen wir die Menge der Einheiten, welche von A genommen werden müssen, durch x, so drückt offenbar $n - x$ die Menge der Einheiten aus, welche von B zur Mischung zu nehmen sind. Der Aufgabe gemäß beträgt der Werth der x Einheiten von A, ax, der Werth der $n - x$ Einheiten von B aber ist $= (n - x) b$, also ist der Werth der ganzen Mischung $= ax + (n - x) b$. Weil ferner der Werth der Einheit von $M = c$ sein soll, so ist der Werth der ganzen Mischung auch $= c . n$, und daher muß $ax + (n - x) b = cn$ sein. Hieraus folgt:

$$ax + nb - bx = cn,$$

$$(a - b) x = cn - bn \text{ und}$$

$$x = \frac{cn - nb}{a - b} = \frac{n(c - b)}{a - b}; \text{ also}$$

$$n - x = n - \frac{n(c - b)}{a - b} = \frac{n(a - b) - n(c - b)}{a - b} = \frac{n(a - c)}{a - b}.$$

Zusatz.

Aus den Gleichungen

$$(a - b) x = n (c - b) \text{ und } (n - x)(a - b) = n (a - c)$$

erhält man folgende Proportionen:

$$a - b : c - b = n : x,$$

$$a - b : a - c = n : n - x$$

also ist auch

$$c - b : a - c = x : n - x \text{ (§. 186, II).}$$

und $(a - c) + (c - b) : (c - b) = n : x,$

$$(a - c) + (c - b) : (a - c) = n : n - x \text{ (§. 180, 3).}$$

Hieraus fließt die Regel für die Alligationsrechnung, welche sich von der Vermischungsrechnung (§. 200) dadurch unterscheidet, daß in ihr das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst gesucht werden muß. Die obigen Proportionen geben uns folgende praktische Regel zur Berechnung der hierher gehörigen Beispiele:

„Man schreibe den höhern und geringern Werth oder Preis unter einander, und links zwischen beide vorigen den mittlern Preis. Rechts setze man zum größern Werthe die Differenz zwischen dem mittleren und dem geringeren Werthe, zu diesem aber den Unterschied zwischen dem höhern und mittleren Werthe; so bilden diese Differenzen die Glieder des Verhältnisses, in welchem die gegebenen Materien zur verlangten Mischung genommen werden müssen."

Beispiel 1.

Es hat jemand zwei Sorten Wein, A und B. Von A kostet die Maß 1 fl. 15 kr. (= 75 kr.), und von B kostet die Maß 50 kr. Wenn er nun ein Faß von 5 Eimer mit A und B anfüllen will, so daß die Maß auf 1 fl. kommt, wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Man setze

1 fl. = 60 kr. = c	75 kr. = a	10 = c — b
	50 kr. = b	15 = a — c
	25 = a — b	= (c — b) + (a — c).

Es müssen also auf 10 Maß der bessern Sorte 15 Maß von B gerechnet werden, d. i. auf 10 + 25 = 35 Maß der Mischung kommen 10 Maß von A und 15 Maß von B; folglich

Maß

25 : 200 (= 5 Eim.) = 10 : x, wo x = 80 Maß

und 25 : 200 = 15 : n — x, wo n — x = 120 Maß

(n — x) + x = n = 200 Maß.

Beispiel 2.

Ein Silberarbeiter hat mehrere Stücke von 13löthigem Silber zu verfertigen, deren Gewicht 24 Mark betragen soll. Nun hat er aber bloß 10löthiges und 15löthiges Silber vorräthig; wie viel muß er von beiden Silbersorten zur Mischung nehmen?

Hier ist $n = 24$, $a = 15$, $b = 10$ und $c = 13$; also

$$x = \frac{n(c-b)}{a-b} = \frac{24(13-10)}{15-10} = \frac{24.3}{5} = \frac{72}{5} = 14{\cdot}4 \text{ Mark von A}$$

und

$$n - x = \frac{n(a-c)}{a-b} = \frac{24(15-13)}{15-10} = \frac{24.2}{5} = \frac{48}{5} = 9{\cdot}6 \text{ Mark von B.}$$

Beispiel 3.

Ein Goldarbeiter hat 12 Mark 18karätiges Gold. Wie viel 13 karätiges Gold muß er zusetzen, damit die Mischung 15karätig wird? Zur Uebung.

Wie man verfährt, wenn mehrere Materien gemischt werden sollen, wird weiter unten gezeigt werden.

Aufgabe 10.

Es hat A an B folgende Forderungen zu machen: a fl. nach m Monaten, b fl. nach n Monaten, c fl. nach p Monaten, und d fl. nach q Monaten; A braucht nothwendig Geld, und läßt sich von B alle Schuldposten sogleich bezahlen. Wie viel erhält A, wenn B τ Procent per Monat (per mese) rechnet?

Auflösung.

Aus 100 fl. werden in m Monaten offenbar $100 + m\tau$, aber $(100 + m\tau)$ fl., welche erst nach m Monaten zahlbar sind, haben einen baaren Werth von 100 fl., mithin erhalten wir die Proportion:

$$(100 + m\tau) : a = 100 : x_1, \text{ also}$$

$$x_1 = \frac{100a}{100 + m\tau}: \text{ eben so ist}$$

$$x_2 = \frac{100b}{100 + n\tau},$$

$$x_3 = \frac{100c}{100 + p\tau} \text{ und}$$

$$x_4 = \frac{100d}{100 + q\tau},$$

folglich ist der baare Werth aller Schuldposten:

$$x = 100\left[\frac{a}{100+m\tau}+\frac{b}{100+n\tau}+\frac{c}{100+p\tau}+\frac{d}{100+q\tau}\right].$$

Beispiel.

Der Kaufmann A hat an B folgende Wechsel zu zahlen:

600	Thaler	banco	nach	3	Monaten	zahlbar,
800	"	"	"	4	"	"
1000	"	"	"	5	"	"
400	"	"	"	6	"	"

B bedarf zu einer Unternehmung Geld, und läßt sich einen Escompte von 6% gefallen; welche Summe wird also A baar zu zahlen haben?

Wenn 100 fl. Kapital in 1 Jahre 6 fl. Zinsen tragen, so geben sie $\frac{1}{2}$ fl. per Monat ($\frac{1}{2}$ per mese), mithin ist hier $\tau = \frac{1}{2}$. Die weitere Rechnung überlassen wir dem Fleiße des Anfängers.

Aufgabe 11.

Eine Oebstlerin kaufte einen Korb voll Aepfel, und bezahlte für 3 Aepfel 2 Kreuzer. Sie verkaufte immer 4 Stück um einen Groschen, und gewinnt so 1 fl. Wie viel Aepfel hat sie wohl gekauft?

Auflösung.

Da sie 3 Aepfel für 2 kr. erhielt, so kam ihr 1 Apfel auf $\frac{2}{3}$ kr., also x Aepfel auf $\frac{2x}{3}$. Sie verkaufte jedes Stück um $\frac{3}{4}$ kr., also x Stücke um $\frac{3x}{4}$ kr.; folglich ist

$$\frac{3x}{4} = \frac{2x}{3} + 60,$$

$$9x = 8x + 720,$$

$$x = 720.$$

Aufgabe 12.

A gab auf die Frage, wie alt er sei, zur Antwort: Mein Sohn und ich haben gerade 100 Jahre zusammen, und vor 20 Jahren war ich dreimal so alt, als mein Sohn. Wie alt bin ich nun?

Auflösung.

Das gegenwärtige Alter des Vaters sei $= x$, so ist das jetzige Alter des Sohnes $= 100 - x$; das Alter des Vaters vor 20 Jahren war $= x - 20$, und jenes des Sohnes $= 100 - x - 20 = 80 - x$; also ist der Aufgabe gemäß

$$x - 20 = 3\,(80 - x)\ .\ \text{woraus:}$$

$$x = \tfrac{260}{4} = 65 = \text{dem Alter des Vaters, und}$$

$$100 - x = 100 - 65 = 35 = \text{dem Alter des Sohnes}$$

gefunden wird.

Aufgabe 13.

Man hat drei Fässer A, B und C. Füllt man aus A das Faß B an, so bleiben in A $\frac{2}{3}$ des ganzen Inhalts. Füllt man aber C aus A an, so bleiben in A $\frac{5}{9}$ des Inhalts. Füllt man endlich B und C aus A an, so bleiben nur noch 8 Eimer in A. Wie viel Eimer hält jedes der drei Fässer?

Auflösung.

Der Inhalt von A sei $= x$, so ist der Inhalt von $B = \frac{1}{3}\,x$, und jener von $C = \frac{4}{9}\,.\,x$; und demnach muß $x = \frac{1}{3}\,x + \frac{4}{9}\,x + 8$ sein; mithin $x = 36$;

A hält also 36 Eimer, B $\frac{36}{3} = 12$ Eimer, und C $\frac{36\,.\,4}{9} = 16$ Eimer.

Aufgabe 14.

Ein Vater hinterließ seinen Kindern sein Vermögen, welches unter sie gleich vertheilt werden sollte. Das erste Kind erhielt 100 fl. und $\frac{1}{10}$ des Restes, das zweite 200 fl. und $\frac{1}{10}$ des Restes, das dritte 300 fl. und $\frac{1}{10}$ des Restes, und so erhielt jedes der übrigen immer um 100 fl. mehr, als das vorhergehende, und $\frac{1}{10}$ des jedesmaligen Restes. Wie groß war das Vermögen, und wie viel Kinder waren vorhanden?

Auflösung.

Das Vermögen sei $= x$ fl., so erhielt das erste Kind.

$$100 + \tfrac{1}{10}\,(x - 100) = \frac{1000 + x - 100}{10} = \frac{900 + x}{10};$$

worauf für die übrigen noch $x - \dfrac{900 + x}{10} = \dfrac{9x - 900}{10}$ blieben.

Das zweite Kind erhielt

$$200 + \frac{1}{10}\left(\frac{9x - 900}{10} - 200\right) = \frac{17100 + 9x}{100}.$$

Da nun die Theile gleich sein sollen, so muß auch

$$\frac{900 + x}{10} = \frac{17100 + 9x}{100}$$ sein, also

$$x = 17100 - 9000 = 8100.$$

Aufgabe 15.

Diophantus, der Verfasser des ältesten Buches über Algebra, welches wir aufzuweisen haben, verlebte den sechsten Theil seiner Lebenszeit als Kind, den zwölften als Jüngling: dann heirathete er, und verlebte 5 Jahre über den siebenten Theil seines Lebens in der Ehe, bis ihm ein Sohn geboren ward, den er um vier Jahre überlebte, und welcher nur halb so alt ward, als sein Vater. Wie alt ist Diophant geworden?

Auflösung.

Der Aufgabe gemäß ist

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \left(\frac{x}{7} + 5\right) + \left(\frac{x}{2} + 4\right) = x,$$

mithin $x = 84$.

Aufgabe 16.

Ein Kaufmann hatte von seinem im Handel befindlichen Kapitale jährlich 1000 fl. für seine Familie verwendet, und der Rest seines Kapitals nahm jährlich um den dritten Theil zu, so daß der Kaufmann nach drei Jahren sein Vermögen verdoppelt sah. Wie groß war anfangs das Kapital?

Auflösung.

Es sei das anfängliche Kapital $= x$, so bleiben nach Abzug der 1000 fl. noch $x - 1000$. Am Ende des ersten Jahres war das Kapital sammt Zuwachs

$$x - 1000 + \frac{x - 1000}{3} = \frac{4x - 4000}{3}.$$

Hiervon nimmt der Kaufmann wieder 1000 fl. weg, also bleiben ihm für das zweite Jahr $\frac{4x - 4000}{3} - 1000 = \frac{4x - 7000}{3}$, und

dieses Kapital wächst um $\frac{1}{3}$, also hatte er am Ende des zweiten Jahres

$$\frac{4x - 7000}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{4x - 7000}{3}\right) = \frac{16x - 28000}{9},$$

und nach Abzug der 1000 fl. für das dritte Jahr

$$\frac{16x - 28000}{9} - 1000 = \frac{16x - 37000}{9}.$$

Am Ende des dritten Jahres hatte er demnach

$$\frac{16x - 37000}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{16x - 37000}{9}\right) = \frac{64x - 148000}{27},$$

und der Aufgabe zu Folge ist

$$\frac{64x - 148000}{27} = 2x, \text{ also } x = 14800 \text{ fl.}$$

Aufgabe 17.

Ein Hund verfolgt einen Hasen, der ihm 88 Sprünge voraus ist. Der Hund macht 7 Sprünge, bis der Hase 5 macht, und kommt in 2 Sprüngen so weit, als der Hase in 3. In wie viel Sprüngen wird der Hase eingeholt sein?

Auflösung.

Setzen wir, daß der Hund in 2 Sprüngen z. B. einen Weg von 1 Klafter zurücklege, und in einer bestimmten Zeit 7 Sprünge mache, so legt er in jener Zeit einen Weg von $\frac{7}{2}$ Klafter zurück; d. i. die Geschwindigkeit des Hundes wird durch $\frac{7}{2}$ dargestellt werden können. Unter diesen Voraussetzungen muß den Bedingungen der Aufgabe gemäß der Hase in 3 Sprüngen eine Strecke von 1° zurücklegen, und in jener bestimmten Zeit einen Weg von $\frac{5}{3}$ Klafter; d. i. die Geschwindigkeit des Hasen wird durch $\frac{5}{3}$ bezeichnet. Nehmen wir nun an, daß der Hase nach x Sprüngen eingeholt werde, so muß der Hund einen Raum $= (88 + x)$ Hasensprüngen zurücklegen; und da sich bei einerlei Zeit die Geschwindigkeiten gerade wie die durchlaufenen Räume verhalten, so erhält man die Proportion:

$$\frac{7}{2} : \frac{5}{3} = 88 + x : x, \text{ oder}$$
$$21 : 10 = 88 + x : x,$$
$$21 - 10 : 10 = 88 : x,$$
$$1 : 10 = 8 : x,$$
$$x = 80;$$

d. i. der Hase kann noch 80 Sprünge machen, und weil drei Hasensprünge = 2 Hundesprüngen, oder 1 Hasensprung = $\frac{2}{3}$ Hundsprünge,

so sind $88 + 80$, d. i. 168 Hasensprünge $= 168 \frac{2}{3} = 56 . 2 = 112$ Hundsprüngen; nämlich der Hund erreicht den Hasen nach 112 Sprüngen.

Wie könnte man diese Frage mit Hilfe der oben (7ten Aufgabe) entwickelten allgemeinen Formeln beantworten?

Aufgabe 18.

Ein ostindischer Kaufmann sendet seiner Schwester in London als Geschenk 3256 Pfund Sterling mit folgender Bestimmung: Wenn du einen Sohn hast, so gib ihm drei Theile, und zwei Theile behalte für dich; hast du aber eine Tochter, so erhält diese nur den vierten Theil. Nun hatte aber die Frau wider Vermuthen ihres Bruders einen Sohn und eine Tochter. Wie mußte jene Summe vertheilt werden?

Auflösung.

Setzen wir den Antheil der Mutter $= x$, so ist der des Sohnes $= x + \frac{1}{2}x = \frac{3x}{2}$, und jener der Tochter $= \frac{x}{4}$, also

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{x}{4} = 3256, \text{ woraus}$$

$$x = 4 . 296 = 1184 \text{ gefunden wird.}$$

Die Mutter erhielt also . . .	1184	Pfd. Sterl.
Der Sohn $1184 + 592 =$	1776	„ „
Die Tochter $\frac{1184}{4}$ . . . . $=$	296	„ „
Summe $=$	3256	Pfd. Sterl.

§. 209.

b) Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

Wenn eine Aufgabe verlangt, die Werthe von zwei unbekannten Größen zu bestimmen, so müssen, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll (§. 205, C), die Bedingungen derselben auf zwei wesentlich verschiedene Gleichungen führen; d. i. auf zwei solche Gleichungen, von welchen keine durch bloße Transformation der andern erhalten werden kann. So sind z. B. $3x + 2y = 14$ und $5x - 8y = 12$ zwei wesentlich verschiedene Gleichungen; die beiden Gleichungen $3x - 5y = 7$ und $2x - \frac{10}{3}y = 4\frac{2}{3}$ aber sind nicht wesentlich von einander verschieden; denn die zweite wird aus der ersten erhalten,

wenn man diese mit 2 multiplicirt und mit 3 dividirt, oder kurz, wenn man die erste mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt.

Um Gleichungen mit zwei unbekannten Größen aufzulösen, führe man dieselben auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurück, welches auf verschiedene Art bewerkstelligt werden kann, wie aus den folgenden Paragraphen erhellen wird.

§. 210.

Erste Methode.

Man suche den Werth einer und derselben Unbekannten aus beiden Gleichungen nach §. 207, indem man vorläufig die andere Unbekannte als bekannt ansieht, und stelle beide Werthe einander gleich; so hat man eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, deren Werth nach §. 207 bestimmt werden kann.

Denn es seien die Gleichungen

$$\text{A.}\quad ax + by = c, \text{ also } x = \frac{c - by}{a}$$

$$\text{B.}\quad a'x + b'y = c', \quad \text{„} \quad x = \frac{c' - b'y}{a'}$$

gegeben, so ist

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}, \text{ oder } a'c - a'by = ac' - ab'y,$$

$$\text{folglich } y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Substituirt man diesen für y gefundenen Werth in einem der oben für x gefundenen Werthe, z. B. in dem ersten, so erhält man:

$$x = \frac{c - b\left(\frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}\right)}{a} \text{ oder } x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}.$$

Dieselben Resultate würde man gefunden haben, wenn man aus den Gleichungen A und B die Werthe für y gesucht, und durch die Gleichstellung beider Werthe eine Gleichung gebildet hätte, in welcher bloß x vorkömmt. Anfänger thun wohl, die Aufgabe auch auf diese Art zu lösen, und das Gesetz aufzusuchen, nach welchem die Brüche gebildet sind, durch welche die Werthe von x und y ausgedrückt werden, wie dieß auch beim mündlichen Vortrage geschehen wird.

Manche Schriftsteller nennen diese Methode die Comparation, welche sich auf den Grundsatz stützt: Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich.

Zweite Methode.

Man entwickle den Werth für eine unbekannte Größe (indem man die andere vorläufig als bekannt ansieht) aus einer der gegebenen Gleichungen, und substituire diesen gefundenen Werth für jene Unbekannte in der andern Gleichung, so erhält man eine neue Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, die sich nach den bekannten Regeln bestimmen läßt.

Denn es seien wieder die Gleichungen

$$A)\quad ax + by = c,$$
$$B)\quad a'x + b'y = c'$$

gegeben, so folgt aus A) $y = \frac{c - ax}{b}$; diesen Werth in B substituirt erhält man

$$a'x + b' . \frac{c - ax}{b} = c', \text{ also}$$
$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \text{ wie vorhin.}$$

Durch Substitution dieses für x gefundenen Werthes in A) findet man

$$a . \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} + by = c, \text{ also } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}, \text{ wie oben.}$$

Diese Methode pflegt man die Substitutions-Methode zu nennen.

Dritte Methode.

Die dritte Methode, Gleichungen mit zwei Unbekannten auf Eine Gleichung mit Einer Unbekannten zurück zu führen, besteht in der Addition oder Subtraction der aufgestellten Gleichungen, je nachdem die zu eliminirenden Glieder in beiden Gleichungen ungleiche oder gleiche Zeichen haben, wobei vorausgesetzt wird, daß jene Glieder gleiche Coefficienten haben. Ist demnach diese Eigenschaft nicht vorhanden, so muß diese zuvor in die Gleichungen gebracht werden. Dieses geschieht aber auf folgende Art: Man suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Koefficienten in den zu eliminirenden (hinwegzuschaffenden) Gliedern, und multiplicire jede Gleichung mit dem Quotienten aus dem Koefficienten des in ihr zu eliminirenden Gliedes in dieses kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Es sollen wieder dieselben Gleichungen

$$A)\quad ax + by = c$$
$$B)\quad a'x + b'y = c'$$

bleiben, aus welchen y eliminirt werden soll. Man multiplicire A mit b', und B mit b, so erhält man die neuen Gleichungen

$$C)\quad ab'x + bb'y = b'c,$$
$$D)\quad a'bx + bb'y = bc', \text{ und durch Subtr.}$$
$$\quad\; - \quad - \quad -$$
$$(C - D = E)\quad (ab' - a'b)x = b'c - bc',$$

woraus $x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$ gefunden wird, wie oben.

Substituirt man diesen für x gefundenen Werth in der Gleichung A oder B, so findet man y. Wollte man x eliminiren, so müßte man A mit a' und B mit a multipliciren, um durch die Subtraction dieser Gleichungen eine neue Gleichung zu erhalten, welche bloß y enthält.

Diese dritte Methode nennt man vorzugsweise die Elimination.

Die Elimination läßt sich sehr einfach auch auf folgende Art bewerkstelligen: Man dividire, um z. B. y zu eliminiren, die erste Gleichung durch b und die andere durch b'; so erhält man durch Subtraction oder Addition, je nachdem b und b' einerlei oder verschiedene Zeichen haben $\left(\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}\right) x = \frac{c}{b} - \frac{c'}{b'}$, woraus sogleich $x = \frac{b'c - bc'}{ab' - ab'}$ erhalten wird.

Vierte Methode.

Der berühmte französische Mathematiker Bézout gab folgendes allgemeine Verfahren an: Man multiplicire eine der aufgestellten Gleichungen mit einer unbestimmten Zahl m, und addire zu dieser neuen Gleichung die andere gegebene. Dann setze man den Koefficienten der zu eliminirenden Unbekannten gleich Null, wodurch sich der bestimmte Werth von m ergibt; so erhält man eine neue Gleichung, welche nur noch eine Unbekannte enthält.

Es seien wieder die obigen Gleichungen

$$A)\quad ax + by = c,$$
$$B)\quad a'x + b'y = c',$$

so ist, wenn man A mit m multiplicirt:

$$C)\quad max + mby = mc, \text{ und durch Addition zu B}$$
$$D)\quad (ma + a')x + (mb + b')y = mc + c'.$$

Will man nun z. B. y eliminiren, so setze man $mb + b' = 0$, also $m = \frac{-b'}{b}$, und es ist dann durch Substitution in D:

$$\left(\frac{-b'}{b} a + a'\right) x = \frac{-b' \cdot c}{b} + c', \text{ daher}$$

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \text{ wie oben.}$$

Wollte man aus D) x eliminiren, so müßte $ma + a' = 0$, also $m = \frac{-a'}{a}$ gesetzt werden.

Das Wesentliche der Bézout'schen Methode besteht demnach darin, die bei der dritten Methode erwähnte nöthige Eigenschaft in die aufgestellten Gleichungen auf eine Art zu bringen, die, wie wir in der Folge sehen werden, sehr vortheilhaft ist.

Anmerkung. Welche von diesen hier angeführten Methoden in vorkommenden Fällen am vortheilhaftesten anzuwenden sei, muß die Urtheilskraft entscheiden, da sich keine allgemeinen Regeln aufstellen lassen.

§. 211.

Anwendung dieser Methoden.

Aufgabe 1.

Zwei Zahlen zu finden, deren Summe $= s$, und deren Unterschied $= d$ ist.

Auflösung.

Es sei die größere Zahl $= x$ und die kleinere $= y$, so ist

A) $x + y = s$,

B) $x - y = d$, und durch Addition von A und B:

$$2x = s + d, \text{ also}$$

$$x = \frac{s + d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2},$$

und durch Subtraktion $2y = s - d$, also

$$y = \frac{s - d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2};$$

d. i. die größere Zahl ist gleich der halben Summe mehr der halben Differenz, und die kleinere gleich der halben Summe weniger der halben Differenz.

Sobald also die Summe und die Differenz zweier Größen bekannt ist, so sind diese in der Folge selbst als bekannt anzusehen.

Aufgabe 2.

Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Differenz ihrer Quadrate = 24, die Differenz der Wurzeln aber = 2 sei.

Auflösung.

Bezeichnen wir die gesuchten Zahlen mit x und y, so ist der Aufgabe zu Folge

A) $x^2 - y^2 = 24$,

B) $x - y = 2$, und A durch B dividirt gibt:

C) $x + y = 12$, also

$$x = \frac{12+2}{2} = 7 \text{ und}$$

$$y = \frac{12-2}{2} = 5$$ (nach Aufg. 1).

Aufgabe 3.

Eine zweizifferige Zahl hat die Eigenschaft, daß sie durch 7 dividirt, die Summe ihrer Ziffern als Quotienten gibt; kehrt man aber die Ordnung der Ziffern um, und dividirt durch 7, so erhält man die halbe Summe der Ziffern als Quotienten, und 3 zum Rest. — Wie heißt jene Zahl?

Auflösung.

Bezeichnen wir im ersten Falle die Ziffer der Zehner mit x, und jene der Einser mit y, so ist der Aufgabe zu Folge

A) $\frac{10 . x + y}{7} = x + y$ oder $10x + y = 7x + 7y$,

B) $\frac{x + 10 . y}{7} = \frac{x + y}{2} + \frac{3}{7}$ oder $2x + 20y = 7x + 7y + 6$.

Aus A) folgt:

$$3x = 6y, \text{ oder } x = 2y,$$

und aus B):

$$13y - 5x = 6,$$

also durch Substitution

$$13y - 5 . 2y = 6,$$

woraus $y = 2$ gefunden wird, folglich

$$x = 2 . y = 2 . 2 = 4.$$

Die verlangte Zahl ist also $10 . 4 + 2 = 42$.

Aufgabe 4.

Man hat zweierlei Materien A und B, von verschiedenem specifischen Gewichte. 1 Kubikzoll von A wiegt a Unzen, und ein Kubikzoll von B wiegt b Unzen. Man soll eine Mischung machen, deren Rauminhalt (Volumen) = m Kubikzoll, und deren Gewicht = n Unzen ist. Wie viel muß man von beiden Materien nehmen?

Auflösung.

Setzen wir, daß x Kubikzoll von A, und y Kubikzoll von B genommen werden müssen, so führen die Bedingungen der Aufgabe auf folgende Gleichungen:

A) $x + y = m$ Kubikzoll,
B) $ax + by = n$ Unzen.

Aus A) folgt $y = m - x$, welcher Werth in B gesetzt, die neue Gleichung $ax + b(m - x) = n$ gibt, woraus

$$x = \frac{n - mb}{a - b} = \frac{bm - n}{b - a}$$

gefunden wird. Also ist

$$y = m - \frac{bm - n}{b - a} = \frac{n - am}{b - a} = \frac{am - n}{a - b}.$$

Wie hätte man x und y aus den §. 210 aufgestellten allgemeinen Formeln finden können?

Beispiel.

Man soll Gold und Silber legiren, so daß die ganze Mischung 15 Kubikzoll erhält, deren Gewicht 110·5 Unzen beträgt. Wenn nun 1 Kubikzoll Gold $10\frac{1}{12}$ Unzen, und 1 Kubikzoll Silber $5\frac{5}{9}$ Unzen wiegt, wie viel Gold und wie viel Silber muß man zu jener Mischung nehmen?

Auflösung.

Hier ist $a = 10\frac{1}{12} = \frac{121}{12}$, $b = \frac{50}{9}$, $m = 15$ und $n = 110{\cdot}5$, also

$$x = \frac{110{\cdot}5 - \frac{50}{9} \cdot 15}{\frac{121}{12} - \frac{50}{9}} = 6, \text{ und}$$

$$y = m - 6 \text{ (aus A)} = 15 - 6 = 9.$$

Es müssen also 6 Kubikzoll Gold und 9 Kubikzoll Silber zur Mischung genommen werden.

Aufgabe 5.

Zwei Wasserröhren A, B, haben ein Gefäß von c Eimern mit Wasser angefüllt, indem aus A durch a Stunden, und aus B durch b Stunden Wasser geflossen ist. Ein anderes Mal haben dieselben zwei Röhren ein Gefäß von c' Eimern mit Wasser gefüllt, indem A während a' Stunden, und B durch b' Stunden hindurch geöffnet war. Wie viel Wasser gibt jede Röhre in einer Stunde?

Auflösung.

Es sei die Menge Wasser, die A in einer Stunde gibt, = x Eimern, so gibt sie in a Stunden ax Eimer, und in a' Stunden a'x Eimer. Die Menge Wasser, welche in einer Stunde aus B fließt, sei = y Eimern, so fließen in b Stunden by Eimer, und in b' Stunden b'y Eimer aus derselben. Es ist daher den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$$1)\quad ax + by = c,$$

$$2)\quad a'x + b'y = c',$$

$$\text{also } x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \text{ und } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \text{ (§. 210).}$$

Würde z. B. gefragt, in wie viel Stunden beide Röhren, zugleich fließend, ein Gefäß von m Eimern anfüllen würden, so ist die Antwort sehr leicht; denn beide Röhren geben zusammen in einer Stunde

$$x + y = \frac{b'c - bc' + ac' - a'c}{ab' - a'b} = \frac{(b' - a')\,c + (a - b)\,c'}{ab' - a'b} \text{ Eimer}$$

= s der Kürze wegen, also geben sie m Eimer in $\frac{m}{s}$ Stunden.

Aufgabe 6.

Zwei Brüder A und B hatten zusammen 630 fl. A kaufte sich Staatspapiere und B Lotterielose. Nach 10 Jahren hatten beide Brüder gleiches Vermögen, aber es zeigte sich, daß A 6% jährlich gewonnen, und B jährlich 5% verloren habe: Wie viel Vermögen hatte jeder dieser zwei Brüder?

Auflösung.

Es sei x das anfängliche Kapital des A, und y das anfängliche Kapital des B. Da nun A jährlich 6% gewonnen, so gewann er mit x fl. offenbar $\frac{6x}{100}$ in 1 Jahre, also $10 \cdot \frac{6x}{100} = \frac{3x}{5}$ fl. in 10 Jahren,

und A hatte daher nach 10 Jahren $x + \frac{3x}{5} = \frac{8x}{5}$ fl. Weil ferner B von 100 jährlich 5 fl. verlor, so beträgt an y fl. der jährliche Verlust $\frac{5y}{100} = \frac{y}{20}$, also ist der in 10 Jahren erlittene Verlust $\frac{10y}{20} = \frac{y}{2}$, und B erhielt nur $y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y$ zurück. Der Aufgabe gemäß erhalten wir also die beiden Gleichungen:

$$1)\quad x + y = 630,$$
$$2)\quad \frac{8x}{5} = \frac{y}{2} \text{ oder } 16x = 5y.$$

Aus (2) folgt $x : y = 5 : 16$,

$$x + y : y = 5 + 16 : 16, \text{ d. i.}$$
$$630 : y = 21 : 16,$$
$$30 : y = 1 : 16, \text{ also } y = 480 \text{ fl.}$$

und $x = 630 - y$ (aus 1) $= 630 - 480 = 150$ fl.

Man untersuche, ob diese Werthe den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 7.

Acht Pferde haben in 7 Wochen eine Wiese von 400 Quadratklaftern dergestalt abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches im Anfange schon da stand, als auch jenes verzehrten, welches während dieser Zeit hervorwuchs. Auf die nämliche Art haben 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 500 Quadratklaftern abgeweidet. Wie viel Pferde werden auf eben diese Art durch 12 Wochen auf einer Wiese von 600 Quadratklaftern sich ernähren können?

Auflösung.

Man setze, es seien auf jeder Quadratklafter in jeder Woche x Theile (z. B. Pfunde) nachgewachsen, so wurden von den 8 Pferden im ersten Falle in 7 Wochen $(400 + 7 . 400x)$, also in 1 Woche $\frac{400 + 7.400x}{7}$, und von 1 Pferde in 1 Woche $\frac{400 + 7.400x}{7.8}$ Theile abgeweidet. Auf ähnliche Art hat im zweiten Falle 1 Pferd in einer Woche $\frac{500 + 8.500x}{8.9}$, und im letzten Falle, wenn wir die Anzahl der Pferde mit y bezeichnen $\frac{600 + 12.600x}{12.y}$ Theile abgeweidet. — Da nun hier vorausgesetzt wird, daß alle Pferde gleichviel gefressen haben, so

müssen die drei aufgestellten Ausdrücke auch einander gleich sein, und wir erhalten die beiden Gleichungen:

$$\text{A.}\quad \frac{400 + 7.400x}{7.8} = \frac{500 + 8.500x}{8.9},$$

$$\text{B.}\quad \frac{400 + 7.400x}{7.8} = \frac{600 + 12.600x}{12.y}.$$

Aus A. folgt: $x = \frac{1}{28}$ und aus B. $y = 8$.

Aufgabe 8.

Ein Taglöhner arbeitete a Tage lang, hatte durch b Tage seine Frau und seinen Sohn bei sich, und erhielt mit diesen zusammen m fl. als Lohn. Hierauf arbeitete er um denselben täglichen Lohn c Tage lang, hatte diesmal Frau und Sohn d Tage hindurch bei sich, und erhielt dann n fl. als Lohn. Wie viel erhielt der Mann, und wie viel Frau und Sohn zusammen auf den Tag?

Auflösung.

Es sei x der Taglohn des Mannes, und y der Lohn für Frau und Sohn. Das erste Mal erhielt demnach der Mann ax fl., und Frau und Sohn zusammen by fl. Das zweite Mal erhielt der Mann cx fl., und Frau und Sohn dy fl. Daher ist

$$1)\quad ax + by = m,$$

$$2)\quad cx + dy = n.$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$y = \frac{m - ax}{b};$$

und diesen Werth in die zweite Gleichung gesetzt, findet man:

$$x = \frac{bn - dm}{bc - ad}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung

$$y = \frac{m - ax}{b} = \frac{m}{b} - \frac{a}{b}.x,$$

so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$y = \frac{cm - an}{bc - ad}.$$

Beispiel 1.

Man setze $a = 12$, $b = 9$, $m = 42$ und $c = 14$, $d = 10$, $n = 48$, so ist

$$x = \frac{9.48 - 10.42}{9.14 - 12.10} = \frac{9.8 - 10.7}{3.7 - 2.10} = \frac{2}{1} = 2 \text{ und}$$

$$y = \frac{14.42 - 12.48}{9.14 - 12.10} = \frac{14.7 - 2.48}{3.7 - 2.10} = \frac{98 - 96}{1} = 2.$$

Es erhielt also der Mann für den Tag 2 fl., und der Sohn und die Frau zusammen auch 2 fl.

Beispiel 2.

Es sei $a = 12$, $b = 8$, $m = 48$, und $c = 15$, $d = 10$, $n = 60$, so ist

$$x = \frac{8.60 - 10.48}{8.15 - 12.10} = \frac{480 - 480}{120 - 120} = \frac{0}{0} \text{ und}$$

$$y = \frac{15.48 - 12.60}{8.15 - 12.10} = \frac{720 - 720}{120 - 120} = \frac{0}{0}$$

Wir haben oben (§. 208, Aufg. 7, Fall I., Anm. 4) gesagt, daß der Ausdruck $\frac{0}{0}$ das Symbol der Unbestimmtheit sei, welches auch hier der Fall ist; denn dort war $\frac{0}{0}$ das letzte Resultat der Rechnung, hier aber ist die Rechnung ebenfalls vollendet.

Aber worin liegt denn wohl die Unbestimmtheit der Aufgabe, da doch im vorliegenden Falle eben so viele Data vorhanden sind, als im vorigen Beispiele? Die zweite Bedingung des gegebenen Falles ist schon in der ersten Bedingung mit enthalten, und es kann demnach nur eine Gleichung gebildet werden. Um dieses leichter einzusehen, bilde man nur die zwei Gleichungen

$$12x + 8y = 48,$$
$$15x + 10y = 60.$$

Kürzt man die erste Gleichung mit 4, und die zweite mit 5 ab, so erhält man in beiden Fällen die Gleichung $3x + 2y = 12$, und die Aufgabe ist deßhalb unbestimmt.

Beispiel 3.

Es sei $a = 5$, $b = 3$, $m = 31$, und $c = 7$, $d = 3$, $n = 47$, so findet man

$$x = \frac{3.47 - 3.31}{3.7 - 5.3} = \frac{141 - 93}{21 - 15} = \frac{48}{6} = 8 \text{ und}$$

$$y = \frac{7.31 - 5.47}{3.7 - 5.3} = \frac{217 - 235}{21 - 15} = \frac{-18}{6} = -3.$$

Der hier gefundene negative Werth für y sagt, daß Sohn und Frau den Lohn des Mannes nicht vermehren, sondern daß sie denselben vermindern, dem Manne also täglich 3 fl. Unkosten verursachen. Es muß also hier die Größe y bei der Formation der Gleichung im subtraktiven Sinne genommen werden, wenn die Aufgabe unter den übrigen Bedingungen möglich sein soll. Man müßte nämlich setzen:

$$5x - 3y = 31 \text{ und } 7x - 3y = 47.$$

Wie könnte man, weil $b = d = 3$ ist, den Werth von x im letzten Beispiele schnell durch bloßes Raisonniren bestimmen?

Anfängern rathe ich an, diese letzte Aufgabe so aufzulösen, als enthielte sie nur eine einzige Unbekannte, wie dieß bei sehr vielen Aufgaben möglich ist. Eben so wäre es für den Anfänger von großem Nutzen, mehrere Aufgaben nach den vier bekannten Auflösungsarten zu behandeln, denn durch eine solche fleißige Uebung setzt er sich in den Stand, in vorkommenden Fällen schnell zu beurtheilen, welche Methode die vortheilhafteste und zweckmäßigste sei.

§. 212.

c) Gleichungen mit drei Unbekannten.

Wenn eine Aufgabe drei Unbekannte enthält, so müssen die Bedingungen derselben von der Art sein, daß sich drei wesentlich verschiedene Gleichungen formiren lassen, weil im Gegentheile die Aufgabe unbestimmt sein würde. Führte z. B. eine Aufgabe auf folgende zwei Gleichungen:

$$\text{a)}\quad x + z = 7,$$

$$\text{b)}\quad 3x + 2y = 23,$$

so folgt aus (a) $x = 7 - z$, und aus (b)

$$y = \frac{23 - 3x}{2}, \text{ und durch Substitution}$$

$$y = \frac{23 - 3(7 - z)}{2} = \frac{2 + 3z}{2} = 1 + \tfrac{3}{2}z.$$

und so sieht man sogleich, daß die Werthe von x und y noch von z abhängig, und folglich unbestimmt seien.

Sind drei verschiedene Gleichungen mit drei Unbekannten vorhanden, so lassen sich diese auf verschiedenen, den obigen (§. 210) ähnlichen Wegen bestimmen, wie wir im folgenden Paragraphe zeigen werden.

§. 213.

Erste Methode.

Man sucht aus den drei Gleichungen die Werthe für eine und dieselbe Unbekannte, indem man die beiden übrigen vor der Hand als bekannt betrachtet, stellt den ersten und zweiten, dann den ersten und dritten, oder den zweiten und dritten gefundenen Werth einander gleich, wodurch man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält, und verfährt dann nach §. 210.

Man bestimme z. B. die Werthe von x, y und z aus folgenden drei Gleichungen.

$$\text{A.}\quad ax + by + cz = d.$$

$$\text{B.}\quad a'x + b'y + c'z = d'$$

$$\text{C.}\quad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Aus A. folgt $x = \frac{d - by - cz}{a}$,

" B. " $x = \frac{d' - b'y - c'z}{a'}$,

" C. " $x = \frac{d'' - b''y - c''z}{a''}$, also ist

$$\frac{d - by - cz}{a} = \frac{d' - b'y - c'z}{a'} = \frac{d'' - b''y - c''z}{a''},$$

und hieraus bilde man folgende zwei Gleichungen:

$$\text{D.}\quad \frac{d - by - cz}{a} = \frac{d' - b'y - c'z}{a'},$$

$$\text{E.}\quad \frac{d - by - cz}{a} = \frac{d'' - b''y - c''z}{a''},$$

aus welchen man erhält:

$$y = \frac{(ad' - a'd)(ac'' - a''c) - (ad'' - a''d)(ac' - a'c)}{(ab' - a'b)(ac'' - a''c) - (ab'' - a''b)(ac' - a'c)}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \text{ und}$$

$$z = \frac{(ab' - a'b)(ad'' - a''d) - (ab'' - a''b)(ad' - a'd)}{(ab' - a'b)(ac'' - a''c) - (ab'' - a''b)(ac' - a'c)}, \text{ oder}$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Diese für y und z erhaltenen Werthe in einer der obigen Gleichungen für x, z. B. in der Gleichung $x = \frac{d - by - cz}{a}$ substituirt, erhält man nach gehöriger Reduktion endlich folgende Gleichung

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Zweite Methode.

Man sucht den Werth für eine Unbekannte aus einer der gegebenen Gleichungen, und substituirt ihn statt dieser in den beiden andern Gleichungen, so erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, und dann verfährt man nach §. 210. Die Rechnung selbst überlassen wir dem Fleiße des Anfängers.

Dritte Methode.

Man addirt oder subtrahirt z. B. A von B, und B von C (wenn wir wieder die obigen Gleichungen beibehalten), nachdem man die (§. 210, dritte Methode) angegebenen Erfordernisse in die Gleichungen gebracht hat, wodurch zwei Gleichungen erhalten werden, mit welchen man wieder nach §. 210 verfährt.

Vierte Methode.

Man multiplicire z. B A mit der unbestimmten Zahl m, B mit der unbestimmten Zahl n, so erhält man die Gleichungen D und E, und diese beiden verbinde man mit C durch Addition; so kömmt eine neue Gleichung F zum Vorscheine, aus welcher der Werth einer jeden der drei Unbekannten bestimmt werden kann, wenn man die Koefficienten der zwei andern Unbekannten $= 0$ setzt, wodurch sich zugleich die Zahlen m und n nach §. 210 bestimmen. Es sei wieder

$$\begin{aligned}
&A.\quad ax + by + cz = d,\\
&B.\quad a'x + b'y + c'z = d',\\
&C.\quad a''x + b''y + c''z = d''; \text{ so ist}\\
&A.m = D.)\quad amx + bmy + cmz = dm \text{ und}\\
&B.n = E.)\quad a'nx + b'ny + c'nz = d'n, \text{ also}\\
&C + D + E = F.)\quad (a'' + a'n + am)\,x + (b'' + b'n + bm)\,y\\
&\qquad + (c'' + c'n + cm)\,z = d'' + d'n + dm.
\end{aligned}$$

Will man nun z. B. den Werth von x bestimmen, so setze man $b'' + b'n + bm = 0$ und $c'' + c'n + cm = 0$, wodurch $x = \frac{d'' + d'n + dm}{a'' + a'n + am}$ erhalten wird. Aber aus den Gleichungen

$$bm + b'n = -b'' \text{ und}$$
$$cm + c'n = -c'', \text{ findet man}$$

$$m = \frac{-b''c' - b' \times -c''}{bc' - cb'} = \frac{b'c'' - c'b''}{bc' - cb'} \text{ und}$$

$$n = \frac{b \times -c'' - c \times -b''}{bc' - cb'} = \frac{cb'' - bc''}{bc' - cb'}.$$

Substituirt man diese Werthe in dem für x aufgestellten Ausdrucke

$$x = \frac{d''(bc' - cb') + d'(cb'' - bc'') + d(b'c'' - c'b'')}{a''(bc' - cb') + a'(cb'' - bc'') + a(b'c'' - c'b'')},$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''};$$

wenn man die einzelnen Glieder im Zähler und Nenner in umgekehrter Ordnung entwickelt. Eben so findet man y, wenn man die Koefficienten von x und z gleich 0 setzt, und den Werth von z, wenn man die Koefficienten von x und y gleich 0 setzt und aus den so erhaltenen Gleichungen die entsprechenden Werthe von m und n bestimmt.

Diese letzte Methode findet vorzüglich ihre Anwendung, wenn mehrere Unbekannte vorhanden sind. Anfänger thun gut, auch hier wieder die Gesetze aufzusuchen, nach welchen die Werthausdrücke für x, y und z gebildet sind.

Welche von diesen Methoden in praktischen Fällen die vortheilhafteste sei, muß wieder durch die Urtheilskraft ausgemittelt werden. Durch Uebung allein kann man sich eine schnelle Uebersicht verschaffen, und eine Menge Kunstgriffe kennen lernen, die sich in einzelnen Fällen anwenden lassen.

Um der Uebung und der leichtern Uebersicht willen folgt hier ein Beispiel, das wir nach jeder dieser vier Methoden behandeln wollen.

Beispiel

Es sei

A. $x + y + z = 9$,
B. $3x + 2y + z = 16$,
C. $4x + 3y + 5z = 37$.

Nach der ersten Methode.

Aus A. folgt $z = 9 - x - y$,
„ B. „ $z = 16 - 3x - 2y$,
„ C. „ $z = \frac{37 - 4x - 3y}{5}$; also ist

D. $9 - x - y = 16 - 3x - 2y$,
E. $9 - x - y = \frac{37 - 4x - 3y}{5}$.

Aus D. folgt $2x + y = 7$,
" E. " $x + 2y = 8$.
Multiplicirt man E mit 2, so ist
$2x + 4y = 16$, und hiervon D abgezogen,
$2x + y = 7$,
$- \quad - \quad -$
$3y = 9$, also $y = 3$.
Aus E. folgt $x = 8 - 2y$, und durch Substitution
$x = 8 - 2.3 = 8 - 6 = 2$.

Substituirt man diese für x und y gefundenen Werthe in der Gleichung
$z = 9 - x - y$, so findet man
$z = 9 - 2 - 3$,
$z = 4$.

Nach der zweiten Methode.

Aus A folgt $z = 9 - x - y$, und dieser Werth in B und C substituirt, gibt
D. $3x + 2y + 9 - x - y = 16$, oder
$2x + y = 7$; und
E. $4x + 3y + 45 - 5x - 5y = 37$, oder
$-x - 2y = -8$; d. i. $x + 2y = 8$.

Hieraus findet man wieder, wie vorhin, $x = 2$, $y = 3$ und $z = 4$.

Nach der dritten Methode.

Man subtrahire A von B, dann multiplicire man A mit 5, und subtrahire von dieser erhaltenen Gleichung C, so ist
D. $2x + y = 7$,
E. $x + 2y = 8$, wie oben.

Nach der vierten Methode.

Multiplicirt man A mit m, und B mit n, so ist
D. $mx + my + mz = 9m$,
E. $3nx + 2ny + nz = 16n$.

Addirt man nun D, E und C, so erhält man

F. $(m + 3n + 4)x + (m + 2n + 3)y + (m + n + 5)z = 9m + 16n + 37$.

Um nun x zu bestimmen, setze man

$$m + 2n + 3 = 0,$$

$$m + n + 5 = 0,$$ so ist durch Subtraktion

$$-\quad -\quad -$$

$$n - 2 = 0,$$ also $n = 2$, und

$$m = -n - 5 = -7.$$

Durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung

$$x = \frac{9m + 16n + 37}{m + 3n + 4},$$ wird

$$x = \frac{-9.7 + 16.2 + 37}{-7 + 3.2 + 4},$$

$$x = \frac{-63 + 69}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Will man y bestimmen, so setze man

$$m + 3n + 4 = 0,$$ und

$$m + n + 5 = 0,$$ so ist durch Subtraktion

$$-\quad -\quad -$$

$$2n - 1 = 0,$$ also $n = \frac{1}{2}$ und

$$m = -n - 5 = -\tfrac{1}{2} - 5 = -\tfrac{11}{2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung

$$y = \frac{9m + 16n + 37}{m + 2n + 3},$$ wird

$$y = \frac{9 \cdot \frac{-11}{2} + 16 \cdot \frac{1}{2} + 37}{\frac{-11}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3},$$

$$y = \frac{-9}{2} : \frac{-3}{2} = 3.$$

Setzt man $m + 3n + 4 = 0$ und

$$m + 2n + 3 = 0,$$ so ist durch Subtraktion

$$-\quad -\quad -$$

$$n + 1 = 0,$$ also $n = -1$ und

$$m = -2n - 3 = 2 - 3 = -1.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung

$$z = \frac{9m + 16n + 37}{m + n + 5},$$ so wird

$$z = \frac{-9 - 16 + 37}{-1 - 1 + 5} = \frac{12}{3} = 4.$$

Wie löst man diese Gleichungen nach den oben aufgestellten allgemeinen Formeln?

Hier wäre man schneller zum Ziele gelangt, wenn man die Summe der Gleichungen A und B von C abgezogen hätte. Denn weil

$$\begin{array}{rl} C. & 4x + 3y + 5z = 37 \text{ und} \\ A + B. & 4x + 3y + 2z = 25, \text{ so ist} \\ & - \quad - \quad - \quad - \\ \hline & 3z = 12, \text{ also } z = 4. \end{array}$$

Diesen Werth für z würde man nun in A und B substituiren, und dann nach §. 210 verfahren.

§. 214.

Anwendung dieser Methoden auf die Auflösung einiger Aufgaben.

Aufgabe 1.

Drei Personen spielen mit einander. In der ersten Partie verlor A, aber B und C gewannen so viel, als sie vor dem Spiele hatten. In der zweiten Partie verlor B, aber A und C gewannen so viel, als sie bei dem Anfange des zweiten Spieles hatten. In der dritten Partie verlor C an A und B so viel, als jeder der letztern im Anfange der dritten Partie hatte. Am Ende des dritten Spieles hatte jeder 2 fl.; es fragt sich, wie viel Geld ein jeder zum Spiele gebracht habe?

Auflösung.

Das anfängliche Geld des Spielers A sei $= x$, das des Spielers $B = y$, und endlich das des $C = z$, so hatte nach der ersten Partie

A noch $x - y - z$,
B „ $2y$,
C „ $2z$.

Nach der zweiten Partie hatte

A dann $2x - 2y - 2z$,
B „ $2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$,
C „ $4z$.

Nach der dritten Partie hatte

A endlich $4x - 4y - 4z$,
B „ $6y - 2x - 2z$,
C „ $4z - (2x - 2y - 2z) - (3y - x - z)$,
oder $7z - x - y$.

Da nun jeder Spieler gleich viel, nämlich 2 fl. haben soll, so muß

$$1)\ 4x - 4y - 4z = 2 \text{ fl.} = 120 \text{ kr.}$$
$$2)\ -2x + 6y - 2z = 120,$$
$$3)\ -x - y + 7z = 120 \text{ sein.}$$

Nun dividire man die Gleichung 1) durch 4, und die zweite durch 2, so ist

$$a)\ x - y - z = 30,$$
$$b)\ -x + 3y - z = 60,$$
$$c)\ -x - y + 7z = 120.$$

Addirt man a und b, so ist

$$d)\ 2y - 2z = 90,$$

und b von c subtrahirt gibt

$$e)\ -4y + 8z = 60.$$

Dividirt man d durch 2 und e durch 4, so ist

$$f)\ y - z = 45 \text{ und}$$
$$g)\ -y + 2z = 15.$$

Nun addire man f und g, so ist

$$h)\ z = 60.$$

Aus f) folgt $y = 45 + z$, und durch Substitution

$$y = 45 + 60 = 105.$$

Aus a) findet man endlich

$$x = 30 + y + z, \text{ und daher durch Substitution}$$
$$x = 30 + 105 + 60 = 195.$$

Es hatte demnach A 195 kr. = 3 fl. 15 kr., B aber 105 kr. = 1 fl. 45 kr., und C 60 kr. = 1 fl.

Man untersuche, ob diese Werthe den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 2.

Drei Brüder kauften zusammen einen Garten um 2400 fl. Der Jüngste sagte: wenn er vom ältern Bruder die Hälfte seines Geldes erhalten würde, so könnte er den Garten allein bezahlen. Dieser aber sagte: wenn mir mein ältester Bruder $\frac{1}{3}$ seines Geldes gibt, so kann ich allein bezahlen. Der älteste sagte endlich zum Jüngsten: gib mir nur $\frac{1}{4}$ deines Geldes, so kann ich jene Summe allein bezahlen. Wie viel Geld hatte jeder dieser drei Brüder?

Auflösung.

Das Geld des Jüngsten sei $= x$, das des Mittlern $= y$, und das Vermögen des Aeltesten $= z$, so ist den angegebenen Bedingungen zur Folge

$$a)\quad x + \tfrac{1}{2}y = 2400, \text{ oder } 2x + y = 4800,$$
$$b)\quad y + \tfrac{1}{3}z = 2400, \quad „ \quad 3y + z = 7200,$$
$$c)\quad z + \tfrac{1}{4}x = 2400, \quad „ \quad 4z + x = 9600.$$

Aus a) folgt $y = 4800 - 2x$, und dieser Werth in b gesetzt, gibt

$$3(4800 - 2x) + z = 7200, \text{ oder}$$
$$14400 - 6x + z = 7200,$$
$$-6x + z = 7200 - 14400 = -7200, \text{ oder}$$
$$d)\quad 6x - z = 7200, \text{ und mit 4 multiplicirt:}$$
$$24x - 4z = 28800; \text{ hierzu die Gleichung}$$
$$c)\quad 4z + x = 9600 \text{ addirt, gibt}$$
$$25x = 38400, \text{ also}$$
$$x = 1536, \text{ und durch Substitution in}$$
$$z = \frac{9600 - x}{4} \text{ (aus c), erhält man}$$
$$z = \frac{9600 - 1536}{4} = \frac{8064}{4} = 2016,$$

und durch Substitution in

$$y = 4800 - 2x, \text{ wird}$$
$$y = 4800 - 2.1536 = 4800 - 3072 = 1728.$$

Aufgabe 3.

Drei Mädchen trugen Aepfel in die Stadt. Alle Aepfel zusammen machten dreimal so viel aus, als die erste hatte. Die Anzahl der Aepfel der erstern und die doppelte Anzahl jener der zweiten zusammen betrugen 20 mehr, als die doppelte Anzahl der Aepfel der dritten. Nimmt man von den Aepfeln der dritten so viele hinweg, als die zweite hat, so hat doch die erste noch dreimal so viel Aepfel als die dritte noch hat. Wie viel Aepfel trug jedes Mädchen?

Auflösung.

Bezeichnet man die Anzahl der Aepfel der ersten mit x, jene der zweiten mit y, und jene der dritten mit z; so finden, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, folgende Gleichungen Statt:

a) $x + y + z = 3x.$

b) $x + 2y \quad = 2z + 20,$

c) $z - y \quad = \frac{x}{3}.$

Wenn wir diese Gleichungen ordnen, so ist

α) $-2x + y + z = 0,$

β) $x + 2y - 2z = 20,$ oder $x + 2(y - z) = 20,$

γ) $-x - 3y + 3z = 0.$ Es ist also

$\beta + \gamma = \delta)\ -y + z \quad = 20,$ oder $y - z = -20.$

Diesen Werth in β) substituirt, erhält man

$x + 2 \times -20 = 20,$

$x = 20 + 40 = 60.$

Also ist durch Substitution in der Gleichung

$y + z = 2x$ (aus α)

$y + z = 2.60 = 120,$ und weil

$-y + z = 20,$ so ist

$y = \frac{120 - 20}{2} = 50$ und

$z = \frac{120 + 20}{2} = 70$ (§. 211, 1).

Aufgabe 4.

Man soll die Zahl 47 in drei solche Theile zerlegen, daß der zweite Theil durch den ersten dividirt 1 zum Quotienten und 1 zum Reste, der dritte aber durch den zweiten dividirt 1 zum Quotienten und drei zum Reste gibt.

Auflösung.

Die drei Theile seien x, y, z; so muß der Aufgabe gemäß

1) $\frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, oder $y = x + 1,$

2) $\frac{z}{y} = 1 + \frac{3}{y}$, „ $z = y + 3$ sein.

und man hat die drei Gleichungen

a) $x + y + z = 47,$

b) $-x + y \quad = 1$ (aus 1),

c) $-y + z = 3$ (aus 2). Also ist auch

$a + b = d)\quad 2y + z = 48,$ und c mit 2 multiplicirt gibt

$-2y + 2z = 6;$ daher durch Addition

$3z = 54,$ und

$z = 18.$

Nun folgt aus c):

$y = z - 3$, und durch Substitution

$y = 18 - 3 = 15$. Dieser Werth in der Gleichung

$x = y - 1$ (aus b) substituirt gibt endlich

$x = 15 - 1 = 14$.

Aufgabe 5.

Eine dreizifferige Zahl aus folgenden Bedingungen zu bestimmen. 1) Dividirt man die gesuchte Zahl durch die Summe ihrer Ziffern, so findet man den Quotienten = 41. 2) Dividirt man die Summe der ersten und dritten Ziffer durch die mittlere, so findet man denselben Quotienten, welchen das Doppelte der ersten Ziffer links um 1 vermehrt durch die mittlere Ziffer dividirt gibt. 3) Kehrt man die Ordnung der Ziffern um, und subtrahirt von dieser so erhaltenen Zahl die gesuchte; so findet man die neunfache Summe der beiden ersten Ziffern rechts in der gesuchten Zahl als Rest.

Auflösung.

Es sei die Ziffer der Hunderte = x, die Ziffer der Zehner = y, und die Ziffer der Einser = z; so wird die gesuchte Zahl durch die Formel $100x + 10y + z$ dargestellt, und man erhält, den Bedingungen der Aufgabe zu Folge, nachstehende drei Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \frac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 41,$$

$$\text{II.} \quad \frac{x + z}{y} = \frac{2x + 1}{y},$$

$$\text{III.} \quad 100z + 10y + x - (100x + 10y + z) = 9(y + z).$$

Aus I. folgt a) $59x - 31y - 40z = 0$,

„ II. „ b) $-x + z = 1$ und

„ III. „ c) $-11x - y + 10z = 0$.

Aus b) folgt $z = x + 1$, und dieser Werth in a und c gesetzt, erhält man nach gehöriger Reduktion

$\alpha)$ $19x - 31y = 40$,

$\beta)$ $x + y = 10$, und mit 31 multiplicirt ist

$\gamma)$ $31x + 31y = 310$, also durch Addition

$\alpha + \gamma)$ $50x = 350$,

$x = 7$, und durch Substitution in

$y = 10 - x$ (aus β)

$y = 10 - 7 = 3$, und endlich

$z = x + 1 = 7 + 1 = 8$.

Die gesuchte Zahl ist demnach 738.

Aufgabe 6.

Man hat dreierlei Materien A, B und C, welche aus denselben Bestandtheilen zusammengesetzt sind, z. B. aus Gold, Silber und Kupfer. Bei der ersten Materie kommen auf irgend eine Gewichtseinheit a Theile Gold, a′ Theile Silber, und a″ Theile Kupfer. Bei B aber kommen auf dieselbe Gewichtseinheit b Theile Gold, b′ Theile Silber, und b″ Theile Kupfer. Bei C endlich kommen auf die Gewichtseinheit c Theile Gold, c′ Theile Silber, und c″ Theile Kupfer. Man soll aus A, B und C eine solche Mischung D machen, daß in ihr auf die Gewichtseinheit α Theile Gold, β Theile Silber und γ Theile Kupfer kommen. Wie viel Gewichtstheile müssen von den gegebenen Mischungen zu der verlangten genommen werden?

Auflösung.

Man setze wie folgt. Von der Mischung

A, die a Th. G. a′ Th. S. a″ Th. K. enthält, nehme man x Gew. Th.
B, . b . . b′ . . b″ . . . . y . . .
C, . c . . c′ . . c″ . . . . z . . .
also zur Mischung
D, . α . . β . . γ . . . . x + y + z.

In der gesuchten Mischung D werden demnach

1) $ax + by + cz = \alpha$ Theile Gold,
2) $a'x + b'y + c'z = \beta$ Theile Silber, und
3) $a''x + b''y + c''z = \gamma$ Theile Kupfer enthalten sein.

Hieraus findet man, nach §. 213, folgende Werthe:

$$x = \frac{\alpha\,(b'c'' - c'b'') + \beta\,(cb'' - bc'') + \gamma\,(bc' - cb')}{a\,(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb')},$$

$$y = \frac{\alpha\,(c'a'' - a'c'') + \beta\,(ac'' - ca'') + \gamma\,(ca' - ac')}{a\,(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb')} \text{ und}$$

$$z = \frac{\alpha\,(a'b'' - b'a'') + \beta\,(ba'' - ab'') + \gamma\,(ab' - ba')}{a\,(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb')}.$$

Beispiel.

Ein Goldarbeiter hat drei Stangen zusammengesetztes Metall von folgender Beschaffenheit.

Die 1. Stange enthält in 1 ℔. 24 Loth Gold, 6 Loth Silber, 2 Loth Kupfer.
2. . . . . 2 . . 6 . . . 24
3. . . . . 0 . . . 4 . . . 28

Wenn er nun aus diesen drei Stangen eine solche Mischung machen will, daß auf 1 Pfund der Mischung 8 Loth Gold, 6 Loth Silber und 18 Loth Kupfer kommen; wie viel Pfundtheile muß er von jeder Stange nehmen?

Hier ist

$a = 24$	$b = 2$	$c = 0$	$\alpha = 8,$
$a' = 6$	$b' = 6$	$c' = 4$	$\beta = 6,$
$a'' = 2$	$b'' = 24$	$c'' = 28$	$\gamma = 18,$

also

$$\begin{array}{lllll} \text{I.} & 24x + 2y = 8 & \text{oder} & 12x + y = 4, \\ \text{II.} & 6x + 6y + 4z = 6 & ,, & 3x + 3y + 2z = 3, \\ \text{III.} & 2x + 24y + 28z = 18 & ,, & x + 12y + 14z = 9. \end{array}$$

Multiplicirt man II. mit 7, so ist

$$21x + 21y + 14z = 21, \text{ und hiervon}$$
$$x + 12y + 14z = 9 \text{ abgezogen, erhält man}$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$

IV. $20x + 9y = 12$; nun I. mit 9 multiplicirt, so ist

V. $108x + 9y = 36$, und IV. von V. abgezogen, gibt,

$88x = 24$, also

$x = \frac{24}{88} = \frac{3}{11}$ Pfund, und

$y = 4 - 12 \cdot x$ (aus I.) $= 4 - \frac{36}{11} = \frac{44 - 36}{11} = \frac{8}{11}$, und endlich

$z = \frac{3 - 3x - 3y}{2}$ (aus II.) $= \frac{3 - \frac{9}{11} - \frac{24}{11}}{2} = \frac{3 - 3}{2} = \frac{0}{2} = 0.$

Dieselben Werthe würde man auch durch Substitution in den allgemeinen Formeln für x, y und z finden.

Wenn nun eine bestimmte Quantität (z. B. 44 Pfund) der Mischung verlangt wird, wie viel Theile müßte man von jeder Stange nehmen?

§. 215.

d) Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten.

Man wird aus dem, was bisher gesagt worden ist, leicht einsehen, daß man, wenn noch mehrere unbekannte Größen vorkommen, aber auch eben so viele Gleichungen gegeben sind, durch successive Elimination das gegebene System von Gleichungen auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten zurückführen müsse. Sind z. B. n verschiedene Gleichungen mit n unbekannten Größen gegeben, so suche

man auf einem der bisher gezeigten Wege eine Unbekannte zu eliminiren, wodurch dann (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten erhalten werden. Diese (n — 1) Gleichungen führe man dann auf (n — 2) Gleichungen auf ähnliche Art zurück, und setze die Elimination so lange fort, bis man endlich auf eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten stößt, aus welcher der Werth dieser letzten Unbekannten bestimmt werden kann. Diesen gefundenen Werth substituirt man dann in der vorletzten Gleichung, welche die vorige Unbekannte nebst einer andern allein enthält, so bestimmt sich der Werth der zweiten Unbekannten. Auf diese Art fährt man mit der Substitution der gefundenen Werthe fort, bis endlich alle Unbekannten bestimmt sind.

Wenn mehrere Gleichungen gegeben sind, welche mit denen des §. 210 und §. 213 ähnliche Formen haben, so zeigt es sich, daß die Werthausdrücke für die Unbekannten immer nach einem und demselben Gesetze gebildet seien, und man wird sich durch einige Uebung bald in Stand setzen, diese Ausdrücke für die Unbekannten zu bilden, ohne einen der vorgeschriebenen Eliminationswege einschlagen zu müssen. Die Bestimmung jenes Gesetzes und die Anwendung desselben wird dem mündlichen Vortrage und dem eigenen Nachdenken des Anfängers überlassen. Zur Uebung noch folgende

Aufgabe.

Ein Goldarbeiter hat vier Mischungen, die aus Gold, Silber, Kupfer und Blei zusammengesetzt sind. Die erste Mischung A enthält 90 Proc. Gold, 5 Proc. Silber, 3 Proc. Kupfer und 2 Proc. Blei. Die zweite Mischung B enthält 80 Proc. Gold, 12 Proc. Silber, 4 Proc. Kupfer und 4 Proc. Blei. Die dritte Mischung C aber enthält nur 70 Theile Gold, 20 Theile Silber, 5 Theile Kupfer und 5 Theile Blei. Die vierte Mischung D endlich enthält in 100 Gewichtseinheiten 60 Einheiten Gold, 25 Theile Silber, 10 Theile Kupfer und 5 Theile Blei. Er will aus diesen vier Mischungen eine neue Mischung von der Art machen, daß sie 84 Theile Gold, $9\frac{1}{4}$ Theile Silber, $3\frac{1}{5}$ Theile Kupfer und $2\frac{1}{20}$ Theile Blei enthalte. Wie viel muß er von den vier Mischungen A, B, C und D nehmen?

Auflösung.

Man setze, es müßten x Gewichtstheile von A, y Gewichtstheile von B, z Gewichtstheile von C, und ω Gewichtstheile von D genommen werden, so enthalten jene

x Theile von A offenbar $\frac{90}{100}$ x Theile Gold,
y " " B " $\frac{80}{100}$ y " "
z " " C " $\frac{70}{100}$ z " "
ω " " D " $\frac{60}{100}$ ω " "

Eben so enthalten x Theile von A $\frac{5}{100}$ x Theile Silber,
y " " B $\frac{12}{100}$ y " "
z " " C $\frac{20}{100}$ z " "
ω " " D $\frac{25}{100}$ ω " "

Ferner enthalten x Theile von A $\frac{3}{100}$ x Theile Kupfer,
y " " B $\frac{4}{100}$ y " "
z " " C $\frac{5}{100}$ z " "
ω " " D $\frac{10}{100}$ ω " "

Endlich sind in x Theilen von A $\frac{2}{100}$ x Theile Blei enthalten,
y " " B $\frac{4}{100}$ y " " "
z " " C $\frac{5}{100}$ z " " "
ω " " D $\frac{5}{100}$ ω " " "

Hieraus folgen nun, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, folgende vier Gleichungen:

1) $\frac{90}{100}x + \frac{80}{100}y + \frac{70}{100}z + \frac{60}{100}\omega = 84$,
2) $\frac{5}{100}x + \frac{12}{100}y + \frac{20}{100}z + \frac{25}{100}\omega = 9\frac{1}{4} = 9 \cdot 25$,
3) $\frac{3}{100}x + \frac{4}{100}y + \frac{5}{100}z + \frac{10}{100}\omega = 3\frac{4}{5} = 3 \cdot 8$,
4) $\frac{2}{100}x + \frac{4}{100}y + \frac{5}{100}z + \frac{5}{100}\omega = 2\frac{19}{20} = 2 \cdot 95$.

Schafft man aus diesen Gleichungen die Brüche hinweg, und kürzt die erste durch 10 noch ab, so erhält man

a) $9x + 8y + 7z + 6\omega = 840$,
b) $5x + 12y + 20z + 25\omega = 925$,
c) $3x + 4y + 5z + 10\omega = 380$,
d) $2x + 4y + 5z + 5\omega = 295$.

Multiplicirt man c mit 3, und zieht a davon ab, so ist, nachdem man durch 4 die gefundene Gleichung dividirt hat:

$$\alpha)\quad y + 2z + 6\omega = 75;$$

zieht man ferner die Summe von c und d von b ab, so findet man nach gehöriger Abkürzung:

$$\beta)\quad 2y + 5z + 5\omega = 125.$$

Eliminirt man endlich x aus c und d, so findet man

$$\gamma)\quad 4y + 5z - 5\omega = 125.$$

Zieht man nun von der mit 2 multiplicirten Gleichung α die Gleichung β ab, und von der mit 2 multiplicirten Gleichung β die Gleichung γ, so erhält man

$$\delta)\quad - z + 7\omega = 25,$$
$$\varepsilon)\quad + 5z + 15\omega = 125,$$

und δ mit 5 multiplicirt und zu ε addirt, gibt

$$50\omega = 250,$$

$\omega = 5$; also durch Substitution in

$z = 7\omega - 25 = 7 . 5 - 25$ (aus δ), wird

$z = 10$.

Aus α folgt

$y = 75 - 2z - 6\omega$, und durch Substitution

$$y = 75 - 20 - 30,$$
$$y = 25.$$

Aus d endlich folgt

$$x = \frac{295 - 4y - 5z - 5\omega}{2},$$

und durch Substitution

$$x = \frac{295 - 100 - 50 - 25}{2} = \frac{120}{2} = 60.$$

Also müssen von A 60 Theile, von B 25, von C 10, und von D 5 Theile genommen werden.

B. Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§. 216.

a) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Jede reine quadratische Gleichung (§. 205) kann durch die allgemeine Formel $x^2 = R$ dargestellt werden, wo R was immer für eine ganze oder gebrochene, positive oder negative, einfache oder zusammengesetzte Größe vorstellen kann. Es sei z. B. die Gleichung

$ax^2 + n = m - bx^2$ gegeben, so ist

$ax^2 + bx^2 = m - n$, oder

$(a + b)\, x^2 = m - n$, also $x^2 = \frac{m - n}{a + b}$.

§. 217.

Aus einer reinen quadratischen Gleichung $x^2 = R$ wird der Werth der Unbekannten nach §. 204, VII. bestimmt, wenn man aus beiden Gliedern der Gleichung die Quadratwurzel auszieht. Weil aber die Quadratwurzel positiv oder negativ sein kann (§. 132), so hat die Unbekannte in einer reinen quadratischen Gleichung zwei Werthe, nämlich einen positiven und einen negativen; d. i. aus der Gleichung $x^2 = R$ findet man $x = +\sqrt{R}$, oder $x = -\sqrt{R}$, oder kurz $x = \pm\sqrt{R}$. Ist z. B. $x^2 = 49$, so ist $x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$. Wenn x eine abstrakte Zahl bezeichnet, und in vielen anderen Fällen finden beide Werthe von x Statt, weil beide der Gleichung Genüge leisten. Allein in vielen Fällen kann nur einer von jenen zwei Werthen, welche die Rechnung nothwendig hervorbringt, angenommen werden, welches aber nur aus den Bedingungen der Aufgabe ausgemittelt werden kann, wie wir in der Folge in bestimmten Fällen sehen werden.

Zusatz.

Ist R ein vollkommenes Quadrat, z. B. $R = a^2$, so hat x zwei rationale, im entgegengesetzten Falle aber zwei irrationale Werthe. — Ist R negativ, so sind die Werthe von x unmöglich. Ist z. B. $x^2 = -a^2$, so ist $x = \pm\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$. Obgleich aber die Werthe von x imaginär sind, so leisten sie dennoch der Gleichung Genüge; d. i. sie machen diese durch Substitution zu einer identischen. Führt demnach die Auflösung irgend einer Aufgabe auf imaginäre Werthe, und können die unmöglichen Größen aus den Resultaten durch keine Rechnungsoperation hinweggeschafft werden, so ist dieß ein Zeichen, daß die gegebenen Größen unter den genannten Bedingungen nicht zusammen bestehen können, und der Calcül zeigt demnach, ob in der Aufgabe eine vernünftige Frage gestellt worden sei, oder nicht.

§. 218.

Jede quadratische Gleichung läßt sich auf die Form $x^2 + Px + Q = 0$ bringen.

Ist z. B. $ax + \frac{b}{x} - m = \frac{a}{x} - m$, so ist auch nach den bekannten Grundsätzen $ax^2 + b - mx = a - mx$, woraus $ax^2 = a - b$, oder $ax^2 - (a - b) = 0$, und endlich $x^2 - \frac{a-b}{a} = 0$ folgt. Ver-

gleicht man diesen Ausdruck mit jener allgemeinen Form, so zeigt sich, daß $P = 0$ und $Q = -\frac{a-b}{a} = \frac{b-a}{a}$ sei. Hat man die Gleichung

$$anx^2 + mx^2 = n^2x - m^2x + am, \text{ so ist auch}$$

$$(an + m)x^2 + (m^2 - n^2)x = am \text{ und}$$

$$x^2 + \frac{m^2 - n^2}{an + m}x = \frac{am}{an + m}, \text{ oder endlich}$$

$$x^2 + \frac{m^2 - n^2}{an + m}x - \frac{am}{an + m} = 0,$$

wo sich durch Vergleichung ergibt, daß

$$P = \frac{m^2 - n^2}{an + m} \text{ und } Q = \frac{-am}{an + m} \text{ sei.}$$

§. 219.

Ist eine quadratische Gleichung geordnet, also auf die Form $x^2 + Px + Q = 0$ gebracht, so läßt sich aus dieser das zweite Glied Px dadurch hinwegschaffen, daß man $x = y - \frac{1}{2}P$ setzt, und diesen Werth statt x in der gegebenen Gleichung substituirt. Denn man erhält

$$x^2 = y^2 - Py + \tfrac{1}{4}P^2,$$

$$Px = Py - \tfrac{1}{2}P^2,$$

$$Q = Q,$$

und durch Addition dieser drei letzten Gleichungen:

$$x^2 + Px + Q = y^2 - \tfrac{1}{4}P^2 + Q = 0, \text{ woraus}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}P^2 - Q = \frac{P^2 - 4Q}{4} \text{ und}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{P^2 - 4Q}{4}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2 - 4Q}$$

gefunden wird.

Weil aber $x = y - \frac{1}{2}P$ vermöge der Voraussetzung, so muß auch durch Substitution

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2 - 4Q} - \tfrac{1}{2}P, \text{ oder}$$

$$x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \text{ sein, also ist}$$

$$x = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}.$$

Man sieht hieraus, daß man eine unreine quadratische Gleichung dadurch auflösen könne, daß man sie zuerst nach der gegebenen Regel in eine reine quadratische Gleichung verwandelt, und dann nach §. 217

verfährt. Es sei z. B. $x^2 - 3x = 28$, oder $x^2 - 3x - 28 = 0$. Setzt man nun

$$x = y - (\tfrac{1}{2} \times -3) = y + \tfrac{3}{2},\ \text{so wird}$$
$$x^2 = y^2 + 3y + \tfrac{9}{4},$$
$$-3x = -3y - \tfrac{9}{2},\ \text{also durch Addition}$$
$$x^2 - 3x = y^2 - \tfrac{9}{4};$$

und weil $x^2 - 3x = 28$, so ist auch $y^2 - \frac{9}{4} = 28$, woraus

$$y^2 = 28 + \tfrac{9}{4} = \frac{112 + 9}{4} = \tfrac{121}{4}\ \text{und}$$
$$y = \pm \sqrt{\tfrac{121}{4}} = \pm \tfrac{11}{2}$$

gefunden wird. Also ist durch Substitution

$$x = y + \tfrac{3}{2} = \frac{\pm 11}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\pm 11 + 3}{2},$$

und daher entweder

$$x = \frac{+11 + 3}{2} = \tfrac{14}{2} = 7,\ \text{oder}$$
$$x = \frac{-11 + 3}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Durch Substitution in der gegebenen Gleichung zeigt es sich, daß diese beiden Werthe der Gleichung Genüge leisten.

In jeder quadratischen Gleichung erhält demnach die Unbekannte zwei Werthe.

§. 220.

Aus der allgemeinen Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ folgt $x^2 + Px = -Q$. Vergleicht man die erste Seite dieser Gleichung mit $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$, und setzt $Px = 2bx$, so wird

$$b = \frac{Px}{2x} = \frac{P}{2},\ \text{also}\ b^2 = \left(\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{4}$$

und man sieht sogleich, daß der Theil $\frac{P^2}{4}$ noch fehlt, um das erste Glied der aufgestellten Gleichung zu einem vollständigen Quadrate zu ergänzen. Addirt man nun auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{P^2}{4} = (\frac{1}{2}P)^2$, d. i. das Quadrat des halben Koefficienten des zweiten Gliedes, so erhält man

$$x^2 + Px + \frac{P^2}{4} = \frac{P^2}{4} - Q,\ \text{oder}$$
$$\left(x + \frac{P}{2}\right)^2 = \frac{P^2 - 4Q}{4},\ \text{und hieraus folgt}$$

$$x + \frac{P}{2} = \pm \sqrt{\frac{P^2 - 4Q}{4}}, \text{ also}$$

$$x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}, \text{ wie oben.}$$

Dieser Kunstgriff gibt demnach eine zweite Methode, quadratische Gleichungen aufzulösen. Man verfahre nämlich nach folgenden Regeln:

1) Man transformire die vorgelegte Gleichung so, daß x^2 positiv, und der Koefficient dieser Größe $= 1$ wird, und das von x freie Glied allein auf der andern Seite der Gleichung steht.
2) Nun addire man zu beiden Gliedern der Gleichung das Quadrat des halben Koefficienten von x.
3) Endlich ziehe man aus beiden Gliedern der so transformirten Gleichung die Quadratwurzel aus, so erhält man eine einfache Gleichung, welche man bereits aufzulösen weiß.

Es sei z. B. $x^2 - 7x + 12 = 0$, so ist

$$x^2 - 7x = -12, \text{ und durch Ergänzung}$$

$$x^2 - 7x + \left(\frac{-7}{2}\right)^2 = \left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 12,$$

$$x^2 - 7x + \tfrac{49}{4} = \tfrac{49}{4} - 12,$$

$$(x - \tfrac{7}{2})^2 = \tfrac{1}{4},$$

$$x - \tfrac{7}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \pm \tfrac{1}{2},$$

$$x = \tfrac{7}{2} \pm \tfrac{1}{2}, \text{ also entweder}$$

$$x = \frac{7+1}{2} = 4, \text{ oder}$$

$$x = \frac{7-1}{2} = 3.$$

Dieselben Werthe findet man auch, wenn man in der allgemeinen Formel $P = -7$ und $Q = 12$ setzt.

§. 221.

Es sei $ax^2 + bx + c = 0$, oder

$$ax^2 + bx = -c, \text{ so ist, weil}$$

$$4a = 4a, \text{ durch Multiplication auch}$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac, \text{ und weil}$$

$$b^2 = b^2, \text{ so ist durch Addition}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac, \text{ d. i.}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \text{ und}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gefunden wird.

Man sieht hieraus, daß die Werthe für die Unbekannte aus einer unreinen quadratischen Gleichung auch gefunden werden, wenn man die gegebene Gleichung mit dem vierfachen Koefficienten von x^2 multiplicirt, hierzu auf beiden Seiten das Quadrat des Koefficienten von x^1 addirt, und dann auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel auszieht, wodurch eine einfache Gleichung erhalten wird. Diese Methode ist besonders dann zu empfehlen, wenn in der Gleichung

$$a x^2 + b x + c = 0$$

die Koefficienten b und c durch a nicht theilbar sind, und a eine von der Einheit verschiedene Zahl bezeichnet.

Wenn wir diese Regel auf die Gleichung

$x^2 + P x = - Q$ anwenden, so finden wir

$$4 x^2 + 4 P x = - 4 Q,$$

$$4 x^2 + 4 P x + P^2 = P^2 - 4 Q,$$

$$(2 x + P)^2 = P^2 - 4 Q,$$

$2 x + P = \pm \sqrt{P^2 - 4 Q}$, und hieraus

$x = \frac{- P \pm \sqrt{P^2 - 4 Q}}{2}$, wie §. 220.

Es sei z. B. $4 x^2 + 3 x = 45$, so ist

$\times 16$

$$64 x^2 + 48 x = 720,$$

$$64 x^2 + 48 x + 3^2 = 720 + 9,$$

$$(8 x + 3)^2 = 729,$$

$x = \frac{- 3 \pm 27}{8}$, also entweder

$x = \frac{- 3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = + 3$, oder

$$x = \frac{- 3 - 27}{8} = \frac{- 30}{8} = - \frac{15}{4}.$$

Zusatz.

Man könnte aber auch $b x + c$ als die beiden Bestandtheile $2 u v + v^2$ betrachten, welche das zweite Glied des Binomes $(u + v)$ im Quadrate gibt, mithin

$v^2 = c$, also $v = \sqrt{c}$ und

$2 u v = 2 u \sqrt{c} = b x$, also $u = \frac{b x}{2 \sqrt{c}}$

und $u^2 = \frac{b^2 x^2}{4 c}$ setzen, dann würde

$$ax^2 + bx + c = \left(ax^2 - \frac{b^2 x^2}{4c}\right) + \left(\frac{b^2 x^2}{4c} + bx + c\right) = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4c} x^2 + \left[\frac{bx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right]^2 = 0, \text{ oder}$$

$$\left[\frac{bx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right]^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4c}\right) x^2 = 0, \text{ oder}$$

$$\left[\sqrt{c} + \frac{bx}{2\sqrt{c}}\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{c}} . x\right]^2 = 0, \text{ also}$$

$$\left[\sqrt{c} + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{c}} . x\right]\left[\sqrt{c} + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{c}} . x\right] = 0,$$

woraus

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2c\,[b - \sqrt{b^2 - 4ac}]}{b^2 - (b^2 - 4ac)} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2c\,[b + \sqrt{b^2 - 4ac}]}{b^2 - (b^2 - 4ac)} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gefunden wird, wie oben.

Anmerkung 1.

Wir haben oben im Allgemeinen die Gleichung $ax^2 + bx = -c$ zuerst mit $4a$ multiplicirt, um alle gebrochenen Zahlen zu vermeiden; ist aber b eine gerade Zahl, so erreicht man seinen Zweck schon durch die Multiplikation mit a auf eine einfachere Art. Es sei z. B. die Gleichung

$3x^2 - 10x = 200$, so wird durch Multiplikation mit 3:

$9x^2 - 30x = 600$, und nun beiderseits $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2$ addirt,

$9x^2 - 30x + 5^2 = 600 + 5^2 = 600 + 25 = 625$, oder

$(3x - 5)^2 = 625$ und $3x - 5 = \pm\sqrt{625} = \pm 25$, also

$x = \frac{5 \pm 25}{3}$, folglich entweder $x = \frac{5 + 25}{3} = 10$, oder

$x = \frac{5 - 25}{3} = \frac{-20}{3}$.

Hat die vorgelegte Gleichung die Form

$$n\alpha^2 x^2 + m\alpha x = c,$$

so ist es bloß nöthig, mit n oder mit $4n$ zu multipliciren und $\left(\frac{m}{2}\right)^2$ oder m^2 beiderseits zu addiren, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Anmerkung 2.

Aus der Gleichung

$$a x^2 + b x + c = 0 \ldots (1)$$

fanden wir $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ldots (\alpha)$

Setzt man in (1) nun $a = 0$, so wird $bx + c = 0$, also $x = -\frac{c}{b}$ und für $a = 0$ folgt aus der allgemeinen Auflösung (α)

$$x = \frac{-b \pm b}{0} \text{ oder } \begin{cases} x_1 = \frac{0}{0} \\ x_2 = \frac{-2b}{0} = -\infty, \end{cases}$$

so daß x_1 in unbestimmter Form erscheint, x_2 aber unendlich wird; die Formel (α) scheint demnach fehlerhaft zu sein. Allein sie ist vollkommen richtig, denn es folgt (aus α)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{[-b + \sqrt{b^2 - 4ac}]\,[-b - \sqrt{b^2 - 4ac}]}{2a\,[-b - \sqrt{b^2 - 4ac}]}$$

$$= \frac{4ac}{2a\,(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

und für $a = 0$ wird nun $x_1 = -\frac{c}{b}$ wie oben aus der Gleichung $bx + c = 0$. Es ist also in diesem Falle $\frac{0}{0} = -\frac{c}{b}$.

Da $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, also $x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$, so folgt hieraus $x_2 = \frac{c}{a} : x_1 = \frac{c}{a} : \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$ wie vorhin.

Die Gleichung $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$ $= \frac{2c}{0} = \infty$ (für $a = 0$) lehrt uns, daß wenn in der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ der Koefficient a von x^2 ohne Ende abnimmt, eine der beiden Wurzeln ohne Ende wächst und mit dem gänzlichen Verschwinden von a größer wird als jede angebbare Zahl.

§. 222.

Wir haben bisher gesehen, daß die Auflösung einer quadratischen Gleichung auf zwei Werthe für x führte; weiter unten werden wir

noch auf eine andere Art beweisen, daß jede quadratische Gleichung nothwendig zwei Werthe geben, oder zwei Wurzeln haben müsse. — Setzen wir nun, es seien a und b die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$, d. i. es sei $x = a$ oder $x = b$, so ist $x - a = 0$ und $x - b = 0$, also $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = 0$.

Die Auflösung der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ gab aber

$$x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2};$$

es muß also z. B.

$$a = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \text{ und}$$

$$b = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \text{ sein, oder umgekehrt.}$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so findet man

$$a + b = -P \text{ oder } -(a + b) = P,$$

und wenn man multiplicirt:

$$ab = \frac{P^2}{4} - \left(\frac{P^2}{4} - Q\right) = Q.$$

Substituirt man nun diese Werthe in der Gleichung

$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$, so ist auch

$(x - a)(x - b) = x^2 + Px + Q = 0$.

α) Hieraus geht nun hervor, daß das Polynom jeder geordneten quadratischen Gleichung, deren Wurzeln a und b sind, als ein Produkt aus zwei einfachen Faktoren $(x - a)$ und $(x - b)$ betrachtet werden könne, und man sieht zugleich, daß der Koefficient P des zweiten Gliedes die algebraische Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen, der bekannte Theil Q aber das Produkt jener Wurzeln sei. So z. B. ist in der Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$, deren Wurzeln 3 und 4 sind (§. 220), der Koefficient $-7 = -3 - 4 = -(3 + 4)$, und das dritte Glied $12 = 3 \,.\, 4$.

β) Es können aber hier verschiedene Fälle Statt finden, denn entweder sind a und b zugleich positiv oder negativ, oder a und b haben verschiedene Zeichen, worauf wir nun vorzüglich aufmerksam sein wollen.

1. Sind beide Wurzeln positiv, so ist

$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = 0$,

sind aber beide Wurzeln negativ, so ist

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = 0.$$

Haben demnach die Wurzeln gleiche Zeichen, so ist das zweite Glied negativ oder positiv, je nachdem die beiden Wurzeln positiv oder negativ sind; in beiden Fällen aber ist das dritte Glied positiv. Sind beide Wurzeln einander gleich, ist nämlich $a = b$, so erhält man im ersten Falle

$x^2 - 2ax + a^2 = 0$, im andern Falle aber $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

II. Haben beide Wurzeln verschiedene Zeichen, ist z. B. $x = a$ und dann $x = -b$, so ist

$$(x - a)(x + b) = x^2 - (a - b)x - ab = 0 \text{ oder}$$
$$= x^2 + (b - a)x - ab = 0.$$

Haben also die Wurzeln verschiedene Zeichen, so ist das dritte Glied immer negativ, das zweite Glied aber ist negativ oder positiv, je nachdem die positive Wurzel größer oder kleiner ist, als die negative, absolut betrachtet. Ist hier $a = b$, so ist $a - b = 0$, und die Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$x^2 - ab = x^2 - a^2 = 0.$$

γ) Hat man demnach eine quadratische Gleichung auf 0 gebracht, und geordnet, so kann man aus den Zeichen der Glieder auf die Zeichen der Wurzeln schließen. Ist nämlich das dritte Glied positiv, so haben die Wurzeln gleiche Zeichen; ist aber das dritte Glied negativ, so haben die Wurzeln verschiedene Zeichen. Haben beide Wurzeln dasselbe Zeichen, so erkennt man aus dem Zeichen des zweiten Gliedes zugleich das Zeichen der Wurzeln; diese sind nämlich positiv oder negativ, je nachdem das zweite Glied negativ oder positiv ist. — Haben die Wurzeln der Gleichung verschiedene Zeichen, so ist die positive Wurzel, numerisch betrachtet, entweder größer oder kleiner als die negative, je nachdem das zweite Glied der Gleichung das Zeichen — oder + vor sich hat. Aus dem Zeichenwechsel kann man also auf eine positive, aus der Zeichenfolge aber auf eine negative Wurzel schließen; und ist daher in der Gleichung ein Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge, so haben die Wurzeln entgegengesetzte Zeichen.

δ) Sind die Wurzeln a und b der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ rational, so müssen auch P und Q rational sein, aber nicht umgekehrt; d. i. wenn P und Q rational sind, kann man nicht allgemein auf die

Rationalität der Wurzeln schließen (?). Da nun $Q = ab$ (α), so müssen die Wurzeln, wenn sie ganze rationale Zahlen sind, unter den Divisoren von Q enthalten sein. Man suche daher alle Divisoren von Q (§. 75), und versuche, welche von ihnen der Gleichung Genüge leisten, nachdem man zuvor nach γ) beurtheilt hat, ob diese Faktoren positiv oder negativ zu substituiren seien. So z. B. in der Gleichung $x^2 + x - 156 = 0$ sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156 Divisoren von 156, und unter diesen thun $+ 12$ und $- 13$ der Gleichung Genüge, und deßhalb sind 12 und $- 13$ die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung. — Läßt eine Gleichung zwei positive oder zwei negative Wurzeln vermuthen, so substituirt man nur jene Divisoren von Q, welche $< P$ sind; denn da $P = \mp (a + b)$, so muß, numerisch betrachtet, $P > a$ und auch $> b$ sein. — Leistet keiner der Faktoren von Q der Gleichung Genüge, man mag sie positiv oder negativ substituiren, so ist dieß ein Zeichen, daß die Gleichung keine rationalen Wurzeln habe.

ε) Sind die Größen P und Q zwar rational, aber a und b irrational, d. i. sind die Wurzeln der Gleichung irrational, so müssen diese nothwendig von der Form $m + \sqrt{n}$ und $m - \sqrt{n}$ sein; denn nur dann ist

$$a + b = m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} = 2m \text{ und}$$

$$ab = (m + \sqrt{n})(m - \sqrt{n}) = m^2 - n,$$

d. i. nur unter dieser einzigen Bedingung können P und Q zugleich rationale Zahlen sein, wie vorausgesetzt wurde. So z. B. wird aus der Gleichung $x^2 - 2x - 11 = 0$

$$x = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

gefunden, also

$$a = 1 + 2\sqrt{3} \text{ und } b = 1 - 2\sqrt{3}.$$

ς) Sind die Wurzeln der Gleichung imaginär, welches der Fall ist, sobald in der Formel $x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$ die Größe $4Q > P^2$ oder $Q > \frac{P^2}{4}$ ist, so müssen die Wurzeln nothwendig die Form

$$m + \sqrt{-n} \quad \text{und} \quad m - \sqrt{-n}$$

haben, weil unter keiner andern Bedingung P und Q zugleich reelle Größen bezeichnen können.

Anmerkung 1. Bei dieser Auflösungsart wird vorausgesetzt, daß die Gleichung auf 0 gebracht und geordnet sei, wo demnach keine Brüche vorkommen dürfen. Kommen daher in der Gleichung Brüche vor, so müssen diese hinweggeschafft werden, und zwar auf folgende Art. Man setze x gleich einer andern unbekannten Größe, dividirt durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner, und substituire diesen Quotienten in der gegebenen Gleichung. Multiplicirt man dann die neue Gleichung mit dem Nenner des ersten Gliedes, so wird die Gleichung von den Brüchen befreit. Es sei z. B. die Gleichung $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$. Setzt man hier $x = \frac{u}{6}$, also $x^2 = \frac{u^2}{36}$, so wird

$$x^2 - \tfrac{7}{6}x + \tfrac{1}{3} = \frac{u^2}{36} - \tfrac{7}{6} \cdot \frac{u}{6} + \tfrac{1}{3} = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{u^2}{36} - \frac{7u}{36} + \tfrac{1}{3} = 0, \text{ und mit 36 multiplicirt:}$$

$$u^2 - 7u + 12 = 0,$$

woraus $u = 4$ oder $u = 3$ gefunden wird; also ist durch Substitution $x = \frac{u}{6}$, d. i.

$$x = \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3} \quad \text{oder} \quad x = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Anmerkung 2. Man hüte sich vor der irrigen Vorstellung, daß $x = a$ und $x = b$ zugleich sei, weil sonst nothwendig $a = b$ sein müßte. Der Buchstabe x ist nur ein Zeichen, durch welches man die gesuchte Größe darstellt, und er kann daher verschiedene Werthe bezeichnen. Führt die Rechnung auf solche verschiedene Größen, so muß aus der Natur der Aufgabe beurtheilt werden, welche von diesen als die gesuchte zu betrachten, oder unter welchen Bedingungen die eine oder die andere zulässig sei.

Anmerkung 3. Soll ein Polynom von der Form $ax^2 + bx + c$ in Faktoren aufgelöst werden (§. 74), so setze man es $= 0$, und löse diese quadratische Gleichung auf. Man setze nämlich

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ so findet man}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (§. 221), d. i.}$$

$$x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{oder} \quad x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

und

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{oder} \quad x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

also

$$\left[x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a},$$

oder

$$\left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a},$$

und wenn man mit a multiplicirt, so ist

$$ax^2 + bx + c = a\left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right].$$

Will man aber nur zwei Binomialfaktoren haben, so erinnere man sich, daß $a = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{a}$, und multiplicirt man jeden der beiden zweitheiligen Faktoren mit $\sqrt{a}$, so erhält man endlich

$$ax^2 + bx + c = \left[x\sqrt{a} + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\right]\left[x\sqrt{a} + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\right].$$

Uebrigens ist im Allgemeinen die vorhergehende Form dieser letztern um der Einfachheit willen vorzuziehen. So findet man zum Beispiel, daß $6x^2 + 13x + 5 = (2x + 1)(3x + 5)$ sei (§. 74, 3); denn setzt man

$$6x^2 + 13x + 5 = 0, \text{ so wird}$$
$$x^2 + \tfrac{13}{6}x + \tfrac{5}{6} = 0,$$

und wenn $x = \frac{y}{6}$ gesetzt wird, so ist

$$\frac{y^2}{36} + \frac{13 \,.\, y}{36} + \tfrac{5}{6} = 0 \text{ und}$$
$$y^2 + 13y + 30 = 0,$$

woraus $y = -3$ oder $y = -10$ gefunden wird (nach δ); also ist

$$x = \frac{y}{6} = \frac{-3}{6} = -\tfrac{1}{2} \text{ oder } x = \frac{-10}{6} = -\tfrac{5}{3},$$

und daher

$$(x + \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{5}{3}) = x^2 + \tfrac{13}{6}x + \tfrac{5}{6}, \text{ oder}$$
$$6x^2 + 13x + 5 = 6(x + \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{5}{3}),$$
$$= 2(x + \tfrac{1}{2}) \,.\, 3(x + \tfrac{5}{3}),$$
$$= (2x + 1)(3x + 5).$$

§. 223.

I. Daß jede quadratische Gleichung nothwendig zwei Werthe für x enthalten müsse, davon kann man sich auch auf folgende Art überzeugen. Es sei z. B. a eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$, so muß durch Substitution auch $a^2 + Pa + Q = 0$ sein, und zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so findet man

$$x^2 + Px - a^2 - Pa = 0, \text{ oder}$$
$$x^2 - a^2 + P(x - a) = 0,$$
$$(x + a)(x - a) + P(x - a) = 0,$$
$$(x - a)(x + a + P) = 0.$$

Dieses Produkt wird $= 0$, wenn man $x - a = 0$, d. i. wenn man $x = a$ setzt, oder wenn man $(x + a + P) = 0$, also

$$x = -a - P = -(a + P)$$

nimmt. Es leistet demnach sowohl $x = a$, als auch $x = -(a + P)$ der Gleichung Genüge, oder jede quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln, aber auch nur diese zwei.

II. Eine quadratische Gleichung kann aber auch nicht mehr als zwei Wurzeln haben. Denn seien a und b zwei Wurzeln der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ und man nehme an, daß noch ein dritter von a und b verschiedener Werth α unserer Gleichung Genüge leiste, also das Polynom der Gleichung für $x = \alpha$ verschwinde; so müßte, weil

$$x^2 + Px + Q = (x - a)(x - b) = 0 \text{ ist, auch}$$
$$\alpha^2 + P\alpha + Q = (\alpha - a)(\alpha - b) = 0 \text{ sein,}$$

was absurd ist, da α von a und b verschieden ist.

III. Ist a eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$, so muß diese durch $x - a$ theilbar sein, oder $(x - a)$ ist ein Faktor der gegebenen Gleichung. Denn wäre die Gleichung durch $x - a$ nicht theilbar, so müßte irgend ein Rest R bleiben, oder es wäre z. B.

$$\frac{x^2 + Px + Q}{x - a} = q + \frac{R}{x - a}, \text{ woraus}$$
$$x^2 + Px + Q = q(x - a) + R$$

folgt, und für $x = a$ wird $0 = 0 + R$ oder $R = 0$, d. i. es kann kein Rest bleiben, wie aus der Gleichung $(x - a)(x + a + P) = 0$ (I.) dieselbe Wahrheit schon von selbst einleuchtet.

IV. In einer geordneten quadratischen Gleichung

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

wo P und Q ganze Zahlen sein sollen, kann keine reelle Wurzel durch einen rationalen Bruch dargestellt werden. Denn wäre z. B. der rationale Bruch $\frac{a}{b}$, welcher zur kleinsten Benennung gebracht sein soll, eine Wurzel der Gleichung, so müßte durch Substitution

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + P \cdot \frac{a}{b} + Q = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{aP}{b} + Q = 0,$$

mithin

$$\frac{a^2}{b} = -(aP + bQ)$$

sein, d. i. es müßte, weil a, b, P und Q ganze Zahlen sind, also auch $aP + bQ$ eine ganze Zahl ist, a^2 durch b theilbar sein, welches der Voraussetzung, daß a und b relative Primzahlen seien, gerade zuwider ist.

§. 224.

1. Wenn man in der Formel $x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$, welche die beiden Werthe für x aus der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ darstellt, $P^2 = 4Q$, also $Q = \frac{1}{4}P^2$ und $P^2 - 4Q = 0$ setzt, so erhält man $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}P$. Setzt man in diesem Falle in der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ für Q den Werth $\frac{1}{4}P^2$, so ist $x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2 = (x + \frac{1}{2}P)^2 = 0$, also $x = -\frac{1}{2}P$.

2. Ist aber $P^2 \gtrless 4Q$, so hat x immer zwei verschiedene Werthe, weil dann $P^2 - 4Q = \pm\delta$, also $\sqrt{P^2 - 4Q} = \pm\sqrt{\pm\delta}$ ist.

3. Wenn $P^2 > 4Q$, so ist $\sqrt{P^2 - 4Q}$ immer eine reelle Größe, und zwar rational oder irrational, je nachdem $P^2 - 4Q$ ein vollkommenes Quadrat ist, oder nicht. Es sind in diesem Falle also auch die beiden Wurzeln mögliche rationale oder irrationale Größen.

4. Wenn Q in der Gleichung negativ gegeben ist, z. B. $Q = -q$, so wird $P^2 - 4Q = P^2 - 4 \times -q = P^2 + 4q$, und also $\sqrt{P^2 + 4q}$, immer eine mögliche Größe, es mag P positiv oder negativ in der Gleichung gegeben sein. Ist also das dritte Glied einer

geordneten quadratischen Gleichung negativ, so sind die beiden Wurzeln derselben mögliche Größen.

5. Ist aber Q positiv, und zugleich $4Q > P^2$, so ist $P^2 - 4Q$, negativ, also $\sqrt{P^2 - 4Q} = \sqrt{-(4Q - P^2)}$ unmöglich; folglich sind die zwei Wurzeln einer quadratischen Gleichung imaginär, wenn das dritte Glied derselben positiv und zugleich $> \frac{1}{4} P^2$ ist.

6. Das Polynom der Gleichung

$$x^2 + Px + Q = 0 \ldots (1)$$

läßt sich offenbar auch in folgender Form darstellen:

$$\left(x + \frac{P}{2}\right)^2 - \left(\frac{P^2}{4} - Q\right) = 0$$

und aus der aufmerksamen Betrachtung dieser Form ergibt sich:

ä) Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (1) reell sind; so ist das Polynom der Gleichung offenbar die Differenz zweier positiven Größen oder zweier Quadrate, wenn nämlich $\frac{P^2}{4} - Q = R^2$ ist;

b) sind die beiden Wurzeln der Gleichung einander gleich, mithin $\frac{P^2}{4} - Q = 0$; so ist das Polynom der Gleichung ein vollständiges Quadrat.

c) Sind beide Wurzeln imaginär, mithin $\frac{P^2}{4} - Q < 0$, so ist das Polynom der Gleichung die Summe zweier absolut positiver Größen, nämlich

$$\left(x + \frac{P}{2}\right)^2 + \left(Q - \frac{P^2}{4}\right) = 0$$

oder die Summe zweier Quadrate, wenn

$$Q - \frac{P^2}{4} = R^2.$$

Beispiele.

I. $x^2 - 14x + 49 = 0,$

$$(x - 7)^2 = 0,$$

$$x - 7 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = +7.$$

II. $$x^2 + 2x + 1 = 0,$$
$$(x + 1)^2 = 0,$$
$$x + 1 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = -1.$$

III. $x^2 + x - 6 = 0$. Hier ist $P = +1$, $Q = -6$, also durch Substitution in der Formel $x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$ wird $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times -6}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$, folglich entweder

$$x = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ oder } x = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

IV. $x^2 - 2x - 2 = 0$. Hier ist $P = -2$, $Q = -2$, also durch Substitution

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3};$$

demnach ist

$$x = 1 + \sqrt{3} \text{ oder } x = 1 - \sqrt{3}.$$

V. $x^2 - 2x + 4 = 0$. Hier ist $P = -2$, $Q = 4$, also durch Substitution

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-3},$$

daher

$$x = 1 + \sqrt{-3} \text{ oder } x = 1 - \sqrt{-3}.$$

§. 225.

Sind die Größen P und Q in der Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ irrational, z. B. $P = \sqrt{p}$, $Q = \sqrt{q}$, so läßt sich dennoch die Gleichung durch die Formel $x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$ auflösen. Man erhält nämlich durch bloße Substitution $x = \frac{-\sqrt{p} \pm \sqrt{p - 4\sqrt{q}}}{2}$.

Nicht selten läßt sich die Quadratwurzel aus $p - 4\sqrt{q}$ ausziehen; wir wollen daher die Merkmale aufsuchen, an welchen man erkennt, ob ein Binom von der Form $A + \sqrt{B}$ ein vollkommenes Quadrat sei, oder nicht.

Man setze, es sei $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, so ist

$$A \pm \sqrt{B} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x + y \pm 2\sqrt{xy},$$

und hieraus folgt:

$$x + y = A \text{ und } \pm 2\sqrt{xy} = \pm \sqrt{B} \text{ oder}$$

$$4xy = B \text{ (§. 204, VIII.).}$$

Es ist daher auch

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = A^2 \text{ und}$$

$$-4xy = -B, \text{ folglich}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = A^2 - B \text{ und}$$

$$x - y = \pm \sqrt{A^2 - B}.$$

Aus dieser Gleichung und der obigen $x + y = A$ folgt

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2} \text{ und } y = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Substituirt man diese Werthe in der aufgestellten Gleichung

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}, \text{ so erhält man}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

oder

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}};$$

denn man wird leicht einsehen, daß es überflüssig sei, unter den Radikalzeichen beide Zeichen vor dem zweiten Theile des Binoms beizubehalten.

Ist nun $A^2 - B$ ein vollkommenes Quadrat, z. B. $A^2 - B = M^2$ so ist $\sqrt{A^2 - B} = M$, und es läßt sich dann aus $A \pm \sqrt{B}$ die Wurzel mit Vortheile ausziehen. Für diesen Fall erhalten wir

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + M}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - M}{2}}.$$

Zusatz.

Da $x + y = A$ und $xy = \frac{B}{4}$, so können (nach §. 222) x und y als die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 - Au + \frac{B}{4} = 0$$

angesehen werden, denn man erhält hieraus

$$u_1 = x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \text{ und } u_2 = y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Beispiele.

1. Man ziehe die Quadratwurzel aus dem Binome $3 + 2\sqrt{2}$. Durch Vergleichung mit der allgemeinen Formel ergibt sich, daß $A = 3$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, also $B = 8$ und $A^2 - B = M^2 = 9 - 8 = 1$, oder $M = 1$ sei.

Es ist daher durch Substitution

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} + 1.$$

II. Es sei die zweite Wurzel aus $7 - \sqrt{13}$ zu ziehen. Hier ist $A = 7$, $\sqrt{B} = \sqrt{13}$ oder $B = 13$, also

$$A^2 - B = M^2 = 49 - 13 = 36 \text{ und}$$

$$M = \sqrt{36} = 6, \text{ daher durch Substitution}$$

$$\sqrt{7 - \sqrt{13}} = \sqrt{\frac{7+6}{2}} - \sqrt{\frac{7-6}{2}} = \sqrt{\tfrac{13}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{26}{4}} - \sqrt{\tfrac{2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{26} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{13} - 1).$$

III. Man ziehe die Quadratwurzel aus $m + x + x\sqrt{\frac{2m}{x} + 1}$. Hier setze man $A = m + x$, also $A^2 = m^2 + 2mx + x^2$, und $\sqrt{B} = x\sqrt{\frac{2m}{x} + 1}$, oder $B = x^2\left(\frac{2m}{x} + 1\right) = 2mx + x^2$, also

$$A^2 - B = m^2 + 2mx + x^2 - 2mx - x^2 = m^2,$$

$$\sqrt{A^2 - B} = M = \sqrt{m^2} = m.$$

Durch Substitution erhält man also:

$$\sqrt{m + x + x\sqrt{\left(\frac{2m}{x} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{m + x + m}{2}} + \sqrt{\frac{m + x - m}{2}}$$

$$= \sqrt{m + \frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Ist $A^2 - B$ kein vollkommenes Quadrat, so kann man zwar nach unserer allgemeinen Formel aus $A \pm \sqrt{B}$ die Quadratwurzel ausziehen: allein das Resultat ist dann zusammengesetzter, als der gegebene Ausdruck selbst.

Zusatz 1.

Wenn die beiden Glieder des Binoms $A \pm \sqrt{B}$ einen gemeinschaftlichen irrationalen Faktor haben, so ist es besser, wenn man diesen zuvor herausnimmt. So z. B. ist

$$7\sqrt{2} + 4\sqrt{6} = 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{2}.(7 + 4\sqrt{3}),$$

also

$$\sqrt{7\sqrt{2}+4\sqrt{6}} = \sqrt[4]{2}.\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}.\left(\sqrt{\frac{7+1}{2}} + \sqrt{\frac{7-1}{2}}\right)$$

$$= \sqrt[4]{2}.(\sqrt{4} + \sqrt{3}) = \sqrt[4]{2}\,(2 + \sqrt{3}),$$

denn hier ist $A = 7$, $B = 16.3$, $M^2 = 49 - 48 = 1$ und $M = 1$.

Zusatz 2.

Der Gebrauch der Formel.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+M}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-M}{2}}$$

setzt voraus, daß A positiv und $> \sqrt{B}$ sei; denn aus dem bereits Gesagten ist ersichtlich, daß A als die Summe der Quadrate zweier Zahlen, und $\sqrt{B}$ als das doppelte Produkt derselben Zahlen angesehen werden müssen, wenn $A \pm \sqrt{B}$ ein vollkommenes Quadrat sein soll. Wenn nun a und b zwei verschiedene Zahlen bezeichnen, so muß $(a-b)^2$ positiv sein, es mag $a \gtrless b$ sein, folglich auch $a^2 + b^2 - 2ab$; und demnach ist allgemein $a^2 + b^2 > 2ab$, d. i. die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist immer größer, als das doppelte Produkt eben dieser Zahlen, es mögen a und b wie immer beschaffen sein. — Ist aber in dem Binome $A \pm \sqrt{B}$ das Glied $\sqrt{B} > A$, so ist $A^2 - B$ negativ, und daher M imaginär. Ist nun z. B. $x = \pm\sqrt{A - \sqrt{B}}$, so hat x wirklich zwei imaginäre Werthe, ist aber $x = \sqrt{A + \sqrt{B}}$, so müssen die Werthe für x reelle Größen sein, obgleich sie die obige Reduktionsformel imaginär gibt. Führt nun die genannte Formel auf eine solche Absurdität, so erkennt man hieraus, daß das gegebene Binom $A + \sqrt{B}$ einen gemeinschaftlichen irrationalen Faktor enthält, welcher vor der Reduktion noch herausgenommen werden muß. Es sei z. B.

$$x = \sqrt{12 + 8\sqrt{3}}.$$

Setzt man hier $A = 12$, also $A^2 = 144$ und $\sqrt{B} = 8\sqrt{3}$, demnach $B = 64.3 = 192$, so wird $M = \sqrt{144 - 192} = \sqrt{-48}$, und dennoch muß x einen reellen Werth haben. Man setze also

$$12+8\sqrt{3}=4\sqrt{3}.\left(\frac{12}{4\sqrt{3}}+2\right)=4\sqrt{3}.\left(\frac{3}{\sqrt{3}}+2\right)=4\sqrt{3}(2+\sqrt{3}),$$

so ist

$$x=\sqrt{12+8\sqrt{3}}=\sqrt{4\sqrt{3}.(2+\sqrt{3})}=2\sqrt[4]{3}.\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Setzt man nun $A=2$ und $\sqrt{B}=\sqrt{3}$, so ist

$$A^2-B=M^2=4-3=1, \text{ und daher}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

folglich $x=2\sqrt[4]{3}.\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=(1+\sqrt{3}).\sqrt{2}.\sqrt[4]{3}.$

Wäre aus dem Binome $\sqrt{B}-A=-(A-\sqrt{B})$ die zweite Wurzel zu suchen, so wird $x=\sqrt{\sqrt{B}-A}$ imaginär, wenn $\sqrt{B}<A$ im entgegengesetzten Falle aber ist x reell.

Zusatz 3.

Ist B negativ, z. B. $B=-b^2$, also $-B=b^2$, so erhalten wir durch Substitution

$$\sqrt{A\pm\sqrt{-b^2}}=\sqrt{A\pm b\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2+b^2}}{2}},$$

wo der erste Theil $\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+b^2}}{2}}$ immer reell ist, der zweite Theil $\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2+b^2}}{2}}$ aber immer imaginär, indem $A<\sqrt{A^2+b^2}$ ist. Da nun

$$\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2+b^2}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+b^2}-A}{2}(-1)}=\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+b^2}-A}{2}}.\sqrt{-1}$$

ist, so erhalten wir, wenn Kürze halber

$$\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+b^2}}{2}}=p \text{ und } \sqrt{\frac{\sqrt{A^2+b^2}-A}{2}}=q$$

gesetzt wird;

$$\sqrt{A\pm b\sqrt{-1}}=p\pm q\sqrt{-1},$$

wo p und q was immer für reelle Größen bezeichnen.

§. 226.

Lehrsatz.

Jede algebraische imaginäre Größe läßt sich auf die Form $P + Q\sqrt{-1}$ zurückführen.

Beweis.

Jede algebraische imaginäre Größe ist in der Form $\sqrt[2m]{-A}$ enthalten (§. 132). Nun läßt sich aber jede gerade Zahl 2m auf die Form $2^n . (2p+1)$ bringen, also wird

$$\sqrt[2m]{-A} = \sqrt[2^n.(2p+1)]{-A} = \sqrt[2^n]{\sqrt[2p+1]{-A}} = \sqrt[2^n]{-\sqrt[2p+1]{A}},$$

oder wenn wir die reelle Größe $\sqrt[2p+1]{A} = a$ setzen,

$$\sqrt[2m]{-A} = \sqrt[2^n]{-a} = \sqrt[2^n]{a} . \sqrt[2^n]{-1} = \alpha . \sqrt[2^n]{-1},$$

wenn Kürze halber $\sqrt[2^n]{a} = \alpha$ gesetzt wird.

Nun ist aber (nach §. 127, 5)

$$\sqrt[2^n]{-1} = \sqrt[2.2^{n-1}]{-1} = \sqrt[2^{n-1}]{\sqrt{-1}} = \sqrt[2^{n-1}]{0+\sqrt{-1}} = \sqrt[2^{n-2}]{\sqrt{0+\sqrt{-1}}},$$

und, nach §. 225, Zus. 3, ist

$$\sqrt{0+\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{0+\sqrt{0+1}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{0+1}-0}{2}} . \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} . \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{-1});$$

also läßt sich $\sqrt{0+\sqrt{-1}}$ auf die Form $p_1 + q_1\sqrt{-1}$ bringen, wo $p_1 = q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist, und daher wird durch Substitution

$$\sqrt[2^n]{-1} = \sqrt[2^{n-2}]{p_1 + q_1\sqrt{-1}}.$$

Auf dieselbe Art erhält man ferner

$$\sqrt[2^{n-2}]{p_1 + q_1\sqrt{-1}} = \sqrt[2^{n-3}]{\sqrt{p_1+q_1\sqrt{-1}}} = \sqrt[2^{n-3}]{p_2+q_2\sqrt{-1}}$$
$$= \sqrt[2^{n-4}]{\sqrt{p_2+q_2\sqrt{-1}}} = \sqrt[2^{n-4}]{p_3+q_3\sqrt{-1}} = \text{ꝛc.}$$

Führt man die Rechnung auf diese Art fort, so muß man nothwendig am Ende auf den Ausdruck

$$\sqrt[2^{n-n}]{p+q\sqrt{-1}}=\sqrt[2^0]{p+q\sqrt{-1}}=\sqrt[1]{p+q\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}$$

kommen; folglich ist auch

$$\sqrt[2^n]{-1}=p+q\sqrt{-1}, \text{ und daher}$$

$$\sqrt[2m]{-A}=\alpha\sqrt[2^n]{-1}=\alpha(p+q\sqrt{-1})=\alpha p+\alpha q\sqrt{-1},$$

oder wenn $\alpha p = P$ und $\alpha q = Q$ gesetzt wird,

$$\sqrt[2m]{-A}=P+Q\sqrt{-1}.$$

Zusatz.

Es läßt sich demnach auch jede imaginäre Größe von der Form $\alpha+\beta\sqrt[2m]{-1}$ auf die Form $a+b\sqrt{-1}$ zurückführen.

§. 227.

Von den Gleichungen, die nur aus zwei Theilen bestehen.

Jede Gleichung, worin die unbekannte Größe nur in einer einzigen Potenz erscheint, die mit den bekannten Größen wie immer verbunden sein mag, läßt sich auf die Form $Px^m = Q$, oder $x^m = \frac{Q}{P}$ bringen. Z. B. $mx^3 - a = nx^3 - b$, gibt $mx^3 - nx^3 = a - b$, oder $(m-n)x^3 = a - b$, also $x^3 = \frac{a-b}{m-n}$. Hier ist $P = m - n$ und $Q = a - b$.

Gleichungen dieser Art nennt man zweitheilige, oder zweigliedrige (équations à deux termes), oder reine höhere Gleichungen.

Eine reine höhere Gleichung, welche schon auf die Form $x^m = \frac{Q}{P}$ gebracht ist, wird aufgelöst, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung die m^{te} Wurzel auszieht; es ist nämlich $x=\sqrt[m]{\frac{Q}{P}}=\sqrt[m]{q}$, wenn wir der Kürze wegen $\frac{Q}{P} = q$ setzen.

Ist m eine gerade Zahl, z. B. $m = 2n$, so ist $x = \pm \sqrt[2n]{q}$, und wenn in diesem Falle q negativ ist, so sind die Werthe für x imaginär.

Ist aber m ungerade, z. B. $m = 2n - 1$, so wird nur ein Zeichen vor das Wurzelzeichen gesetzt, und zwar + oder —, je nachdem q positiv oder negativ ist.

Zusatz.

Setzt man $q = a^m$, so wird $x = \sqrt[m]{a^m} = a$, oder $x - a = 0$ und $x^m - a^m = 0$. Nun ist

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2 x^{m-3} + a^3 x^{m-4} + \ldots$$
$$\ldots + a^{m-3} x^2 + a^{m-2} x + a^{m-1}),$$

wovon man sich leicht durch wirkliche Multiplikation überzeugen kann, welches Produkt $= 0$ wird, wenn man $x - a = 0$, d. i. $x = a$ setzt, oder auch wenn man

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \ldots + a^{m-3} x^2 + a^{m-2} x + a^{m-1} = 0$$

setzt. Könnte man nun einen solchen Werth auffinden, der, in dieser letzten Gleichung substituirt, das Polynom $= 0$ macht, so müßte derselbe Werth auch der gegebenen Gleichung $x^m = a^m$ genugthun. Das Aufsuchen dieses Werthes überschreitet die Gränzen, die diesem Buche vorgeschrieben sind, sobald $m > 4$ ist. Wir beschränken daher unsere Untersuchung auf die Fälle, wenn $m = 2$, $= 3$, oder $= 4$ ist.

α) Für $m = 2$ wird $x^m - a^m = x^2 - a^2 = 0$, also

$$x = \pm \sqrt{a^2} = \pm a.$$

β) Für $m = 3$ wird $x^m - a^m = x^3 - a^3 = 0$, also $x^3 = a^3$ und $x = a$. Nun ist aber

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2,$$

welcher Quotient $= 0$ gesetzt werden kann, wodurch man

$$x^2 + ax = -a^2$$

erhält, woraus, nach §. 220,

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{-3a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$$

erhalten wird. — Die zweitheilige kubische Gleichung $x^3 = a^3$ hat demnach folgende drei Wurzeln:

1) $x = a$,

2) $x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{-3})$,

3) $x = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{-3})$.

Obgleich die beiden letzten Wurzeln imaginär sind, so leisten sie dennoch der Gleichung Genüge, wovon sich der Anfänger überzeugen wird, wenn er jene Wurzeln wirklich zur dritten Potenz erhebt.

γ Es sei $m = 4$, so hat man $x^4 - a^4 = 0$, oder auch $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0$, also $x^2 - a^2 = 0$ und $x^2 + a^2 = 0$. Aus der ersten Gleichung folgt $x^2 = a^2$, also $x = \pm a$, und aus der zweiten $x^2 = -a^2$, also $x = \pm a\sqrt{-1}$. Die biquadratische Gleichung $x^4 = a^4$ hat demnach folgende vier Wurzeln; 1) $x = +a$, 2) $x = -a$, 3) $x = +a\sqrt{-1}$, 4) $x = -a\sqrt{-1}$.

Die reellen Wurzeln einer höhern Gleichung kann man arithmetische Bestimmungen nennen, weil sie durch eine arithmetische Operation, nämlich durch Wurzelausziehen gefunden werden; die imaginären Wurzeln aber kann man algebraische Bestimmungen nennen, weil sie nur durch den algebraischen Calcül entstehen.

§. 228.

Von den Gleichungen, welche sich wie quadratische behandeln lassen.

Gleichungen von der Form $x^{2n} + px^n + q = 0$, in welchem also der Exponent von x im ersten Gliede das Doppelte des Exponenten von x im zweiten Gliede ist, können als quadratische Gleichungen behandelt werden. Denn man setze nur $x_n = y$, also $x^{2n} = (x^n)^2 = y^2$, so ist durch Substitution $y^2 + py + q = 0$, woraus, nach §. 220,

$$y = x^n = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

gefunden wird, also

$$x = \sqrt[n]{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} \text{ (§. 227), d. i.}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} \text{ oder}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}.$$

Sollte man z. B. die Zahl 48 in zwei solche Faktoren zerlegen, daß die Summe ihrer Quadrate = 100, sei, so ist, wenn der eine Faktor $= x$, also der andere $= \frac{48}{x}$ gesetzt wird, der Aufgabe gemäß

$$x^2 + \left(\frac{48}{x}\right)^2 = 100, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2304}{x^2} = 100, \text{ d. i.}$$

$$x^4 + 2304 = 100x^2 \text{ und}$$

$$x^4 - 100x^2 = -2304,$$

$$50^2 = +2500,$$

$$(x^2)^2 - 100x^2 + 50^2 = 196,$$

$$(x^2 - 50)^2 = 196,$$

$$x^2 = 50 \pm \sqrt{196} = 50 \pm 14,$$

$$x = \pm\sqrt{50 \pm 14}.$$

Wir erhalten demnach folgende vier Werthe für x,

1) $x = +\sqrt{50 + 14} = \sqrt{64} = 8;$

2) $x = +\sqrt{50 - 14} = \sqrt{36} = 6:$

3) $x = -\sqrt{50 + 14} = -\sqrt{64} = -8;$

4) $x = -\sqrt{50 - 14} = -\sqrt{36} = -6;$

Man zerlege die Zahl 72 in zwei Faktoren, so daß die Differenz ihrer Würfel = 217 werde.

Zur Uebung.

Wie löst man die Gleichung $\sqrt{12 + x} - \sqrt[4]{12 + x} = 2$?

§. 229.

Von den Gränzen der Wurzeln bei quadratischen Gleichungen.

Aus dem bisher Gesagten leuchtet ein, daß jede geordnete quadratische Gleichung sich mit Rücksicht auf die Zeichen unter einer der folgenden vier Formeln darstellen lasse.

I. $x^2 - Px + Q = 0,$

II. $x^2 + Px + Q = 0,$

III. $x^2 - Px - Q = 0,$

IV. $x^2 + Px - Q = 0.$

Fall I. Wenn nämlich beide Wurzeln positiv sind.

Da $x^2 - Px + Q = 0$, oder $x^2 = Px - Q$, so ist $x^2 < Px$, also auch $x < P$. Ferner folgt aus der aufgestellten Gleichung $x^2 + Q = Px$, also $Px > Q$ und $x > \frac{Q}{P}$. Demnach liegen die beiden Wurzeln zwischen P und $\frac{Q}{P}$.

Fall II. Wenn beide Wurzeln negativ sind.

Die Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ geht für $x = -z$ oder $-x = z$ über in

$$z^2 - Pz + Q = 0,$$

in welcher Gleichung nun beide Wurzeln positiv sind und zwischen den Grenzen $\frac{Q}{P}$ und P liegen; es ist nämlich $z > \frac{Q}{P}$ und $z < P$, mithin ist

$$x < -\frac{Q}{P} \text{ und } x > -P.$$

Fall III. Wenn die Wurzeln verschiedene Zeichen haben, und die positive Wurzel numerisch betrachtet größer ist als die negative.

$x^2 - Px = x(x - P) = Q$, mithin muß
$x^2 > Px$ oder $x > P$ sein, also auch
$x(x - P) > P(x - P)$, d. i. $Q > P(x - P)$, folglich
$x < \left(P + \frac{Q}{P}\right)$.

Die positive Wurzel liegt demnach zwischen den Grenzen P und $\left(P + \frac{Q}{P}\right)$.

Um nun die Grenzen der negativen Wurzel zu finden, setzen wir in der Gleichung III. $x = -\alpha$, so wird $\alpha^2 + P\alpha - Q = 0$, oder $\alpha^2 + P\alpha = Q$, und dann ist nach Nr. II.

$$\alpha > 0 \text{ und } \alpha < \frac{Q}{P}.$$

Fall IV. Wenn die negative Wurzel die größere ist.

Aus der Gleichung IV. folgt:

$$x^2 + Px = x(x + P) = Q,$$

mithin ist für jeden positiven Werth von x offenbar $x^2 < Q$ oder $x < \sqrt{Q}$ und auch $Px < Q$ oder $x < \frac{Q}{P}$; endlich muß $x > 0$ sein; daher liegt die positive Wurzel zwischen den Grenzen 0 und $\frac{Q}{P}$ oder 0 und $\sqrt{Q}$.

Um die Grenzen der negativen Wurzel zu finden, setze man wieder $x = -\alpha$; so wird $\alpha^2 - P\alpha = Q$, mithin liegt α zwischen P und $\left(P + \frac{Q}{P}\right)$ nach Nr. III., folglich ist $-\alpha$ oder $x < -P$ und $x > -\left(P + \frac{Q}{P}\right)$.

Die vorstehenden Grundsätze möge der fleißige Anfänger auf die folgenden vier Gleichungen anwenden:

$$1)\ x^2 - 6x + 7 = 0,$$
$$2)\ x^2 + 4x + 1 = 0,$$
$$3)\ x^2 - 2x - 2 = 0,$$
$$4)\ x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Uebrigens werden wir in der Folge bei der Theorie der höhern Gleichungen bestimmtere und allgemeinere Normen für die Aufsuchung der Grenzen der Wurzeln einer Gleichung kennen lernen.

Diese Bemerkungen sind dann vorzüglich vortheilhaft, wenn die Wurzeln der Gleichung irrational sind, und also näherungsweise bestimmt werden müssen.

§. 230.

Bestimmung der Wurzeln quadratischer Gleichungen durch Näherung (Approximation).

Wenn eine Gleichung keine rationale Wurzel hat, so muß man sich damit begnügen, die Werthe von x näherungsweise zu bestimmen, wozu man verschiedene Methoden ausfindig gemacht hat, von welchen wir einige anführen wollen.

A. Hat man nach §. 229 die Grenzen der Wurzeln bestimmt, so suche man eine solche Reihe von Zahlen, daß jede folgende durch die unmittelbar vorhergehende dividirt, den Werth der Wurzel um so genauer bestimmt, je weiter die Reihe fortgesetzt wird. Es sei z. B. eine solche Reihe durch folgende Zahlen dargestellt:

$$a, b, c, d, \ldots l, m, n \ldots$$

Es wird für sich einleuchten, daß die ersten Quotienten

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c}, \ldots.$$

von dem wahren Werthe der Wurzel ziemlich abweichen. Man setze z. B.:

$$x = \frac{m}{l} \text{ und}$$

$$x = \frac{n}{m}, \text{ so wird durch Multiplikation}$$

$$x^2 = \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{l}.$$

Substituirt man nun diese Werthe in einer gegebenen Gleichung, z. B. in $x^2 - 3x = 7$, so zeigt sich eine Regel, nach welcher die folgenden Zahlen der obigen Reihe aus den vorhergehenden, nach Willkür angenommenen, bestimmt werden können.

Man setze in unserem bestimmten Falle $x^2 = \frac{n}{l}$ und $x = \frac{m}{l}$, so geht die gegebene Gleichung über in

$$\frac{n}{l} - \frac{3m}{l} = 7, \text{ also}$$

$$n - 3m = 7l,$$

$$n = 3m + 7l,$$

d. i. die folgenden Glieder der Reihe a, b, c, d, ... werden erhalten, wenn man zum Dreifachen der nächst vorhergehenden Zahl das Siebenfache der vorletzten Zahl addirt. Nehmen wir nun die Zahlen 0, 1, 3 als die ersten Glieder jener Reihe an, so finden wir folgende Zahlenreihe:

0, 1, 3, 16, 69, 319, 1440, 6553, 29739, 135088, ...

also die Näherungswerthe von x:

$$\tfrac{3}{1}, \tfrac{16}{3}, \tfrac{69}{16}, \tfrac{319}{69}, \tfrac{1440}{319}, \tfrac{6553}{1440}, \tfrac{29739}{6553}, \tfrac{135088}{29730}, \ldots$$

Man setze nun z. B. $x = \frac{6553}{1440} = 4{\cdot}55069 \ldots$, so ist

$$x^2 = \quad 20{\cdot}70878,$$

$$-3x = -13{\cdot}65208, \text{ also}$$

$$x^2 - 3x = +\ 7{\cdot}05670,$$

woraus man sieht, daß das Resultat um 0·0567 zu groß sei, und daß man demnach x etwas zu groß genommen habe. Löst man die Gleichung nach §. 220, so findet man $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$, und demnach für den positiven Werth

$$x = \frac{3 + \sqrt{37}}{2} = \frac{3 + 6{\cdot}0827625\ldots}{2} = \frac{9{\cdot}0827625\ldots}{2} = 4{\cdot}54138\ldots$$

Man versuche nun $\frac{135088}{29739}$ statt x zu setzen.

Wie weit die Genauigkeit bei dieser Untersuchung zu treiben sei. muß aus der Natur der Aufgabe beurtheilt werden.

§. 231.

B. Weiß man, daß die irrationale Wurzel einer quadratischen Gleichung zwischen r und r + 1, d. i. zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Zahlen liege, oder weiß man, daß $x > r$ und $x < r + 1$ sei, so setze man $x = r + y$, wo $y < 1$, d. i. wo y irgend einen echten Bruch bezeichnet, also

$$x^2 = (r + y)^2 = r^2 + 2ry + y^2,$$

und weil y^2 gegen $r^2 + 2ry$ sehr klein ist, so kann man näherungsweise $x^2 = r^2 + 2ry$ setzen, also $y = \frac{x^2 - r^2}{2r}$.

Hat man z. B. die Gleichung $x^2 = m$, so ist $x = \sqrt{m}$, und wenn $\sqrt{m} > r$ und $< r + 1$, also $\sqrt{m} = r + y$; so ist $y = \frac{m - r^2}{2r}$ und $x = r + y = r + \frac{m - r^2}{2r} = \frac{r^2 + m}{2r}$, wie wir schon §. 143, 5 gesehen haben. Hat man aber die Gleichung $x^2 = mx + n$, so folgt $x = m + \frac{n}{x}$, und wenn man statt x den schon gefundenen Werth im zweiten Gliede substituirt:

$$x = m + \cfrac{n}{m + \cfrac{n}{x}}.$$

Setzt man diese Substitution weiter fort, so wird x durch einen unendlichen Kettenbruch ausgedrückt:

$$x = m + \cfrac{n}{m + \cfrac{n}{m + \cfrac{n}{m + \ldots}}}$$

Da aber gewöhnlich $n > 1$, so läßt sich davon kein bequemer Gebrauch machen.

Aus der Gleichung $x^2 = mx + n$ folgt auch

$$x = \sqrt{n + mx} = \sqrt{n + m\sqrt{n + m\sqrt{n + m\sqrt{n + \ldots}}}}$$

und daher

$$x = m + \cfrac{n}{m + \cfrac{n}{m + \cfrac{n}{m + \ldots}}} = \sqrt{n + m\sqrt{n + m\sqrt{n + m\sqrt{n + \ldots}}}}$$

Wie läßt sich dieser Radikal-Ausdruck transformiren, wenn m oder n eine Quadratzahl ist?

Zusatz 1.

Der numerische Werth eines jeden periodischen Kettenbruches läßt sich auf die Form $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ bringen.

Denn es sei z. B.

$$x = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\ldots+\frac{1}{k+\frac{1}{l+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\ldots}}}}}}}$$

Da nun diese Kette ohne Ende fortgeht, so können wir auch setzen:

$$x = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\ldots+\frac{1}{k+\frac{1}{l+x}}}}}$$

Denken wir uns die Periode nur einmal geschrieben und bezeichnen die drei letzten reducirten Werthe des endlichen Bruches

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\ldots+\frac{1}{l}}}}$$

durch $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$ und $\frac{P}{P'}$, so ist

offenbar

$$\frac{P}{P^1} = \frac{l.N+M}{l.N^1+M^1}$$

mithin, wenn $l+x$ statt l genommen wird, der wahre Bruch

$$x = \frac{(l+x)\,N+M}{(l+x)\,N^1+M^1} = \frac{x.N+(lN+M)}{x.N^1+(lN^1+M^1)} = \frac{x.N+P}{x.N^1+P^1}$$

und hieraus folgt

$$N^1x^2 + (P^1-N)\,x = P,$$

sonach

$$x = \frac{N-P^1 \pm \sqrt{4N^1P+(P^1-N)^2}}{2N^1} = \frac{N-P^1 \pm \sqrt{4N^1P+(N-P^1)^2}}{2N^1},$$

oder wenn Kürze halber $N-P^1=A$, $4N^1P+(N-P^1)^2=B$ und $2N^1=C$ gesetzt wird, $x=\frac{A\pm\sqrt{B}}{C}$, also $x_1=\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ und $x_2=\frac{A-\sqrt{B}}{C}$, welche zwei Werthe reell sind, und von welchen der positive Werth $x_1=\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ der obigen Behauptung entspricht. — Hätte der vorgelegte Kettenbruch die Form

$$z = \alpha + \frac{1}{\beta +} \frac{1}{\gamma +} \frac{1}{\delta + . +} \frac{1}{\varkappa +} \frac{1}{a +} \frac{1}{b + \ldots +} \frac{1}{k +} \frac{1}{l. +} \frac{1}{a +} \frac{1}{b + .}$$

so setzen wir den einfachen periodischen Bruch

$$\frac{1}{a +} \frac{1}{b +} \frac{1}{c + \ldots +} \frac{1}{k +} \frac{1}{l +} \frac{1}{a +} \frac{1}{b + \ldots} = x, \text{ mithin}$$

$$z = \alpha + \frac{1}{\beta +} \frac{1}{\gamma +} \frac{1}{\delta + \ldots +} \frac{1}{\varkappa + x}$$

und bezeichnen die drei letzten reducirten Werthe des der Periode vorausgehenden Kettenbruches $\alpha + \frac{1}{\beta +} \frac{1}{\gamma + \ldots +} \frac{1}{\varkappa}$ durch $\frac{I}{I^1}$, $\frac{K}{K^1}$ und $\frac{L}{L^1}$; so erhalten wir mit Rücksicht auf den oben betrachteten erstern Fall offenbar $\frac{L}{L^1} = \frac{\varkappa K + I}{\varkappa K^1 + I^1}$ und wenn wir hier $\varkappa$ in $\varkappa + x$ übergehen lassen, den gesuchten Bruch

$$z = \frac{(\varkappa + x)\, K + I}{(\varkappa + x)\, K^1 + I^1} = \frac{xK + (\varkappa K + I)}{xK^1 + (\varkappa K^1 + I^1)} = \frac{xK + L}{xK^1 + L^1},$$

oder statt x den obigen Werth, nämlich

$$x = \frac{N - P^1 + \sqrt{4N^1P + (N - P^1)^2}}{2N^1} \text{ gesetzt;}$$

$$z = \frac{[K\,(N - P^1) + 2L\,N^1] + \sqrt{K^2\,[4N^1P + (N - P^1)^2]}}{[K^1\,(N - P^1) + 2L^1N^1] + \sqrt{K'^2\,[4N^1P + (N - P^1)^2]}}$$

oder wenn Kürze halber die in den eckigen Klammern befindlichen Theile beziehungsweise durch Q, R, Q′ und R′ bezeichnet werden:

$$z = \frac{Q + \sqrt{R}}{Q^1 + \sqrt{R^1}} = \frac{(Q + \sqrt{R})\,(Q^1 - \sqrt{R^1})}{Q'^2 - R'}$$

$$= \frac{QQ' - \sqrt{RR'} + Q'\sqrt{R} - Q\sqrt{R'}}{Q'^2 - R'} = \frac{A' + \sqrt{B'}}{C'}$$

der Form nach, wodurch also die obige Behauptung vollständig gerechtfertigt erscheint.

Zusatz 2.

Hätte unser periodischer Bruch die Form

$$u = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots + \frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots$$

so dürfen wir nur $u = \frac{1}{x}$ setzen, mithin

$$x = \frac{1}{u} = \frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots + \frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\cdots$$

und wir finden dann

$$u = \frac{2N'}{N - P' + \sqrt{4N'P + (N - P')^2}} = \frac{P' - N + \sqrt{4N'P + (P' - N)^2}}{2P}.$$

Zusatz 3.

Die Gleichung $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+}\cdots + \cfrac{1}{l + x}}$,

aus welcher wir oben x abgeleitet haben, besitzt auch die negative Wurzel $x_2 = \frac{A - \sqrt{B}}{C}$, welche sich ebenfalls durch einen periodischen Kettenbruch darstellen läßt; denn setzen wir $x_2 = -y$; so finden wir aus der Gleichung $-y = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+}\cdots + \cfrac{1}{l-y}}$ und hieraus folgt

$$-\frac{1}{y} = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots + \frac{1}{l-y} \quad \text{oder}$$

$$-\left(a + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots + \frac{1}{l-y}.$$

Eben so findet man hieraus wieder

$$-\frac{1}{a + \frac{1}{y}} = b + \frac{1}{c+}\cdots + \frac{1}{l-y}, \text{ sonach}$$

$$-\left(b + \frac{1}{a + \frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{c+}\cdots + \frac{1}{l-y}, \text{ ferner}$$

$$-\left(c+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+\frac{1}{y}}\right)=\frac{1}{d+}\ldots+\frac{1}{l-y}$$

. . . . und allgemein

$$-\left(l+\frac{1}{k+}\frac{1}{i+}\ldots+\frac{1}{a+\frac{1}{y}}\right)=-y,$$

folglich

$$y=l+\frac{1}{k+}\frac{1}{i+}\ldots+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{y}.$$

Die negative Wurzel der obigen Gleichung führt sonach, wenn sie positiv genommen wird, auf den periodischen Kettenbruch

$$-x_2=y=l+\frac{1}{k+}\ldots+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\ldots$$

welche Relation höchst merkwürdig ist.

So z. B. führt die Relation $x=\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\ldots$ auf die Gleichung $9x^2+43x=21$, deren algebraische Auflösung $x=\frac{-43\pm\sqrt{2605}}{18}$ gibt, und es stellt der gegebene Kettenbruch die positive Wurzel $x_1=\frac{\sqrt{2605}-43}{18}=0{\cdot}44662\ldots$ dar, die negative Wurzel x_2 negativ genommen, wird dann sein

$$-x_2=y=5+\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\ldots$$

$$=\frac{\sqrt{2605}+43}{18}=5{\cdot}2244\ldots,\text{ also } x_2=-5{\cdot}2244\ldots$$

Die beiden periodischen Kettenbrüche

$$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\ldots+\frac{1}{k+}\frac{1}{l} \quad \text{und} \quad l+\frac{1}{k+}\frac{1}{i+}\ldots+\frac{1}{c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a}$$

führen demnach auf zwei quadratische Gleichungen, in welchen bloß die Koefficienten der Unbekannten in der ersten Potenz entgegengesetzte Zeichen haben.

§. 232.

C. Es wird nicht am unrechten Orte sein, wenn hier etwas über die sogenannte Regula falsi gesagt wird.

Die Regula falsi lehrt, mittelst beliebig angenommener Zahlen das wahre Resultat einer Aufgabe finden. Man macht eine Regula falsi, wenn man ohne Rücksicht auf irgend eine Bedingung der Aufgabe statt x die erste beste Zahl annimmt, und untersucht, was entsteht, wenn man an ihr die Bedingungen der Aufgabe vollzieht. Das so gefundene Resultat wird selten mit dem wahren übereinstimmen, aber man sieht doch, um wie viel gefehlt worden sei, welchen Fehler man sich bemerkt, so wie die Zahl, durch welche das falsche Resultat erzeugt worden ist.

Man pflegt die Regula falsi in die einfache und doppelte einzutheilen. Einfach heißt sie, wenn man mit einer einzigen willkürlich angenommenen Zahl die wahre findet. Z. B. Man sucht eine Zahl, deren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ Theil zusammen 456 ist. Man setze, diese Zahl sei $= 20$, so ist

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \cdot 20 &= 10, \\ \tfrac{1}{4} \cdot 20 &= 5, \\ \tfrac{1}{5} \cdot 20 &= 4, \text{ also} \\ \hline \tfrac{20}{2} + \tfrac{20}{4} + \tfrac{20}{5} &= 19. \end{aligned}$$

Nun ist wohl für sich klar, daß die ähnlichen aliquoten Theile zweier Zahlen dasselbe Verhältniß zu einander haben müssen, in welchem eben diese zwei Zahlen stehen; und man kann demnach sagen: das falsche Resultat verhält sich zu dem wahren, wie die angenommene Zahl zu der gesuchten, oder man kann für unseren bestimmten Fall setzen:

$$\begin{aligned} 19 : 456 &= 20 : x, \text{ oder} \\ 1 : 24 &= 20 : x, \text{ also} \\ x = 24 \cdot 20 &= 480, \end{aligned}$$

welche Zahl der Aufgabe in der That Genüge leistet; denn es ist

$$\tfrac{480}{2} + \tfrac{480}{4} + \tfrac{480}{5} = 240 + 120 + 96 = 456.$$

Man nimmt gewöhnlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner als Probezahl an.

Eine doppelte Regula falsi macht man dann, wenn man die einfache zweimal anwendet, und man also zwei Voraussetzungen (Positionen) macht. Will man die Regula falsi zur Auflösung von Problemen, welche den ersten Grad übersteigen, anwenden, so muß man sich auf irgend eine Art (§. 229) zuvor eine Zahl verschaffen, welche von der wahren Zahl nicht zu weit entfernt ist; dann aber leistet sie auch die vortrefflichsten Dienste.

Der Nutzen der Regula falsi zeigt sich vorzüglich bei ihrer Anwendung auf die Auflösung der Gleichungen von einem höhern Grade, wobei man auf folgende Art verfährt. Man nehme a als eine Positionszahl, d. i. als den Werth für x an, und vollziehe an ihr die Bedingungen der Aufgabe; das gefundene Resultat sei $= R'$. Dann nehme man eine zweite Positionszahl b an, und erfülle an ihr die Bedingungen der Aufgabe, wodurch das Resultat R'' erhalten werden soll. Bezeichnet man nun die gesuchte Zahl mit x, und das wahre Resultat mit R, so ist, wie aus dem bereits Gesagten von selbst erhellt:

1) $R' : R = a : x$ oder $(R' - R) : R = (a - x) : x$,

2) $R'' : R = b : x$ „ $(R'' - R) : R = (b - x) : x$,

aus welchen Proportionen folgt:

$$(R' - R) : (R'' - R) = (a - x) : (b - x),$$

oder das erste Verhältniß mit -1 multiplicirt,

$$(R - R') : (R - R'') = (a - x) : (b - x)$$ und

$R - R' = d$, $R - R'' = \delta$ gesetzt, ist

$$d : \delta = (a - x) : (b - x),$$

woraus $x = \dfrac{a\delta - bd}{\delta - d}$ folgt.

Wir haben hier d und δ positiv angenommen; sind aber beide negativ, so wird

$$x = \frac{a \times -\delta - b \times -d}{-\delta - (-d)} = \frac{-a\delta + bd}{-\delta + d} = \frac{a\delta - bd}{\delta - d},$$

also dieselbe Formel. Ist endlich der eine Fehler positiv, der andere aber negativ, so erhält man $x = \dfrac{a\delta + bd}{\delta + d}$, es mag δ oder d negativ sein. — Sind demnach beide Fehler gleichartig, so ist $x = \dfrac{a\delta - bd}{\delta - d}$; sind sie aber ungleichartig, so ist $x = \dfrac{a\delta + bd}{\delta + d}$. — Diese beiden Formeln enthalten demnach folgende Regel: M a n m u l t i p l i c i r e

die erste angenommene Zahl mit dem zweiten Fehler, die zweite angenommene Zahl mit dem ersten Fehler, und dividire die Differenz oder die Summe dieser Produkte durch die Differenz oder die Summe der beiden Fehler, je nachdem diese gleichartig oder ungleichartig sind; so bezeichnet der Quotient die gesuchte Zahl näherungsweise.

Setzt man in diesen Formeln $a = 0$, so wird im ersten Falle $x = \frac{-bd}{\delta - d} = \frac{bd}{d - \delta}$, im andern Falle aber $x = \frac{bd}{d + \delta}$ und in diesen Ausdrücken $b = 1$ gesetzt, erhält man $x = \frac{d}{d - \delta}$ und $x = \frac{d}{\delta + d}$. Findet man aber z. B. $d = 0$, so wird $x = a$, wie es sein muß, und für $\delta = 0$ wird $x = b$.

Nimmt man b um 1 größer als a, also $b = a + 1$, so wird für gleichartige Fehler

$$x = \frac{a\delta - (a + 1)d}{\delta \quad d} = \frac{a\delta - ad - d}{\delta - d} = \frac{a(\delta - d) - d}{\delta - d} = a - \frac{d}{\delta - d};$$

für ungleichartige Fehler aber

$$x = \frac{a\delta + (a + 1)d}{\delta + d} = \frac{a\delta + ad + d}{\delta + d} = a + \frac{d}{\delta - d},$$

und wenn man beide Formeln in eine zusammenzieht:

$$x = a \mp \frac{d}{\delta \mp d}.$$

Ist man mit der Genauigkeit des für x gefundenen Werthes nicht zufrieden, so wendet man die Regula falsi von Neuem an, indem man jenen Werth als erste Positionszahl annimmt, als die zweite aber eine etwas größere oder kleinere Zahl, welches in bestimmten Fällen die Urtheilskraft entscheiden muß.

Beispiele.

I. Man löse die Gleichung $x^2 + \frac{7}{15}x = 2$ auf. Aus der Gleichung folgt $x^2 < 2$ und $x < \sqrt{2}$, oder $x < 1{\cdot}4\ldots$; man setze also z. B. $a = 1$, so ist durch Substitution $1 + \frac{7}{15} = \frac{22}{15} = R'$, also $d = 2 - \frac{22}{15} = \frac{8}{15}$. Man sieht hier, daß $a < x$; man setze demnach $b = 1{\cdot}1$, so erhält man durch Substitution

$$b^2 + \tfrac{7}{15}b = (1{\cdot}1)^2 + \tfrac{7}{15} . 1{\cdot}1 = 1{\cdot}21 + \frac{7{\cdot}7}{15} = \frac{25{\cdot}85}{15},$$

$$\text{also } \delta = 2 - \frac{25{\cdot}85}{15} = \frac{4{\cdot}15}{15}, \text{ und daher}$$

$$x = \frac{1 \cdot \frac{4 \cdot 15}{15} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{15}}{\frac{4 \cdot 15}{15} - \frac{8}{15}} = \frac{4 \cdot 15 - 8 \cdot 8}{4 \cdot 15 - 8} = \frac{-4 \cdot 65}{-3 \cdot 85} = \frac{0 \cdot 93}{0 \cdot 77} = \frac{93}{77},$$

$$= 1 \cdot 20 \ldots = 1 \cdot 2 \text{ näherungsweise.}$$

Durch Substitution zeigt sich's, daß genau $x = 1 \cdot 2$.

II. Man löse die Gleichung $x^3 - \frac{1}{4}x = 90$. Hier ist $x^3 > 90$, also $x > \sqrt[3]{90} > 4$. Setzt man $x = 5$, so ist durch Substitution

$$x^3 - \tfrac{1}{4}x = 125 - \tfrac{5}{4} = 123\tfrac{3}{4},$$

folglich ist 5 zu groß. Es liegt also x zwischen 4 und 5. Setzt man nun $a = 4 \cdot 2$, so ist

$$a^3 - \tfrac{1}{4}a = (4 \cdot 2)^3 - \tfrac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2 = 74 \cdot 088 - 1 \cdot 05 = 73 \cdot 038,$$

und daher

$$d = 90 - 73 \cdot 038 = 16 \cdot 962, \text{ also } a < x.$$

Setzt man also $b = 4 \cdot 3$, so ist

$$b^3 - \tfrac{1}{4}b = (4 \cdot 3)^3 - \frac{4 \cdot 3}{4} = 79 \cdot 507 - 1 \cdot 075 = 78 \cdot 432$$

und

$$\delta = 90 - 78 \cdot 432 = 11 \cdot 568;$$

also ist

$$x = \frac{4 \cdot 2 \times 11 \cdot 568 - 4 \cdot 3 \times 16 \cdot 962}{11 \cdot 568 - 16 \cdot 962} = \frac{-24 \cdot 351}{-5 \cdot 394} = 4 \cdot 51 \ldots$$

näherungsweise. Durch Substitution zeigt sich aber, daß $x < 4 \cdot 51$; setzt man deßhalb $a = 4 \cdot 51$ und $b = 4 \cdot 5$, so findet man genau $x = b = 4 \cdot 5$ zufällig. Hätte man bei dieser zweiten Operation $b = 4 \cdot 509$ gesetzt, so hätte man zwar nicht genau $x = 4 \cdot 5$ gefunden, aber doch einen Werth, der schon weit näher bei x gelegen wäre, als der erste $4 \cdot 51$.

§. 233.

Einige Aufgaben, deren Auflösung auf eine quadratische Gleichung führt.

Aufgabe 1.

Eine gegebene Zahl n in zwei solche Theile zu zerlegen, daß das Produkt derselben der gegebenen Zahl p gleich werde.

Auflösung.

Es sei der eine Theil x, so ist der andere n — x, und daher

$$x(n - x) = p, \text{ oder}$$

$$nx - x^2 = p \text{ und die Zeichen geändert,}$$

$$x^2 - nx = -p,$$

$$x^2 - nx + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2 - 4p}{4} \text{ und}$$

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4p}}{2}; \text{ also}$$

$$n - x = n - \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4p}}{2}, \text{ oder}$$

$$n - x = \frac{n \mp \sqrt{n^2 - 4p}}{2}.$$

Setzt man $x > n - x$, so ist

$$x - (n - x) = 2x - n = +\sqrt{n^2 - 4p} = m,$$

wenn man $n^2 - 4p = m^2$ der Kürze halber setzt. Es ist demnach der größere Theil $\frac{n}{2} + \frac{m}{2}$, und der kleinere $\frac{n}{2} - \frac{m}{2}$ (§. 211), und

$$\left(\frac{n}{2} + \frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right) = \frac{n^2}{4} - \frac{m^2}{4} = p,$$

also $\frac{n^2}{4} > p$ oder $\left(\frac{n}{2}\right)^2 > p$, so klein auch die Differenz m genommen werden mag. Setzt man nun $m = 0$, so wird $\frac{n^2}{4} = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = p$, d. i. das Produkt wird am größten, wenn man die gegebene Zahl halbirt, oder wenn man beide Theile einander gleich macht.

Aufgabe 2.

Ein Jugendfreund übergab einem Lehrer 200 fl. zur Vertheilung unter einige arme Schüler, welche sich bei der Prüfung am meisten ausgezeichnet hatten. Nun starben inzwischen zwei derselben, und einer machte sich der Belohnung unwürdig; dadurch wurde der Antheil eines jeden der übrigen um 15 fl. vermehrt. Wie viel Schüler waren Theilnehmer, und wie viel erhielt jeder?

Auflösung.

Man nehme an, es seien Anfangs x Schüler gewesen, so hätte jeder $\frac{200}{x}$ fl. bekommen. Nun aber wurde jene Summe nur unter

(x — 3) Schüler vertheilt, daher erhielt jeder $\frac{200}{x-3}$, und da jeder solche Theil um 15 größer sein soll, als der erste Theil, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{200}{x-3} - 15 = \frac{200}{x}.$$

Es ist also auch

$$200x - 15x^2 + 45x = 200x - 600; \text{ d. i.}$$
$$15x^2 - 45x = 600, \text{ oder}$$
$$x^2 - 3x = 40, \text{ und daher}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2}; \text{ d. i.}$$
$$x = \frac{3+13}{2} = 8 \text{ oder } x = \frac{3-13}{2} = -5.$$

Der Natur der Aufgabe gemäß kann hier nur der positive Werth 8 angenommen werden. — Jene Summe wurde demnach unter $8 - 3 = 5$ Schülern vertheilt, und jeder erhielt $\frac{200}{5} = 40$ fl.; nach der ersten Bedingung aber hätte jeder nur $\frac{200}{8} = 25$ fl., d. i. um 15 fl. weniger erhalten.

Aufgabe 3.

Ein Kaufmann, welcher für 1800 Ducaten mehrere Stücke Tuch eingekauft hat, stirbt plötzlich. Der Commissionär sendet den Erben 100 Stücke. Diese erinnern sich, daß der Verstorbene gesagt hatte: Hätte er den Handel einen Tag früher abgeschlossen, so würde er für dasselbe Geld 30 Stücke mehr bekommen haben, und jedes Stück wäre ihm um 3 Ducaten wohlfeiler gekommen. Wie viel Stücke Tuch hätten die Erben erhalten sollen?

Auflösung.

Die Anzahl der gekauften Stücke sei $= x$, so ist der Preis jedes einzelnen Stückes $\frac{1800}{x}$. Einen Tag früher hätte er $(x + 30)$ Stücke um 1800 Ducaten erhalten, folglich wäre ihm jedes Stück auf $\frac{1800}{x+30}$ Ducaten zu stehen gekommen, und da nun jedes Stück um 3 Ducaten wohlfeiler gewesen wäre, als ein Stück nach dem wirklichen Einkaufspreis, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1800}{x+30} + 3 = \frac{1800}{x}, \text{ oder}$$
$$1800x + 3x^2 + 90x = 1800x + 54000,$$
$$3x^2 + 90x = 54000,$$
$$x^2 + 30x = 18000,$$
$$15^2 = 225, \text{ also}$$
$$(x + 15)^2 = 18225,$$
$$x = -15 \pm \sqrt{18225},$$
$$x = -15 \pm 135,$$

und da hier nur der positive Werth in Anschlag gebracht werden kann, so ist

$$x = -15 + 135 = 120,$$

und daher wurden 20 Stück unterschlagen.

Aufgabe 4.

Eine gegebene Zahl a in zwei Theile zu theilen, so daß die Quadrate derselben in einem bestimmten Verhältnisse, z. B. n : m stehen.

Auflösung.

Ist x der eine Theil, so ist der andere a — x, und man hat

$$x^2 : (a - x)^2 = n : m, \text{ woraus folgt}$$
$$mx^2 = n\,(a - x)^2, \text{ oder}$$
$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{n}{m}; \text{ d. i.}$$
$$\frac{x}{a-x} = \pm\sqrt{\frac{n}{m}}, \text{ also}$$
$$x = \pm a\sqrt{\frac{n}{m}} \mp x\sqrt{\frac{n}{m}}, \text{ oder}$$
$$x\left(1 \pm \sqrt{\frac{n}{m}}\right) = \pm a\sqrt{\frac{n}{m}}, \text{ also}$$
$$x = \frac{\pm a\sqrt{\frac{n}{m}}}{1 \pm \sqrt{\frac{n}{m}}}, \text{ woraus}$$
$$x = \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-a\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$$

gefunden wird. Es ist demnach der andere Theil

$$a - x = a - \frac{\pm a\sqrt{n}}{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}} = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}},$$

nämlich es ist

$$a - x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} \text{ oder } a - x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}.$$

Setzt man hier $m = 1$, so wird

$$x = \frac{\pm a\sqrt{n}}{1 \pm \sqrt{n}} \text{ und } a - x = \frac{a}{1 \pm \sqrt{n}}.$$

Zur Uebung wollen wir die aufgestellte Gleichung auf die Form $x^2 + px + q = 0$ bringen, und dann auflösen. Aus der Gleichung

$m x^2 = n (a - x)^2$ folgt:

$(m - n) x^2 + 2 a n x = a^2 n$, oder

$$x^2 + \frac{2an}{m-n} . x = \frac{a^2 n}{m-n}$$

$$\left(\frac{an}{m-n}\right)^2 = \frac{a^2 n^2}{(m-n)^2}, \text{ also durch Addition}$$

$$x^2 + \frac{2an}{m-n} . x + \left(\frac{an}{m-n}\right)^2 = \frac{a^2 n^2}{(m-n)^2} + \frac{a^2 n}{m-n},$$

oder

$$\left(x + \frac{an}{m-n}\right)^2 = \frac{a^2 n^2 + a^2 n (m-n)}{(m-n)^2} = \frac{a^2 m n}{(m-n)^2}, \text{ also}$$

$$x + \frac{an}{m-n} = \pm \sqrt{\frac{a^2 m n}{(m-n)^2}} = \pm \frac{a}{m-n} \sqrt{mn} \text{ und}$$

$$x = \frac{-an \pm a\sqrt{mn}}{m-n} = \frac{a(-n \pm \sqrt{mn})}{m-n},$$

welcher Ausdruck mit dem obigen $x = \frac{\pm a\sqrt{n}}{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}}$ identisch wird, wenn man nach (§. 131) den Zähler rational macht.

Was wird aus den gefundenen Resultaten, wenn man $m = n = 1$ setzt?

Der fleißige Anfänger versuche noch folgende Aufgaben selbst zu lösen:

1) Die Bedingung aufzufinden, unter welcher das Verhältniß der beiden Wurzeln $x_1 : x_2$ der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ einem gegebenen Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ gleich werde.

2) Man soll untersuchen, unter welcher Bedingung die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Eigenschaft erhalten, daß ihre Differenz einer gegebenen Zahl gleich werde, nämlich $x_1 - x_2 = \delta$.

3) Sei $x + y = s$ gegeben; man soll für x und y jene Werthe bestimmen, für welche ihr Produkt $xy = m$ ein Maximum wird, d. h. den möglich größten Werth erhalte.

4) In der Gleichung $\frac{2x}{1+x^2} = m$ soll x so bestimmt werden, daß der numerische Werth m jenes Bruches ein Maximum werde.

§. 234.

b) Von den quadratischen Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Um die Probleme lösen zu können, welche auf Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten führen, muß man die aufgestellten Gleichungen, wie in den §§. 210 und 213 auf eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten zurückführen, wobei man natürlich zuvor auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten kommen wird. Bei diesen beiden Gleichungen müssen zwei Fälle in Erwägung gezogen werden, nämlich: 1) wenn die eine Gleichung rücksichtlich der zu eliminirenden Größe vom ersten Grade, und die andere vom zweiten Grade ist; 2) wenn beide Gleichungen vom zweiten Grade sind. Der erste Fall ist keiner Schwierigkeit unterworfen, denn man hat nur aus der ersten Gleichung den Werth der zu eliminirenden Größe zu suchen, und denselben in der andern Gleichung zu substituiren, um eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten zu erhalten. Hätte man z. B. die Aufgabe: Zwei Zahlen zu suchen, deren Differenz $= 1$, und deren Produkt $= 132$, so würde man folgende zwei Gleichungen erhalten:

$$\text{a)}\quad x - y = 1,$$
$$\text{b)}\quad xy = 132.$$

Aus a folgt $x = y + 1$, und dieser Werth in b substituirt, gibt

$$(y + 1)\, y = 132, \text{ oder}$$
$$y^2 + y = 132$$
$$(\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}, \text{ also durch Addition}$$
$$(y + \tfrac{1}{2})^2 = 132 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{529}{4} \text{ und}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-1 \pm 23}{2}, \text{ daher}$$

$$y = \frac{-1 + 23}{2} = 11 \text{ oder } y = \frac{-1 - 23}{2} = -12$$

und

$$x = y + 1 = \frac{-1 \pm 23}{2} + 1 = \frac{-1 \pm 23 + 2}{2} = \frac{1 \pm 23}{2},$$

d. i.

$$x = \frac{1 + 23}{2} = 12 \text{ oder } x = \frac{1 - 23}{2} = -11.$$

Im zweiten angeführten Falle suche man durch die Multiplikation mit schicklichen Faktoren, und durch gehörige Verbindung der dadurch erhaltenen Resultate den Theil, welcher das Quadrat der zu eliminirenden Größe enthält, wegzuschaffen, wodurch eine Gleichung erhalten wird, aus welcher der Werth für die zu eliminirende Unbekannte entwickelt, und in der einfachsten Bedingungsgleichung substituirt die verlangte Endgleichung gibt. Die verschiedenen Methoden, eine solche Endgleichung zu erhalten, wollen wir nun durchgehen.

§. 235.

Jede quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten kann durch die Formel

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dargestellt werden, weil keine andere Potenz der Unbekannten vorkommen kann. Man pflegt solche Gleichungen nach den Potenzen der einen Unbekannten, z. B. x zu ordnen, und bringt die vorige Gleichung auf folgende Form:

$$ax^2 + (by + d)\,x + (cy^2 + ey + f) = 0, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{by + d}{a}\,x + \frac{cy^2 + ey + f}{a} = 0, \text{ oder}$$

$x^2 + px + q = 0$, wenn man Kürze halber $\frac{by + d}{a} = p$ und $\frac{cy^2 + ey + f}{a} = q$ setzt, wobei demnach p und q blos von y abhängen. Diese letzte wollen wir bei den folgenden Untersuchungen beibehalten.

§. 236.

Aufgabe.

Man soll aus den beiden Gleichungen

$$\text{a)}\quad x^2 + px + q = 0,$$

$$\text{b)}\quad x^2 + p'x + q' = 0,$$

wo p, q, p′ und q′ Funktionen von y sein sollen, die Unbekannte x eliminiren.

Auflösung 1.

Aus a folgt (nach §. 220) $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$,

und aus b folgt $x = \frac{-p' \pm \sqrt{p'^2 - 4q'}}{2}$;

also ist, weil x in beiden Gleichungen nur dieselben Werthe haben kann,

$$\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p' \pm \sqrt{p'^2 - 4q'}}{2}, \text{ oder}$$

$$\pm \sqrt{p^2 - 4q} \mp \sqrt{p'^2 - 4q'} = p - p',$$

und durch Quadriren

$$p^2 - 4q + p'^2 - 4q' - 2\sqrt{(p^2 - 4q)(p'^2 - 4q')} = p^2 - 2pp' + p'^2$$

oder

$$-\sqrt{(p^2 - 4q)(p'^2 - 4q)} = 2(q + q') - pp';$$

und durch wiederholtes Quadriren

$$(p^2 - 4q)(p'^2 - 4q') = 4(q + q')^2 - 4pp'(q + q') + p^2p'^2$$

oder

$$p^2p'^2 - 4p^2q' - 4p'^2q + 16qq' =$$
$$= 4(q + q')^2 - 4pp'(q + q') + p^2p'^2,$$

d. i.

$$(q + q')^2 - pp'(q + q') + p^2q' + p'^2q - 4qq' =$$
$$= q^2 + 2qq' + q'^2 - pp'q - pp'q' + p^2q' + p'^2q - 4qq' = 0,$$

oder

$$(q - q')^2 + pq'(p - p') - p'q(p - p') =$$
$$= (q - q')^2 + (p - p')(pq' - p'q) = 0,$$

welche Gleichung kein x mehr enthält.

Auflösung 2.

Man subtrahire b von a, so erhält man

$$(p - p')x + (q - q') = 0, \text{ also } x = -\frac{q - q'}{p - p'}.$$

Substituirt man diesen Werth für x in a, so ist

$$\frac{(q - q')^2}{(p - p')^2} - p\left(\frac{q - q'}{p - p'}\right) + q = 0,$$

oder mit $(p - p')^2$ multiplicirt

$$(q - q')^2 - p(p - p')(q - q') + q(p - p')^2 = 0,$$

oder

$$(q - q')^2 - (p - p')[p(q - q') - q(p - p')] = 0,$$

oder

$$(q - q')^2 - (p - p')(pq - pq' - pq + p'q) = 0,$$ d. i.
$$(q - q')^2 - (p - p')(p'q - pq') = 0,$$ oder endlich auch
$$(q - q')^2 + (p - p')(pq' - p'q) = 0,$$
welche Gleichung nur noch die Unbekannte y enthält.

Auflösung 3.

Man subtrahire b von a, so erhält man, wie in Auflösung 2 gezeigt wurde, $x = -\frac{q - q'}{p - p'}$. Multiplicirt man nun a) durch q', und b) durch q, so erhält man

$$1) \quad q'x^2 + pq'x + qq' = 0,$$
$$2) \quad qx^2 + p'qx + qq' = 0,$$ und durch Subtraction
$$- \quad - \quad -$$

$$(q' - q)x^2 + (pq' - p'q)x = 0,$$ durch x dividirt
$$(q' - q)x + (pq' - p'q) = 0,$$
und nun den vorigen Werth für x substituirt
$$(q' - q)\frac{-(q - q')}{p - p'} + (pq' - p'q) = 0,$$ oder
$$(q - q')^2 + (p - p')(pq' - p'q) = 0,$$
welches die gesuchte Endgleichung ist.

Auflösung 4.

Wenn ein Problem zwei unbekannte Größen enthält, und die Bedingungen derselben führen auf zwei verschiedene Gleichungen, so ist wohl einleuchtend, daß eine und dieselbe Unbekannte in beiden Gleichungen nur dieselben Werthe haben könne. Gesetzt, es habe irgend eine Aufgabe auf folgende zwei Gleichungen geführt:

$$1) \quad x^2 + px + q = 0,$$
$$2) \quad x^2 + p'x + q' = 0,$$

wo p, q, p' und q' wieder Funktionen von y sein sollen, so nehme man an, es sei α ein Werth von x in der einen Gleichung, also auch in der andern. Hieraus geht nun hervor, daß $x - \alpha$ ein gemeinschaftlicher Divisor für beide Gleichungen ist (§. 223), und man kann demnach

$$\text{I.} \quad x^2 + px + q = (x - \alpha)(x + a)$$ und
$$\text{II.} \quad x^2 + p'x + q' = (x - \alpha)(x + a')$$

setzen, wo a und a' noch unbestimmte Größen sind.

Aus I. folgt $\frac{x^2+px+q}{x+a} = x - \alpha$,

Aus II. folgt $\frac{x^2+p'x+q'}{x+a'} = x - \alpha$, also ist auch

$$\frac{x^2+px+q}{x+a} = \frac{x^2+p'x+q'}{x+a'} \text{ und}$$

$$(x^2+px+q)(x+a') = (x^2+p'x+q')(x+a), \text{ oder}$$
$$(x^2+px+q)(x+a') - (x^2+p'x+q')(x+a) = 0$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$(p+a'-p'-a)x^2 + (q+a'p-q'-ap')x + (a'q-aq') = 0.$$

Da nun a und a' unbestimmte Größen sind, so nehme man an, sie seien von der Beschaffenheit, daß jeder Coefficient für sich $=0$ werde, so ist

$$p + a' - p' - a = 0, \text{ oder } a' - a = p' - p, \text{ A.}$$
$$q + a'p - q' - ap' = 0, \text{ oder } a'p - ap' = q' - q, \text{ B.}$$
$$\text{daher auch } a'q - aq' = 0, \text{ oder } a'q = aq' \text{ C.}$$

Multiplicirt man A. mit p, so erhält man

$$a'p - ap = p(p' - p), \text{ und hiervon B}$$
$$a'p - ap' = (q' - q) \text{ abgezogen, gibt}$$
$$- \quad + \quad -$$
$$a(p' - p) = p(p' - p) - (q' - q), \text{ also}$$

$$a = \frac{p(p'-p)-(q'-q)}{p'-p} = \frac{p(p-p')-(q-q')}{(p-p')},$$

und durch Substitution in $a' = a - (p - p')$ (aus A) erhält man

$$a' = \frac{p(p-p')-(q-q')}{p-p'} - (p-p'), \text{ oder}$$

$$a' = \frac{p(p-p')-(q-q')-(p-p')^2}{(p-p')}, \text{ d. i.}$$

$$a' = \frac{p'(p-p')-(q-q')}{(p-p')}.$$

Substituirt man diese für a und a' gefundenen Werthe in der Gleichung $a'q - aq' = 0$, oder $aq' - a'q = 0$, so ist

$$\frac{pq'(p-p')-q'(q-q')}{p-p'} - \frac{p'q(p-p')-q(q-q')}{p-p'} = 0,$$

oder

$$(p-p')(pq'-p'q) + (q-q')^2 = 0,$$

welches die gesuchte Endgleichung ist, wie oben.

Auflösung 5.

Bezeichnet man wieder einen Werth von x mit α, welcher beiden Gleichungen zugleich entsprechen muß, so muß $x - \alpha$ ein gemeinschaftlicher Faktor derselben sein. Man suche demnach zwischen den Polynomen der zwei Gleichungen das größte gemeinschaftliche Maß (§. 78), und setze, wenn man endlich auf einen Rest stößt, der kein x mehr enthält, diesen Rest $= 0$, so erhält man dadurch die verlangte Endgleichung.

Daß aber der genannte Rest wirklich $= 0$ sein müsse, davon überzeugt man sich auf folgende Art. Wenn $D : d = Q + \frac{R}{d}$, so ist $D = dQ + R$. Setzt man nun $D = 0$ und $d = 0$, so muß auch $R = 0$ werden. Ist also für unsern Fall

$$\frac{x^2 + px + q}{x^2 + p'x + q'} = Q + \frac{R}{x^2 + p'x + q'}, \text{ so ist}$$

$$x^2 + px + q = (x^2 + p'x + q')\,Q + R,$$

und da $x^2 + px + q = 0$ und $x^2 + p'x + q' = 0$, so ist auch $R = 0$. Da nun der letzte Divisor Dividend, und der jedesmalige Rest der neue Divisor wird, so gilt der oben angeführte Schluß für alle successiven Divisionen.

Anmerkung 1. Die Endgleichungen, welche durch diese Eliminationsmethoden erhalten werden, übersteigen in den meisten Fällen den zweiten Grad, und liegen demnach außer den Grenzen dieses Lehrbuches. Uebrigens leistet sehr oft die Regula falsi bei der Auflösung derselben dem Anfänger gute Dienste.

Anmerkung 2. Auf ähnliche Art verfährt man bei drei zusammengehörigen Gleichungen mit drei Unbekannten. — Uebrigens können wir diese Materie nicht ausführlicher behandeln, weil wir, wie schon erwähnt wurde, die Endgleichungen nach dem bisher Gelehrten nicht aufzulösen wissen. Dessenungeachtet gibt es viele Gleichungen eines höheren Grades, die sich durch verschiedene Kunstgriffe auf Gleichungen des ersten oder zweiten Grades, oder auf reine höhere Gleichungen reduciren lassen, wie wir an einigen Beispielen sehen werden.

§. 237.

Anwendung dieser Methoden auf die Auflösung einiger Aufgaben.

Aufgabe 1.

Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr fünffaches Produkt um 17 größer sei, als die Summe ihrer Quadrate; ihr dreifaches Produkt aber um 4 größer als der Unterschied zwischen dem doppelten Quadrate der zweiten Zahl und dem Quadrate der ersten.

Auflösung.

Den Bedingungen der Aufgabe gemäß erhält man folgende Gleichungen, wenn die erste Zahl mit x, und die zweite mit y bezeichnet wird:

$$1)\quad 5xy - 17 = x^2 + y^2,$$
$$2)\quad 3xy - 4 = 2y^2 - x^2.$$

Ordnet man diese Gleichungen nach x (§. 235), so erhält man

$$A)\quad x^2 - 5xy + (y^2 + 17) = 0,$$
$$B)\quad x^2 + 3xy - 2(y^2 + 2) = 0.$$

Zur Uebung wollen wir die Endgleichung nach den verschiedenen Methoden des vorigen Paragraphen suchen.

Erste Methode.

Nach §. 220 findet man aus A) $x = \frac{5y \pm \sqrt{21y^2 - 68}}{2}$, aus B) aber $x = \frac{-3y \pm \sqrt{17y^2 + 16}}{2}$, und diese beiden Werthe einander gleich gestellt, erhält man

$$5y \pm \sqrt{21y^2 - 68} = -3y \pm \sqrt{17y^2 + 16},$$

und hieraus folgt durch wiederholtes Quadriren

$$169y^4 + 676y^2 + 676 = 357y^4 - 820y^2 - 1088, \text{ d. i.}$$
$$188y^4 - 1496y^2 = 1764, \text{ oder}$$
$$47y^4 - 374y^2 = 441, \text{ oder}$$
$$y^4 - \tfrac{374}{47}y^2 = \tfrac{441}{47},$$

woraus, nach §. 220,

$$y^2 = \frac{187 \pm 236}{47} \text{ gefunden wird.}$$

Es ist also

$$y^2 = \frac{187 + 236}{47} = 9 \text{ oder } y^2 = \frac{187 - 236}{47} = -\tfrac{49}{47}.$$

Hieraus folgt

$$y = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \text{ oder } y = \pm\sqrt{-\tfrac{49}{47}}.$$

Setzt man nun in A) $y = +3$, und eben so in B) so ist

$$\text{a)}\quad x^2 - 15x + 26 = 0,$$
$$\text{b)}\quad x^2 + 9x - 22 = 0.$$

Aus a folgt $x = \frac{15 \pm 11}{2}$, und aus b folgt $x = \frac{-9 \pm 13}{2}$. Setzt man aber in den Gleichungen A) und B) $y = -3$, so ist

$$\text{a')}\quad x^2 + 15x + 26 = 0,$$
$$\text{b')}\quad x^2 - 9x - 22 = 0,$$

Aus a' folgt $x = \frac{-15 \pm 11}{2}$, und aus b' folgt $x = \frac{9 \pm 13}{2}$. Es ist daher für

$y = +3$, $x = +13$, oder $x = +2$ und $x = +2$, oder $x = -11$, und für

$y = -3$, $x = -2$, oder $x = -13$ und $x = +11$, oder $x = -2$.

Hieraus sieht man nun, daß $x = +2$ und $y = +3$ zwei zusammengehörige Werthe seien, weil sie beiden Gleichungen zugleich Genüge leisten, und aus demselben Grunde sind auch $x = -2$ und $y = -3$ zwei zusammengehörige Werthe.

Zweite Methode.

Man subtrahire A) von B), so findet man

$$8xy - 3y^2 - 21 = 0 \text{ und hieraus } x = \frac{3y^2 + 21}{8y}.$$

Dieser Werth, in A) gesetzt, gibt

$$\frac{(3y^2 + 21)^2}{64y^2} - 5y \cdot \frac{3y^2 + 21}{8y} + y^2 + 17 = 0,$$

und mit $64y^2$ multiplicirt, erhält man nach gehöriger Reduction

$$y^4 - \tfrac{374}{47}y^2 - \tfrac{441}{47} = 0,$$

welche Endgleichung dieselbe ist, wie oben.

Dritte Methode.

Durch Subtraktion der Gleichung A von B findet man

$$x = \frac{3y^2 + 21}{8y}.$$

Nun multiplicire man A mit $2y^2+4$, und B mit y^2+17, so wird

$$x^2(2y^2+4)-5y(2y^2+4)x+(y^2+17)(2y^2+4)=0$$

und

$$x^2(y^2+17)+3y(y^2+17)x-(y^2+17)(2y^2+4)=0$$

durch Addition und Division mit x erhält man

$$x(3y^2+21)-7y^3+31y=0,$$

und für x den vorigen Werth substituirt

$$\frac{3y^2+21}{8y}(3y^2+21)-7y^3+31y=0,$$

und hieraus folgt dann

$$y^4-\tfrac{374}{47}y^2-\tfrac{441}{47}=0, \text{ wie oben.}$$

Vierte Methode.

Man nehme an, es sei

$$x^2-5xy+y^2+17=(x+a)(x-\alpha) \text{ und}$$
$$x^2+3xy-2y^2-4=(x+a')(x-\alpha),$$

so folgt

$$(x^2-5xy+y^2+17)(x+a')=(x^2+3xy-2y^2-4)(x+a)$$

oder nach gehöriger Multiplikation und Reduktion

$$(a'-a-8y)x^2+(3y^2+21-5y.a'-3y.a)x$$
$$+[a(2y^2+4)+a'(y^2+17)]=0.$$

Nun setze man

1) $a'-a-8y=0$, oder $a'-a=8y$,
2) $3y^2+21-5y.a'-3y.a=0$, oder
$5y.a'+3y.a=3y^2+21$, also auch
3) $a(2y^2+4)+a'(y^2+17)=0$;

so findet man aus 1) und 2) nach §. 210

$$a=\frac{21-37y^2}{8y} \text{ und } a'=\frac{21+27y^2}{8y}.$$

Substituirt man diese Werthe in 3), so erhält man endlich

$$\frac{(21-37y^2)}{8y}(2y^2+4)+\frac{(21+27y^2)}{8y}(y^2+17)=0,$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$y^4-\tfrac{374}{47}y^2-\tfrac{441}{47}=0, \text{ wie oben.}$$

Fünfte Methode.

Man suche zwischen den Gleichungen A und B das größte gemeinschaftliche Maß nach der §. 78 gegebenen Vorschrift, so erhält man den von x unabhängigen Rest

$$-47y^4 + 374y^2 + 441.$$

Setzt man nun diesen Rest $= 0$, und ordnet die Gleichung gehörig, so findet man, wie oben, die Endgleichung

$$y^4 - \tfrac{374}{47}y^2 - \tfrac{441}{47} = 0.$$

Aufgabe 2.

Zwei Zahlen zu suchen, welche so beschaffen sind, daß ihr Produkt $= 80$, und ihre Summe $= 21$ sei.

Auflösung.

$$\text{a)}\ xy = 80, \quad \text{b)}\ x + y = 21.$$

Aus b) folgt $(x + y)^2 = 441$, oder

$$x^2 + 2xy + y^2 = 441,$$

aus a) folgt $4xy = 320$, und durch Subtrakt.

$$\begin{array}{rcl} - & & - \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 &=& 121, \text{ d. i.} \\ (x - y)^2 &=& 11^2, \text{ also} \\ x - y &=& \pm 11. \end{array}$$

Da nun $x + y = 21$ und $x - y = \pm 11$, so ist

$$x = \frac{21 \pm 11}{2} \text{ und } y = \frac{21 \mp 11}{2} \text{ (§. 211, Aufg. 1),}$$

daher $x = 16$; oder $= 5$, und $y = 5$, oder $y = 16$.

Es sind sonach 5 und 16 die beiden verlangten Zahlen, und da es gleichgültig ist, ob x die größere oder kleinere der beiden Zahlen bezeichnet, so genügt es bei derlei Aufgaben, der Quadratwurzel nur ein Zeichen vorzusetzen.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn statt der Summe die Differenz $x - y$ gegeben ist.

Aufgabe 3.

Zwei solche Zahlen zu finden, daß ihre Summe $= 12$ und die Summe ihrer Quadrate $= 74$ sei.

Auflösung.

a) $x + y = 12$, b) $x^2 + y^2 = 74$.

Erhebt man a aufs Quadrat, so erhält man

c) $x^2 + y^2 + 2xy = 144$,

und hiervon die Gleichung b) abgezogen

$2xy = 144 - 74 = 70$,

also durch Subtraktion dieser Gleichung von b)

$x^2 + y^2 - 2xy = 4$, d. i.

$(x - y)^2 = 4$, also

d) $x - y = +2$ (aus dem bei Aufgabe 2 angeführten Grunde).

Aus a) und d) folgt nun $x = \frac{12 + 2}{2}$ und $y = \frac{12 - 2}{2}$,

also $x = 7$ und $y = 5$.

Auf ähnliche Art löse man die Gleichungen

I. $x^2 + y^2 = 181$, II. $x - y = 1$.

Aufgabe 4.

α) $x - y = 2$, β) $x^3 - y^3 = 218$.

Man dividire β durch α, so ist

$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = \frac{218}{2}$, oder

γ) $x^2 + xy + y^2 = 109$.

Aus α folgt $(x - y)^2 = 4$, oder

δ) $x^2 - 2xy + y^2 = 4$, und δ von γ abgezogen gibt

$3xy = 105$, oder

ε) $xy = 35$.

Nun verfahre man mit α und ε wie in der Aufgabe 2.

Aufgabe 5.

Zwei Zahlen zu finden, welche zum Produkte 36, und zur Summe ihrer Würfel 1755 geben.

I. $xy = 36$, II. $x^3 + y^3 = 1755$.

Man erhebe II. zum Quadrate

$x^6 + y^6 + 2x^3y^3 = 3080025$, und hiervon abgezogen

aus I.) $-4(x^3y^3) = -186624$, so ist

$x^6 + y^6 - 2x^3y^3 = 2893401$, d. i.

III. $x^3 - y^3 = 1701$,

aus II. $x^3 + y^3 = 1755$,

also $x^3 = \frac{1755 + 1701}{2}$ und $y^3 = \frac{1755 - 1701}{2}$, nämlich

$$x^3 = 1728, \text{ daher } x = \sqrt[3]{1728} = 12, \text{ und}$$
$$y^3 = 27, \text{ daher } y = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Aufgabe 6.

Zwei Zahlen zu finden, deren Summe $= 2$, und deren dritte Potenzen zusammengenommen $= 3{\cdot}5$.

Auflösung.

$$A)\ x + y = 2, \quad B)\ x^3 + y^3 = 3{\cdot}5.$$

Man erhebe A auf den Cubus, so ist

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 8, \text{ und hiervon B subtrahirt}$$
$$x^3 + y^3 \qquad = 3{\cdot}5$$
$$- \quad - \qquad -$$
$$3x^2y + 3xy^2 = 4{\cdot}5, \text{ oder}$$
$$3xy(x + y) = 4{\cdot}5, \text{ und durch Substitution}$$
$$3xy \,.\, 2 = 4{\cdot}5, \text{ also}$$
$$C)\ xy = 0{\cdot}75.$$

Nun verfahre man mit A und C nach Aufgabe 2.

Aufgabe 7.

Das Produkt zweier Zahlen ist $= 48$, und die Differenz ihrer Würfel um das 144fache ihres Unterschiedes vermindert gibt 512. Welches sind diese beiden Zahlen?

Auflösung.

$$a)\ xy = 48, \quad b)\ x^3 - y^3 - 144(x - y) = 512.$$

Man gebe der Gleichung b) folgende Form:

$$x^3 - y^3 - 3 \,.\, 48(x - y) = 512, \text{ und durch Substitution aus a}$$
$$x^3 - y^3 - 3 \,.\, xy(x - y) = 512, \text{ d. i.}$$
$$x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = 512, \text{ oder}$$
$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 512, \text{ nämlich}$$
$$(x - y)^3 = 512, \text{ also } x - y = \sqrt[3]{512} = 8.$$

Nun verfahre man mit den Gleichungen $x - y = 8$ und $xy = 48$ auf ähnliche Art, wie in der Aufgabe 2.

Aufgabe 8.

Man suche zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß ihr Produkt, ihre Summe und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich werde.

Auflösung.

Es sei $xy = x + y = x^2 - y^2$, nämlich

$$a)\ x^2 - y^2 = x + y,\quad b)\ xy = x + y.$$

Dividirt man a) durch $x + y$, so erhält man $x - y = 1$, woraus $x = y + 1$ folgt, und dieser Werth in b) substituirt, gibt

$$y(y + 1) = y + 1 + y, \text{ oder}$$
$$y^2 + y = 2y + 1, \text{ also}$$
$$y^2 - y = 1, \text{ daher}$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ und durch Substitution}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Es ist demnach

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ und } y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$
$$\text{oder } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ und } y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 9.

Man suche zwei Zahlen, deren Produkt, Summe und Summe der Quadrate einander gleich sind.

Auflösung.

Es sei $xy = x + y = x^2 + y^2$, nämlich

$$a)\ xy = x + y,\quad b)\ xy = x^2 + y^2.$$

Aus a folgt $y(x - 1) = x$ oder $y = \frac{x}{x - 1}$, und dieser Werth in b gesetzt gibt

$$\frac{x^2}{x - 1} = x^2 + \frac{x^2}{(x - 1)^2}, \text{ durch } x^2 \text{ dividirt}$$
$$\frac{1}{x - 1} = 1 + \frac{1}{(x - 1)^2},$$

und die Brüche weggeschafft

$$x-1=(x-1)^2+1, \text{ also}$$
$$x^2-3x=-3.$$

Hieraus findet man

$$x=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}, \text{ und durch Substitution in}$$

$$y=\frac{x}{x-1}=x:(x-1) \text{ wird}$$

$$y=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{1\pm\sqrt{-3}},$$

oder den Nenner rational gemacht,

$$y=\frac{(3\pm\sqrt{-3})(1\mp\sqrt{-3})}{1-(\sqrt{-3})^2},$$

$$y=\frac{6\mp2\sqrt{-3}}{1+3}=\frac{3\mp\sqrt{-3}}{2}.$$

Die hier gefundenen Resultate zeigen, daß man in der Aufgabe etwas Unmögliches oder etwas Absurdes verlangt habe.

Zur Uebung löse man die Gleichungen $xy=x-y=x^2+y^2$.

Aufgabe 10.

Zwei Zahlen von der Art zu suchen, daß das Quadrat der ersten mit dem Cubus der zweiten multiplicirt $=8$, und das Produkt aus dem Würfel der ersten in das Quadrat der zweiten $=128$ werde.

Auflösung.

$$\text{I. } x^2y^3=8, \quad \text{II. } x^3y^2=128.$$

Aus I. folgt $(x^2y^3)^2=8^2$ oder $x^4y^6=64$ (A),
Aus II. folgt $(x^3y^2)^3=128^3$ oder $x^9y^6=2097152$ (B).

Dividirt man B durch A, so ist $\frac{x^9y^6}{x^4y^6}=\frac{2097152}{64}$, oder

$$x^5=32768, \text{ also}$$

$$x=\sqrt[5]{32768}=\sqrt[5]{2^{15}}=2^3=8.$$

Aus I. aber folgt

$$y^3=\frac{8}{x^2}=\frac{8}{8^2}=\tfrac{1}{8}, \text{ also } y=\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}=\tfrac{1}{2}.$$

Zur Uebung löse man die Gleichungen A) $x^m y^n=a$, B) $x^\mu y^\nu=\alpha$.

Aufgabe 11.

Die Werthe von x, y und z aus folgenden drei Gleichungen zu bestimmen:

$$a)\ x(y+z)=m,$$
$$b)\ y(x+z)=n,$$
$$c)\ z(x+y)=p.$$

Auflösung.

Multiplicirt man wirklich, so erhält man

$$\alpha)\ xy+xz=m,$$
$$\beta)\ xy+yz=n,$$
$$\gamma)\ xz+yz=p;$$

durch Addition von α, β, γ und Division mit 2 wird

$$A.)\ xy+xz+yz=\tfrac{1}{2}(m+n+p).$$

Zieht man nun von A successive γ, β, α ab, so wird

$$1)\ xy=\tfrac{1}{2}(m+n-p),$$
$$2)\ xz=\tfrac{1}{2}(m+p-n),$$
$$3)\ yz=\tfrac{1}{2}(n+p-m).$$

$$B.)\ x^2y^2z^2=\tfrac{1}{8}(m+n-p)(m+p-n)(n+p-m),\ \text{d. i.}$$
$$C.)\ xyz=\tfrac{1}{4}\sqrt{2(m+n-p)(m+p-n)(n+p-m)}.$$

Dividirt man diese Gleichung nach und nach durch die vorigen 3, 2, 1, so erhält man

$$\frac{xyz}{yz}=x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(m+n-p)(m+p-n)}{n+p-m}},$$
$$\frac{xyz}{xz}=y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(m+n-p)(n+p-m)}{m+p-n}},$$
$$\frac{xyz}{xy}=z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(m+p-n)(n+p-m)}{m+n-p}}.$$

Man versuche diese Aufgaben auch noch auf andere Arten zu lösen.

Aufgabe 12.

Man bestimme x und y aus den Gleichungen:

$$A)\ (x^2+y^2)(x+y)=50,$$
$$B)\ (x^2-y^2)(x-y)=36.$$

Auflösung.

Entwickelt man die Produkte, so erhält man

$$C)\ x^3+x^2y+xy^2+y^3=50,$$
$$D)\ x^3-x^2y-xy^2+y^3=36,$$

also durch Addition von C und D und Division durch 2

$$\text{E)}\ x^3 + y^3 = 43.$$

Subtrahirt man aber D von C, und dividirt durch 2; so wird

$$x^2y + xy^2 = 7,$$ und mit 3 multiplicirt

$$\text{F)}\ 3x^2y + 3xy^2 = 21.$$

Nun addire man E und F, so ist

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 64,$$ d. i.

$$(x + y)^3 = 64,$$ also

$$\text{G)}\ x + y = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Ferner folgt aus der Gleichung B.

$$(x + y)(x - y)(x - y) = 36,$$ oder

$$(x + y)(x - y)^2 = 36,$$ also durch Substit. aus G)

$$4(x - y)^2 = 36,$$ oder

$$\text{H)}\ x - y = \sqrt{9} = 3.$$

Durch Verbindung der Gleichungen G und H findet man endlich

$$x = \frac{4 + 3}{2} \text{ und } y = \frac{4 - 3}{2},$$ d. i.

$$x = + \tfrac{7}{2} \text{ und } y = \tfrac{1}{2}.$$

Zur Uebung empfehle ich dem Anfänger noch die Auflösung folgender Aufgaben:

I. Es sei a) $x^2 + y^2 = m$; b) $x + y = \frac{xy}{n}$.

II. $\alpha)\ \frac{xyz}{x + y} = m$; $\beta)\ \frac{xyz}{x + z} = n$; $\gamma)\ \frac{xyz}{y + z} = p$.

III. 1) $x^2 + 3xy - y^2 = a$; 2) $y : m = n : x - 2y$.

Zweites Kapitel.

Unbestimmte Analytik.

§. 238.

Ob eine Aufgabe unbestimmt sei, oder nicht, dieß läßt sich nach den §. 205, C, gemachten Bemerkungen leicht beurtheilen. Sind die Gleichungen, auf welche die Bedingungen einer Aufgabe leiten, formirt, so verfahre man auf folgende Art. Man schaffe aus den gegebenen Gleichungen nach den bekannten Eliminations-Methoden so viele Unbekannten hinweg, als möglich ist, um eine einzelne Gleichung mit der möglich kleinsten Anzahl von Unbekannten zu erhalten. In dieser letzten Gleichung betrachte man eine einzige Größe als unbekannt, für die übrigen Unbekannten aber setze man beliebige Werthe, wodurch die erste Unbekannte bestimmt wird. Dann substituire man rückwärts, um die übrigen eliminirten Unbekannten zu bestimmen, wie aus den nachfolgenden Beispielen sattsam erhellen wird.

§. 239.

Aufgabe 1.

Aus der Gleichung $ax + by = c$ die Werthe von x und y zu bestimmen.

Auflösung.

Aus der aufgestellten Gleichung folgt

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

I. Da man hier für y unendlich viele verschiedene Werthe setzen kann, so erhält man auch unendlich viele verschiedene Werthe für x, weil keine nähern Bedingungen in der Aufgabe ausgesprochen worden sind. —

II. Wir wollen demnach noch die Bedingung hinzufügen, daß für x und y nur positive Zahlenwerthe gefunden werden sollen.

Es sind hier mehrere Fälle möglich, die wir der Ordnung nach durchgehen wollen.

1) Es seien a, b und c in der Gleichung positive Zahlen. Hier muß offenbar, wenn für x positive Zahlen gefunden werden sollen, $by < c$ oder $y < \frac{c}{b}$ sein, und die Werthe für y liegen demnach zwischen 0 und $\frac{c}{b}$.

2) Wäre b in der aufgestellten Gleichung negativ gegeben worden, so wäre $x = \frac{c + by}{a}$, wo für y alle möglichen Zahlen zwischen 0 und ∞ gesetzt werden können.

3) Wären endlich b und c negativ, so wäre $x = \frac{by - c}{a}$, wo nothwendig $by > c$ oder $y > \frac{c}{b}$ sein muß, wenn nur positive Werthe für x zum Vorscheine kommen sollen. Die Werthe für y liegen demnach in diesem Falle zwischen $\frac{c}{b}$ und ∞.

III. Um die Aufgabe noch mehr zu beschränken, wollen wir voraussetzen, daß nur ganze positive Zahlenwerthe für x und y gefunden werden sollen.

Hier wird die Aufgabe nur dann möglich sein, wenn a und b Primzahlen gegen einander sind.

Denn gesetzt, a und b hätten einen gemeinschaftlichen Faktor > 1 und man setzt z. B. $a = mf$ und $b = nf$, so wäre durch Substitution

$$mfx + nfy = c,$$

und durch f dividirt,

$$mx + ny = \frac{c}{f}.$$

Da nun a, b und c Primzahlen gegen einander sind, weil wir voraussetzen, daß die Gleichung $ax + by = c$ schon zur einfachsten Form gebracht sei, so kann c durch f nicht theilbar sein, was doch sein müßte, weil x und y, also auch $mx + ny$ ganze Zahlen bezeichnen sollen. Haben also a und b einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann die Aufgabe in dem verlangten Sinne nicht aufgelöst werden.

Wir wollen daher annehmen, daß a und b relative Primzahlen seien.

Es sind hier wieder zwei Fälle möglich, denn entweder ist c durch einen der Koefficienten, z. B. durch a theilbar oder nicht. Im

ersten Falle setzt man $\frac{c}{a} = q$, wo q was immer für eine ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$x = \frac{c - by}{a} = \frac{c}{a} - \frac{by}{a} = q - \frac{by}{a}.$$

Soll nun x eine ganze Zahl werden, so können für y nur Vielfache von a substituirt werden, und man setze demnach $y = a\nu$, wo man für ν jede beliebige ganze Zahl setzen kann, die $< \frac{q}{b}$ ist, damit x nicht negativ werde. — Wäre hier $q < b$, also $\nu < 1$, so wäre die Auflösung der Aufgabe in dem angegebenen Sinne unmöglich. Im Falle aber b negativ gegeben, also

$$x = \frac{c + by}{a} = q + \frac{by}{a}$$

wäre, könnte man für ν jede beliebige ganze Zahl setzen.

Ist c weder durch a, noch durch b theilbar, so kann dennoch die Aufgabe auf ähnliche Art aufgelöst werden, wie wir an einigen Beispielen nachweisen werden.

Anmerkung. Die Gleichung $ax - by = \pm c$ kann nach der Theorie der Kettenbrüche unmittelbar aufgelöst werden. Denn setzt man vorläufig $c = 1$, so ist $ax - by = \pm 1$, und wenn man durch ay dividirt, $\frac{x}{y} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 1}{ay}$; woraus man sieht, daß man nur den Bruch $\frac{b}{a}$ in einen zusammenhängenden zu verwandeln (§. 107), und den vorletzten Näherungsbruch, welchen wir durch $\frac{m}{n}$ bezeichnen wollen, zu bestimmen braucht, so ist $ma - nb = \pm 1$ (§. 109, II.); welche Gleichung, mit c multiplicirt, $acm - bcn = \pm c$ gibt. Setzt man demnach $x = cm$ und $y = cn$, so löst man die Aufgabe: Von a und b solche Vielfache zu bestimmen, daß ihr Unterschied $= \pm c$ sei, wo diese Werthe die kleinsten Werthe sind.

So wird man z. B. für die Gleichung $3371x - 814y = -1$ finden:

$$\frac{814}{3371} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}}.$$

also

$$x = 361 \quad \text{und} \quad y = 1495,$$

aber

$$3371 . 361 - 814 . 1495 = + 1.$$

Um nun -1 zu erhalten, muß man den Bruch so darstellen:

$$\frac{814}{3371} = \frac{1}{4+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{12+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1},$$

so findet man als Partialbrüche

$$\tfrac{453}{1876} \text{ und } \tfrac{814}{3371}, \text{ mithin}$$

$$x = 453 \quad \text{und} \quad y = 1876.$$

Beispiele.

Bei der Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ werden wir immer jene Größe zuerst als Funktion der andern darstellen, welche den kleineren Koefficienten hat, also x oder y, je nachdem $a < b$ oder $b < a$ ist.

I. Es kaufte Jemand Schweine und Schafe, und mußte 170 fl. zahlen, weil ihm jedes Schaf 5 fl., und jedes Schwein 7 fl. kostete. Wie viel Schafe und wie viel Schweine hat er wohl gekauft?

Die Anzahl der Schafe sei $= x$, und die Anzahl der Schweine $= y$, so erhält man die Gleichung

$$5x + 7y = 170, \text{ und hieraus folgt}$$

$$x = \frac{170 - 7y}{5}, \text{ oder}$$

$$x = 34 - \frac{7y}{5}.$$

Da hier nur ganze positive Werthe für x und y genommen werden können, so dürfen für y nur solche Vielfache von 5 gesetzt werden, daß $34 > \frac{7y}{5}$, oder $y < \frac{170}{7} < 25$ bleibe; und zugleich folgt aus der Natur der Aufgabe, daß $y > 0$ sein müsse, obgleich dieser Werth der aufgestellten Gleichung Genüge leistet. Setzt man nach und nach

$$y = 5, \; = 10, \; = 15, \; = 20, \text{ so wird}$$
$$x = 27, \; = 20, \; = 13, \; = 6.$$

Es sind demnach hier vier verschiedene Auflösungen möglich.

II. Ein Vater gab wöchentlich jedem seiner Söhne 6 Groschen und jeder seiner Töchter 4 Groschen Taschengeld, und mußte so jede Woche 25 Groschen zahlen. Wie viel Söhne und wie viel Töchter hatte derselbe?

Die Anzahl der erstern sei $= x$, und die der letztern $= y$, so ist $6x + 4y = 25$, woraus man

$$y = \frac{25 - 6x}{4} \text{ erhält, oder}$$

$$y = 6 - x + \frac{1 - 2x}{4} = 6 - x - \frac{2x - 1}{2}.$$

Da nun y nur eine ganze Zahl sein kann, so müßte $\frac{2x - 1}{2}$ auch eine ganze Zahl sein, d. i. es müßte die ungerade Zahl $2x - 1$ durch 2 theilbar sein, was absurd ist. Die Auflösung der Aufgabe in dem verlangten Sinne ist also nicht möglich, wie schon aus dem Umstande, daß die Koefficienten der beiden Unbekannten verwandte Zahlen sind, von selbst hervorgeht.

III. Eine solche Zahl N zu finden, die durch 11 theilbar ist, durch 7 dividirt aber 3 zum Reste läßt.

Es sei $N : 11 = p$, also $N = 11p$ und $N : 7 = q + \frac{3}{7}$, daher $N = 7q + 3$, so ist $11p = 7q + 3$, woraus

$$q = \frac{11p - 3}{7} = \frac{7p + 4p - 3}{7} = p + \frac{4p - 3}{7} \quad (A)$$

gefunden wird. Da nun q eine ganze Zahl ist, so muß auch $\frac{4p - 3}{7}$ eine ganze Zahl sein. Es sei daher $\frac{4p - 3}{7} = r$, also

$$p = \frac{7r + 3}{4} = \frac{8r + 4 - r - 1}{4} = 2r + 1 - \frac{r + 1}{4} \quad (B),$$

wo auch $\frac{r + 1}{4}$ eine ganze Zahl sein muß. Setzt man nun $\frac{r + 1}{4} = s$, so ist $r = 4s - 1$, welcher Werth in B substituirt

$$p = 8s - 2 + 1 - s = 7s - 1$$

gibt; und diesen Werth in die Gleichung $N = 11p$ gesetzt, erhält man

$$N = 11(7s - 1) = 77s - 11,$$

wo man für s jede beliebige ganze Zahl setzen kann.

Setzt man nun

$$s = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots, \text{ so wird}$$
$$N = 66, \quad 143, \quad 220, \quad 297, \ldots$$

IV. Eine solche ganze Zahl zu bestimmen, welche durch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 dividirt, der Ordnung nach die Reste 1, 2, 3, 4, 5 läßt, durch 7 dividirt aber genau aufgeht.

Bezeichnen wir die gesuchte Zahl mit N, und die Quotienten der Ordnung nach mit α, β, γ, δ, ε, ζ, welche lauter ganze Zahlen sein müssen, so erhalten wir nachstehende Gleichungen:

a) $N = 2\alpha + 1$;
b) $N = 3\beta + 2$;
c) $N = 4\gamma + 3$;
d) $N = 5\delta + 4$;
e) $N = 6\varepsilon + 5$; und
f) $N = 7\zeta$.

Durch Gleichstellung der Werthe in a) und b) wird

$$2\alpha + 1 = 3\beta + 2, \text{ mithin } \alpha = \frac{3\beta + 1}{2} = \beta + \frac{\beta + 1}{2},$$

wo $\frac{\beta + 1}{2}$ eine ganze Zahl m sein muß. Aus der Gleichung $\frac{\beta + 1}{2} = m$ aber folgt $\beta = 2m - 1$, daher durch Substitution

$$\alpha = 2m - 1 + m = 3m - 1.$$

Setzen wir ferner

$$N = 2\alpha + 1 = 4\gamma + 3, \text{ mithin}$$
$$2\alpha = 4\gamma + 2, \text{ oder } \alpha = 2\gamma + 1,$$

so wird, weil auch $\alpha = 3m - 1$ ist,

$$2\gamma + 1 = 3m - 1, \text{ also}$$
$$\gamma = \frac{3m - 2}{2} = m - 1 + \frac{m}{2},$$

folglich muß m die Form $m = 2n$ haben, und daher wird

$$\gamma = 2n - 1 + n = 3n - 1; \; \beta = 2m - 1 = 4n - 1$$
$$\text{und } \alpha = 3m - 1 = 6n - 1.$$

Setzen wir weiter die Werthe in a) und d) einander gleich, nämlich $2\alpha + 1 = 5\delta + 4$, so wird

$$\alpha = \frac{5\delta + 3}{2} = 2\delta + 1 + \frac{\delta + 1}{2},$$

also muß $\frac{\delta + 1}{2} = p$ eine ganze Zahl sein, und daher $\delta = 2p - 1$, folglich

$$\alpha = \frac{10p - 5 + 3}{2} = \frac{10p - 2}{2} = 5p - 1.$$

Es ist aber auch $\alpha = 6n - 1$, und daher wird $6n - 1 = 5p - 1$, oder $6n = 5p$ und $n = \frac{5p}{6}$, folglich muß p den Faktor 6 enthalten, oder $p = 6q$ sein; mithin $n = 5q$, also

$$\alpha = 6n - 1 = 30q - 1;$$
$$\beta = 4n - 1 = 20q - 1;$$
$$\gamma = 3n - 1 = 15q - 1; \text{ und}$$
$$\delta = 2p - 1 = 12q - 1.$$

Wir setzen ferner

$$N = 2\alpha + 1 = 6\varepsilon + 5, \text{ also } \alpha = 3\varepsilon + 2,$$

und weil $\alpha = 30q - 1$ ist, so muß auch $3\varepsilon + 2 = 30q - 1$ sein, demnach $\varepsilon = 10q - 1$.

Endlich setzen wir

$$N = 2\alpha + 1 = 7\zeta, \text{ also } \alpha = \frac{7\zeta - 1}{2} = 3\zeta + \frac{\zeta - 1}{2},$$

so muß $\frac{\zeta - 1}{2} = r =$ einer ganzen Zahl sein, daher $\zeta = 2r + 1$, also $\alpha = 6r + 3 + r = 7r + 3$, und weil $\alpha = 30q - 1$ ist, so muß $7r + 3 = 30q - 1$ sein.

Hieraus folgt

$$r = \frac{30q - 4}{7} = 4q + \frac{2q - 4}{7} = 4q + \frac{2(q - 2)}{7},$$

also muß $\frac{q - 2}{7}$ gleich einer ganzen Zahl s sein, nämlich $\frac{q - 2}{7} = s$, daher $q = 7s + 2$; mithin durch Substitntion

$$r = \frac{30(7s + 2) - 4}{7} = 30s + 8;$$

$$\alpha = 30q - 1 = 30\ (7s + 2) - 1 = 210s + 59,$$
$$\beta = 20q - 1 = 20\ (7s + 2) - 1 = 140s + 39,$$
$$\gamma = 15q - 1 = 15\ (7s + 2) - 1 = 105s + 29,$$
$$\delta = 12q - 1 = 12\ (7s + 2) - 1 = 84s + 23,$$
$$\varepsilon = 10q - 1 = 10\ (7s + 2) - 1 = 70s + 19 \text{ und}$$
$$\zeta = 2r + 1 = 2\,(30s + 8) + 1 = 60s + 17.$$

Substituirt man nun einen dieser Werthe in einer der obigen Gleichungen, so findet man $N = 420s + 119$ als die allgemeine Form aller Zahlen, denen die oben angeführten Eigenschaften zukommen. Die kleinste dieser Zahlen wird offenbar für $s = 0$ erhalten, diese ist nämlich $N = 119$.

§. 240.

Die berühmtesten Geometer, als: Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, und Gauß, haben sich bemüht, die Aufgabe,

die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Unbekannten oder vielmehr zwischen zwei veränderlichen Größen vollständig aufzulösen. Wir beschränken uns hier darauf, die Auflösung einiger leichtern Aufgaben dieser Art folgen zu lassen, und zwar solcher, die uns in der Folge nützlich sein werden, oder eine vortreffliche Uebung im Calcul darbieten und ungemein die Urtheilskraft schärfen.

§. 241.

Aufgabe.

Solche Werthe für x zu finden, daß der Ausdruck $y = \sqrt{1+x^2}$ rational, d. i. daß $1+x^2$ ein vollkommenes Quadrat werde.

Auflösung.

Da $\sqrt{1+x^2} > x$ und $\sqrt{1+x^2} < 1+x$ ist, so setze man $\sqrt{1+x^2} = x + \frac{1}{n}$, wo $n > 1$ sein muß, und man findet

$$1 + x^2 = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{2x}{n}, \text{ also } x = \frac{n^2-1}{2n},$$

wo für n jede beliebige, die Einheit überschreitende positive Rationalzahl gesetzt werden kann. — Substituirt man diesen für x gefundenen Werth in der aufgestellten Gleichung, so findet man

$$y = \sqrt{1+x^2} = x + \frac{1}{n} = \frac{n^2-1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{n^2+1}{2n},$$

also einen rationalen Ausdruck, wenn nur n selbst rational ist.

Uebrigens hätte man auch auf folgende Art verfahren können. Man setze

$$y = \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x}{m}, \text{ so wird}$$

$$y^2 = 1 + x^2 = 1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2}{m^2}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{2}{m} + \frac{x}{m^2}, \text{ also } x\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{2}{m}, \text{ d. i.}$$

$$(m^2 - 1)\,x = 2m, \text{ folglich } x = \frac{2m}{m^2-1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes findet man

$$y = \sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{2}{m^2 - 1} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1},$$

also einen rationalen Ausdruck, sobald m^2 eine rationale Zahl bezeichnet.

Zusatz 1.

Da

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2 \quad (A),$$

also auch

$$(m^2 + n^2)^2 - (2mn)^2 = (m^2 - n^2)^2 \quad (B);$$

so enthalten die beiden Gleichungen A und B die allgemeine Auflösung der Aufgabe: Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe oder Differenz wieder ein Quadrat ist, oder die Auflösung der Gleichung $x^2 \pm y^2 = a^2$.

Zusatz 2.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ läßt sich auch auf folgende Art auflösen.

Man setze $y = px - a$, wobei p eine willkürliche rationale Zahl bezeichnen soll; so erhält man durch Substitution dieses Werthes in der vorgelegten Gleichung nach gehöriger Reduktion:

$$x = \frac{2ap}{p^2 + 1} \text{ und dann } y = a \cdot \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1},$$

$$\text{mithin } x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{2p}{p^2 + 1}\right)^2 + a^2 \left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}\right)^2 = a^2.$$

Auf ähnliche Weise läßt sich auch die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ auflösen.

Zusatz 3.

Es ist klar, daß die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ unzählige Auflösungen zuläßt, und wir wollen nun die Bedingung stellen, daß x, y und a ganze Zahlen sein sollen. — Wir haben demnach zwei Fälle zu unterscheiden, denn es bezeichnet a^2 entweder eine ungerade oder eine gerade Zahl.

Sei nun $a^2 = 2p + 1$, mithin die Gleichung

$x^2 - y^2 = a^2 = 2p + 1$ aufzulösen. Zunächst folgt:

$a^2 + p^2 = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$, sonach

$x^2 - y^2 = a^2 = (p + 1)^2 - p^2$.

Sei z. B. $a^2 = 49 = 2.24 + 1$, also $p = 24$ und $p + 1 = 25$; so wird

$$x^2 - y^2 = 25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49,$$

daher $x = 25$ und $y = 24$.

Ist $a^2 = 2q$, so muß, weil $2q$ ein vollkommenes Quadrat sein soll, q nothwendig eine ungerade Potenz von 2 als Faktor enthalten, also die Form haben $q = 2^{2r+1} . m^2$, und daher

$$a^2 = 2^{2r+2} m^2 = (2^{r+1})^2 . m^2,$$

wobei $m^2 = 2n + 1$ eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet.

Unter dieser Annahme geht unsere Gleichung über in folgende:

$$x^2 - y^2 = a^2 = (2^{r+1})^2 . m^2,$$

und hieraus ist ersichtlich, daß 2^{r+1} ein gemeinschaftlicher Faktor von x und y sein müsse.

Sei also $x = 2^{r+1} . x^1$ und $y = 2^{r+1} . y^1$, so findet man nach gehöriger Reduktion

$$x'^2 - y'^2 = m^2 = 2n + 1,$$

wodurch dieser zweite Fall auf den erstern zurückgeführt erscheint.

Sei z. B. $x^2 - y^2 = 100 = 2^2 . 25$, also

$$r = 0,\ m^2 = 25 = 2.12 + 1 \text{ und } n = 12, \text{ so wird}$$
$$x'^2 - y'^2 = 25 = 2.12 + 1 = (p + 1)^2 - p^2,$$
$$\text{wo } p = 12 \text{ und } p + 1 = 13, \text{ sonach}$$
$$x'^2 - y'^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$
$$\text{folglich } x^1 = 13, \text{ und } y^1 = 12, \text{ mithin}$$
$$x = 2x^1 = 26 \text{ und } y = 2y^1 = 24$$

und es ist in der That $x^2 - y^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100$.

In beiden Fällen läßt demnach die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ nur Eine Auflösung zu.

§. 242.

Aufgabe.

Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Differenz gegeben ist, oder die Gleichung $x^2 - y^2 = d$ aufzulösen.

Auflösung.

Setzt man in der Gleichung

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = d$$
$$x + y = n, \text{ also}$$

$$x - y = \frac{d}{n}; \text{ so wird}$$

$$x = \frac{n}{2} + \frac{d}{2n} = \frac{n^2 + d}{2n} = \tfrac{1}{2}\left[n + \frac{d}{n}\right] \text{ und}$$

$$y = \frac{n}{2} - \frac{d}{2n} = \frac{n^2 - d}{2n} = \tfrac{1}{2}\left[n - \frac{d}{n}\right].$$

Sollen x und y ganze Zahlen werden, so muß n ein Faktor von d sein und die beiden Zahlen n und $\frac{d}{n}$ müssen zugleich gerade oder ungerade ganze Zahlen sein; überdieß $n > \sqrt{d}$.

§. 243.

Aufgabe.

Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß nicht allein ihre Summe, sondern auch die Summen von je zweien derselben ein vollkommenes Quadrat sei.

Auflösung.

Seien x, y und z die gesuchten Zahlen, so müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y + z &= a^2 \\ x + y &= b^2 \\ x + z &= c^2 \\ y + z &= d^2 \end{aligned}$$

Statt finden, wo $a > b > c > d$ unbestimmte Zahlen bezeichnen sollen: es wird sich demnach darum handeln, die Form der drei Zahlen x, y und z zu bestimmen.

Sei nun $a = b + n$, also $x + y + z = a^2 = b^2 + 2bn + n^2$ und hiervon $x + y = b^2$ abgezogen, findet man

$$z = 2bn + n^2 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

ferner sei $d = b - n$, mithin $y + z = d^2 = b^2 - 2bn + n^2$ und daher

$$y = b^2 - 2bn + n^3 - z = b^2 - 2bn + n^2 - (2bn + n^2) = b^2 - 4bn$$

also

$$x = b^2 - y = 4bn.$$

Berücksichtigen wir endlich noch die Gleichung $x + z = c^2$, und setzen statt x und z obige Werthe, so erhält man

$$4bn + (2bn + n^2) = c^2,$$

oder $6bn + n^2 = c^2$, woraus sich

$$b = \frac{c^2 - n^2}{6n}$$

ergibt, und dieser Werth in die obigen Ausdrücke für x, y und z gesetzt, findet man

$$x = \tfrac{2}{3}(c^2 - n^2);\; y = \left(\frac{c^2 - n^2}{6n}\right)^2 - \tfrac{2}{3}(c^2 - n^2)$$

$$\text{und } z = \tfrac{1}{3}(c^2 - n^2) + n^2$$

als die allgemeinen Formen der gesuchten Zahlen.

Sei z. B. $c = 10$ und $n = 5$; so wird $x = 50$, $y = -43{\cdot}75$ und $z = 50$, mithin

$$x + y + z = 56{\cdot}25 = 7{\cdot}5^2$$
$$x + y = 6{\cdot}25 = 2{\cdot}5^2$$
$$x + z = 100 = 10^2$$
$$y + z = 6{\cdot}25 = 2{\cdot}5^2.$$

Zusatz.

Sollen x, y und z positive Zahlen bezeichnen, so muß $c > 5n$ oder $n < \frac{c}{5}$ genommen werden, denn da

$$y = \left(\frac{c^2 - n^2}{6n}\right)^2 - \tfrac{2}{3}(c^2 - n^2) = \frac{(c^2 - 5n^2)^2 - (4cn)^2}{36n^2}$$

ist, so wird y nur dann positiv, wenn

$$c^2 - 5n^2 > 4cn, \text{ oder } c^2 - 4cn > 5n^2$$

also $c^2 - 4cn + 4n^2 > 9n^2$, d. i. $(c - 2n)^2 > 9n^2$,

woraus $c > 5n$ oder $n < \frac{c}{5}$ folgt.

Sei z B. $c = 12$ und $n = 2$; so wird

$$x = \frac{280}{3},\; y = \frac{385}{9} \text{ und } z = \frac{152}{3}, \text{ und es ist}$$

$$x + y + z = \frac{1681}{9} = \left(\frac{41}{3}\right)^2$$
$$x + y = \frac{1225}{9} = \left(\frac{35}{3}\right)^2$$
$$x + z = 144 = 12^2$$
$$y + z = \frac{841}{9} = \left(\frac{29}{3}\right)^2$$

Da $c > 5n$ sein muß, um für x, y, z positive Werthe zu erhalten, so setze man $c = 5n + \delta$, also $c^2 = 25n^2 + 10n\delta + \delta^2$, sonach

$c^2 - n^2 = 24n^2 + 10n\delta + \delta^2$; so wird $\frac{c^2 - n^2}{6n} = 4n + \frac{5\delta}{3} + \frac{\delta^2}{6n}$,

und wenn $\frac{c^2 - n^2}{6n}$ eine ganze Zahl sein soll, mithin auch

$$\frac{c^2 - n^2}{6} = 4n^2 + \frac{5n\delta}{3} + \frac{\delta^2}{6},$$

so muß $\delta = 6\mu$ der Form nach sein, damit $\frac{c^2 - n^2}{6n} = 4n + 10\mu + 6\mu^2 =$ einer ganzen Zahl, also auch x, y und z ganze Zahlen werden.

Sei z. B. $n = 2$ und $\mu = 3$, also $c = 5n + \delta = 5n + 6\mu = 10 + 18 = 28$; so wird $c^2 - n^2 = 784 - 4 = 780$, demnach

$$\left.\begin{array}{l} x = 520 \\ y = 3705 \\ z = 264 \end{array}\right\}, \text{ folglich } \begin{array}{r} x + y + z = 4489 = 67^2 \\ x + y = 4225 = 65^2 \\ x + z = 784 = 28^2 \\ y + z = 3969 = 63^2. \end{array}$$

§. 244.

Aufgabe.

Welche Werthe müssen für x substituirt werden, damit der Ausdruck $y = \sqrt{a + bx + cx^2}$ rational werde?

Auflösung.

Wir wollen hier einige besondere Fälle betrachten, welche bisweilen Statt finden können.

a) Setzen wir zuerst, es sei $c = \gamma^2$ ein vollkommenes Quadrat. In diesem Falle nehme man

$$y = \sqrt{a + bx + \gamma^2 x^2} = p + \gamma x, \text{ also}$$
$$a + bx = p^2 + 2p\gamma x, \text{ oder}$$
$$(b - 2p\gamma)\, x = p^2 - a, \text{ folglich}$$
$$x = \frac{p^2 - a}{b - 2p\gamma} \; . \; . \; . \; . \; (A),$$

wo p eine beliebige Rationalzahl bezeichnet. Hier wird demnach

$$y = p + \gamma x = p + \frac{\gamma p^2 - a\gamma}{b - 2p\gamma} = \frac{bp - 2p^2\gamma + p^2\gamma - a\gamma}{b - 2p\gamma},$$

$$\text{oder } y = \frac{bp - p^2\gamma - a\gamma}{b - 2p\gamma}, \text{ mithin rational.}$$

b) Ist c kein Quadrat, sondern a, z. B. $a = \alpha^2$, so setze man

$$\sqrt{\alpha^2 + bx + cx^2} = \alpha + px, \text{ also}$$

$$\alpha^2 + bx + cx^2 = \alpha^2 + 2\alpha px + p^2x^2,$$

woraus

$$\text{(B)} \quad x = \frac{2\alpha p - b}{c - p^2} \text{ gefunden wird.}$$

Substituirt man diesen Werth, so findet man

$$y = \sqrt{\alpha^2 + bx + cx^2} = \alpha + px = \alpha + \frac{2\alpha p^2 - bp}{c - p^2} = \frac{\alpha c + \alpha p^2 - bp}{c - p^2}$$

folglich ist y rational.

Zusatz.

Setzt man $a = 0$, so geht die Gleichung A über in

$$x = \frac{p^2}{b - 2p\gamma} \text{ und B in } x = \frac{b}{p^2 - c}.$$

Für $c = 0$ geht der gegebene Ausdruck über in $\sqrt{a + bx}$, die Gleichung A in $x = \frac{p^2 - a}{b}$, weil dann auch $\gamma = 0$ ist, und B in $x = \frac{b - 2\alpha p}{p^2}$. Für $b = 0$ wird aus der gegebenen Radikalgröße $\sqrt{a + cx^2}$, und aus A wird $x = \frac{a - p^2}{2p\gamma}$; aus B aber $x = \frac{2\alpha p}{c - p^2}$, Für $b = 0$ und $a = \gamma = c = 1$ wird $x = \frac{1 - p^2}{2p}$.

c) Ist weder a noch c ein Quadrat, so setze man das gegebene Trinom $a + bx + cx^2 = 0$. Aus dieser Gleichung folgt nun

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \text{ (§. 221),}$$

wo x rational sein wird, wenn $b^2 - 4ac$ ein vollkommenes Quadrat ist. Setzt man nämlich $b^2 - 4ac = m^2$, so ist $x = \frac{-b \pm m}{2c}$, und daher nach (§. 222)

$$c\left(x + \frac{b + m}{2c}\right)\left(x + \frac{b - m}{2c}\right) = c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{b^2 - m^2}{4c^2}\right)$$

$$= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{4ac}{4c^2}\right) = cx^2 + bx + a,$$

denn aus der Gleichung $b^2 - 4ac = m^2$ folgt $b^2 - m^2 = 4ac$. Hat man nun das Trinom in ein Produkt von zwei Faktoren, z. B. $a + bx + cx^2 = (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)$ aufgelöst, so setze man

$$\sqrt{(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)} = p(\gamma + \delta x), \text{ also}$$
$$(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x) = p^2(\gamma + \delta x)^2,$$

oder abgekürzt

$$\alpha + \beta x = p^2(\gamma + \delta x), \text{ woraus}$$
$$x = \frac{p^2\gamma - \alpha}{\beta - p^2\delta} \text{ (C) gefunden wird.}$$

Läßt sich $a + bx + cx^2$ auf die Form

$$(\alpha + \beta x)^2 + (\gamma + \delta x)(\varepsilon + \zeta x)$$

bringen, so setze man

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{(\alpha + \beta x)^2 + (\gamma + \delta x)(\varepsilon + \zeta x)}$$
$$= (\alpha + \beta x) + p(\varepsilon + \zeta x), \text{ also}$$
$$(\alpha + \beta x)^2 + (\gamma + \delta x)(\varepsilon + \zeta x) = [(\alpha + \beta x) + p(\varepsilon + \zeta x)]^2,$$

oder

$$(\alpha + \beta x)^2 + (\gamma + \delta x)(\varepsilon + \zeta x) = (\alpha + \beta x)^2 + 2p(\alpha + \beta x)(\varepsilon + \zeta x)$$
$$+ p^2(\varepsilon + \zeta x)^2, \text{ d. i.}$$
$$\gamma + \delta x = 2p(\alpha + \beta x) + p^2(\varepsilon + \zeta x), \text{ oder}$$
$$\gamma + \delta x = 2\alpha p + 2\beta p x + \varepsilon p^2 + \zeta p^2 x, \text{ woraus}$$
$$\text{(D)} \quad x = \frac{\gamma - 2\alpha p - \varepsilon p^2}{2\beta p + \zeta p^2 - \delta} \text{ gefunden wird.}$$

Sollte das Trinom $a + b + cx^2$ sich nicht in reelle rationale Faktoren zerlegen lassen, so versuche man, ob sich dasselbe in der Form $a + bx + cx^2 = A^2 + (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)$ oder in der Form $a + bx + cx^2 = (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x) + \mu^2 x$ darstellen lasse und setze dann im erstern Falle

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = A + p(\gamma + \delta x) \text{ und im letztern}$$
$$\sqrt{a + bx + cx^2} = q(\gamma + \delta x) + \mu x,$$

welche zwei Gleichungen rücksichtlich der Größe x vom ersten Grade sind, aus welchen sich sonach die Form der durch x bezeichneten Werthe bestimmen lassen.

Einige besondere Beispiele zur Erläuterung.

I. Wann wird $\sqrt{2 + 3x + 4x^2}$ rational sein?

Hier ist $a = 2$, $b = 3$, $c = 4 = 2^2$ und $\gamma = 2$, also nach der Formel A) $x = \frac{p^2 - 2}{3 - 4p}$, wo man für p jede beliebige Rationalzahl, $p = \frac{3}{4}$ ausgenommen, setzen kann. Nimmt man $p = 1$, so wird

$$x = \frac{1 - 2}{3 - 4} = \frac{-1}{-1} = +1 \text{ und}$$
$$y = \sqrt{2 + 3 + 4} = \pm 3.$$

Eben so wird für $p = \frac{1}{2}$ der Werth

$$x = \frac{\frac{1}{4} - 2}{3 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{7}{4}, \text{ also}$$

$$y = \sqrt{2 + 3(-\tfrac{7}{4}) + 4(-\tfrac{7}{4})^2} = \sqrt{9} = \pm 3.$$

II. Wann wird $\sqrt{9 + 2x + x^2}$ rational werden?

Hier ist $a = 9 = 3^2 = \alpha^2$, also $\alpha = 3$, $b = 2$ und $c = 1$. Man könnte zwar diesen Fall auch nach der Formel A behandeln, weil $c = \gamma^2 = 1 = 1^2$ ist; allein wir wollen hier die Formel B nehmen. Durch Substitution erhält man daselbst $x = \frac{6p - 2}{1 - p^2}$, wo man für p jede beliebige Zahl setzen kann, ausgenommen $p = 1$. Setzt man nun $p = \frac{1}{3}$, so wird $x = \frac{2 - 2}{1 - \frac{1}{9}} = 0$, und der gegebene Ausdruck geht über in $\sqrt{9} = \pm 3$. Setzt man $p = 2$, so wird

$$x = \frac{12 - 2}{1 - 4} = \frac{10}{-3} = -\frac{10}{3},$$

und durch Substitution

$$\sqrt{9 + 2x + x^2} = \sqrt{9 - \tfrac{20}{3} + \tfrac{100}{9}} = \sqrt{\frac{81 - 60 + 100}{9}} = \sqrt{\tfrac{121}{9}} = \pm \tfrac{11}{3}.$$

Es sind demnach unendlich viele Auflösungen möglich.

III. Einen solchen Werth für x zu finden, daß die Größe

$$\sqrt{10 - 17x + 3x^2}$$

rational werde.

Dieser Ausdruck ist nach Fall c) zu behandeln, indem weder 10 noch 3 ein vollkommenes Quadrat ist. Man setze demnach

$$3x^2 - 17x + 10 = 0,$$

woraus (nach §. 221) $x = \frac{17 \pm 13}{6}$, also $x = 5$, oder $x = \frac{2}{3}$ gefunden wird. Es ist daher

$$\sqrt{10 - 17x + 3x^2} = \sqrt{3(x - 5)(x - \tfrac{2}{3})} = \sqrt{(x - 5)(3x - 2)}.$$

Durch Vergleichung ergibt sich nun, daß $\alpha = -5$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$ und $\delta = 3$ sei, und demnach ist durch Substitution

$$x = \frac{-2p^2 + 5}{1 - 3p^2} = \frac{2p^2 - 5}{3p^2 - 1},$$

wo für p jede beliebige Zahl gesetzt werden kann. Setzt man z. B. $p = \frac{1}{2}$, also $p^2 = \frac{1}{4}$, so wird

$$x = \frac{\frac{1}{2} - 5}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{-18}{-1} = +18,$$

und durch Substitution

$$\sqrt{10 - 17x + 3x^2} = \sqrt{10 - 17 . 18 + 3 . 18^2} = \sqrt{676} = \pm 26.$$

Eben so wird für $p = 1$, $x = \frac{2 - 5}{3 - 1} = \frac{-3}{2}$ und

$$\sqrt{10 - 17x + 3x^2} = \sqrt{10 - 17 \times \frac{-3}{2} + 3 (\tfrac{3}{2})^2} = \sqrt{\tfrac{169}{4}} = \pm \tfrac{13}{2}.$$

Zur Uebung bestimme der Anfänger die Formen der Werthe von x, für welche

$y = \sqrt{21 - x - 6x^2}$ und $u = \sqrt{12 + 5x + 6x^2}$ rational werden.

§. 245.

1. Es ereignet sich bisweilen, daß eine Aufgabe unbestimmt bleibt, obgleich sie dieses nicht zu sein scheint, weil die Bedingungen derselben auf eben so viele verschiedene Gleichungen zu führen scheinen, als unbekannte Größen vorhanden sind. Wenn z. B. die Aufgabe gegeben wäre: Drei Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß das Dreifache der ersten um die Summe der beiden andern vermehrt die Zahl 12 gibt; die doppelte Summe der beiden ersten aber um das Dreifache der dritten vermehrt $= 13$; und endlich das Siebenfache der ersten um die zweite Zahl vermehrt $= 23$ wird, so würde man folgende drei Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} a)\quad & 3x + y + z = 12, \\ b)\quad & 2x + 2y + 3z = 13, \\ c)\quad & 7x + y = 23; \end{aligned}$$

und die Aufgabe scheint bestimmt zu sein, weil nur drei unbekannte Größen, und eben so viele Gleichungen vorhanden sind. Eliminirt man nun z, indem man von der mit 3 multiplicirten Gleichung a die Gleichung b abzieht, so erhält man die Gleichung $7x + y = 23$, welche mit c identisch ist; woraus denn erhellt, daß die dritte Gleichung keine neuen Bedingungen enthält, sondern nur die in den beiden ersten Gleichungen enthaltenen Eigenschaften wiederholt, ausdrückt.

Die identische Gleichung ist demnach ein Zeichen der Unbestimmtheit.

2. Bisweilen ist es unmöglich, für die unbekannten Größen einer Aufgabe solche Werthe zu finden, die den Bedingungen derselben entsprechen, wie wir bereits in mehreren Fällen schon gesehen haben, und wie noch die folgenden Beispiele zeigen sollen.

I. Drei Zahlen zu suchen, die so beschaffen sind, daß die Summe der beiden ersten $= 12$, die Summe der beiden letzten $= 6$, und die Differenz zwischen der ersten und dritten $= 4$ sei.

Diesen Bedingungen zur Folge erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a)\quad x + y &= 12, \\ b)\quad y + z &= 6, \\ c)\quad x - z &= 4. \end{aligned}$$

Addirt man b und c, so erhält man

$$x + y = 10,$$

und dieser Werth in a gesetzt, gibt $10 = 12$, woraus die Absurdität der Aufgabe sogleich erkannt wird.

II. Ein Vater schenkte seinen Kindern 12 fl. 15 kr., und so bekam jedes Kind so viele Gulden, als es Kinder waren. Hier ist

$$x^2 = 12\tfrac{1}{4} = \tfrac{49}{4}, \text{ also}$$

$$x = \pm \sqrt{\tfrac{49}{4}} = \pm \tfrac{7}{2} = \pm 3\tfrac{1}{2}.$$

Da nun die Natur der Aufgabe keine gebrochenen Werthe zuläßt, so ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich.

Fünfter Abschnitt.

Von den Progressionen und Logarithmen.

---

§. 246.

Eine Folge von Größen, die nach einem bestimmten unveränderlichen Gesetze entstehen, heißt eine Reihe, und jede einzelne Größe für sich heißt ein Glied der Reihe. Die Reihe heißt steigend oder fallend, je nachdem die auf einander folgenden Glieder der Reihe wachsen oder abnehmen. Auch wird die Reihe eine endliche oder unendliche genannt, je nachdem die Anzahl ihrer Glieder begrenzt, oder unbegrenzt ist.

Die Stellen, welche die Glieder einer Reihe einnehmen, werden mit den in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgenden ganzen Zahlen bezeichnet, welche man die Zeiger (Indices) der zugehörigen Glieder zu nennen pflegt. Gibt man nun irgend einem Gliede den Zeiger 1, so erhalten die gegen die Rechte folgenden Glieder der Ordnung nach die Zeiger 2, 3, 4, ..., die gegen die Linke stehenden aber der Ordnung nach die Zeiger 0, —1, —2, —3, ... Hat man es mit einer geschlossenen Reihe zu thun, d. h. mit einer solchen, welche eine begrenzte Anzahl von Gliedern enthält, so gibt man dem ersten Gliede links gewöhnlich den Zeiger 1 oder 0.

Es ist ohne Zweifel sehr zweckmäßig, die Glieder einer Reihe sämmtlich durch denselben Buchstaben darzustellen, welchem man die Zeiger dieser Glieder rechts unten anhängt. Nach dieser Bezeichnungsart wird demnach das Aggregat der Symbole

$$\ldots u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \ldots$$

jede beliebige Reihe darstellen, welche man nach beiden Richtungen, so weit man will, fortsetzen kann.

Das Gesetz, nach welchem eine Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \dots u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \dots$$

gebildet ist, kann auf zweierlei Art dargestellt werden; denn entweder wird jedes Glied der Reihe, wie u_n, durch die ihm vorausgehenden Glieder u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, ... ausgedrückt, oder es ist u_n bloß von dem entsprechenden Zeiger n abhängig, d. h. es ist u_n als eine Funktion von n gegeben. In beiden Fällen heißt der für u_n aufgestellte Ausdruck das allgemeine Glied der Reihe, und man sagt im ersten Falle, es sei durch eine Recursion, oder in der recurrirenden Form gegeben, und im andern Falle, es sei independent, oder in der independenten Form dargestellt. Mittelst der recurrirenden Form des allgemeinen Gliedes vermag man kein Glied der Reihe außer der Ordnung, d. h. bevor alle vorangehenden Glieder bekannt sind, anzugeben; mit Hülfe der independenten Form dagegen kann man jedes beliebige Glied der Reihe außer der Ordnung berechnen. Aus der independenten Form des allgemeinen Gliedes einer Reihe läßt sich immer die recurrirende Form desselben ableiten, wenn man nach und nach $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ u. s. w. statt n schreibt, und die dadurch gefundenen Gleichungen durch Elimination der darin erscheinenden constanten Größen auf eine einzige Gleichung reducirt; allein das Aufsuchen der independenten Form aus der recurrirenden hat seine besondern Schwierigkeiten, die durch eigenthümliche Methoden beseitigt werden müssen.

Eine Funktion des unbestimmten Zeigers n (die wir mit S_n bezeichnen wollen), welche die Summe einer Reihe bis zu dem Gliede u_n angibt, heißt die Summenformel oder das Summenglied, oder auch das summatorische Glied dieser Reihe.

Haben die auf einander folgenden Glieder einer Reihe immer dasselbe Verhältniß, so wird die Reihe vorzugsweise Progression genannt, die demnach entweder eine arithmetische oder eine geometrische ist, je nachdem die auf einander folgenden Glieder derselben immer in dem nämlichen arithmetischen oder geometrischen Verhältnisse stehen. Die Progressionen theilt man, wie die Reihen überhaupt, in steigende und fallende.

Erstes Kapitel.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 247.

Eine arithmetische Progression ist dem im vorigen Paragraphen Gesagten zur Folge eine Reihe, deren Glieder immer um dieselbe Differenz wachsen oder abnehmen. So z. B. bilden die Zahlen 1, 4, 7, 10, 13, ... eine steigende arithmetische Progression, in welcher die Glieder immer um drei Einheiten wachsen, und die Zahlen 9, 7, 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5, ... bilden eine fallende arithmetische Progression, weil jedes folgende Glied um zwei Einheiten kleiner ist, als das unmittelbar vorhergehende.

Daß die Zahlen 1, 4, 7, 10, ... eine arithmetische Progression bilden, pflegt man so zu bezeichnen:

$$\div\, 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \ldots \quad \text{oder} \quad \div\, 1,\, 4,\, 7,\, 10, \ldots$$

Da die Differenz zwischen je zwei Gliedern einer arithmetischen Progression beständig ist, so ist auch das arithmetische Verhältniß zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern beständig, und demnach müssen drei unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stätige arithmetische Progression bilden. So z. B. ist in der angeführten Progression

$$4 - 1 = 3 = 7 - 4 = 10 - 7 = \text{u. s. w.},$$

also

$$\div\, 1 \div 4 \div 7, \quad \div\, 4 \div 7 \div 10, \text{ u. s. f.}$$

Die Differenz der Reihe wird gefunden, wenn man irgend ein Glied derselben von dem nächst folgenden subtrahirt. Je nachdem nun diese Differenz positiv oder negativ gefunden wird, ist die Progression steigend oder fallend.

Ist daher irgend ein Glied der Progression nebst der Differenz, oder sind zwei auf einander folgende Glieder gegeben, so kann die Progression auf beiden Seiten nach Belieben fortgesetzt werden. Sind z. B. 7 und 9 zwei neben einander liegende Glieder einer Progression, so ist diese

$$\ldots -5 \,.\, -3 \,.\, -1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \ldots$$

Bezeichnet man nun das erste Glied einer arithmetischen Progression mit a, und die beständige Differenz mit d, so erhält man

$$\div\, a \,.\, a + d \,.\, a + 2d \,.\, a + 3d \,.\, a + 4d \ldots,$$

welches die allgemeine Form der arithmetischen Progressionen ist.

Wenn nun die Größen $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz $= \delta$ ist, so erhält man folgende Gleichungen:

Das 1ste Glied $u_1 = u_1$
" 2te " $u_2 = u_1 + \delta$
" 3te " $u_3 = u_1 + 2\delta$
" 4te " $u_4 = u_1 + 3\delta$
" 5te " $u_5 = u_1 + 4\delta$
. . . . also
" nte " $u_n = u_1 + (n-1)\delta$;

denn man sieht, daß jedes Glied aus u_1 und δ zusammengesetzt, und daß der Koefficient von δ immer um 1 kleiner sei, als der Index des fraglichen Gliedes.

Bezeichnet δ eine positive Zahl, so ist die Reihe

$$\div\, u_1,\ u_1 + \delta,\ u_1 + 2\delta,\ u_1 + 3\delta,\ u_1 + 4\delta, \ldots u_1 + (n-1)\delta$$

eine steigende; ist aber δ negativ, so ist die Reihe fallend. Nimmt man daher die Glieder einer steigenden arithmetischen Progression

$$\div\, u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_{n-1},\ u_n,$$

in der umgekehrten Ordnung, so bilden sie eine fallende Progression; nämlich es ist

$$\div\, u_n,\ u_{n-1},\ u_{n-2},\ \ldots\ u_3,\ u_2,\ u_1,$$

eine fallende Reihe. Es ist demnach

$$u_{n-1} = u_n - \delta,$$
$$u_{n-2} = u_{n-1} - \delta = u_n - 2\delta,$$
$$u_{n-3} = u_{n-2} - \delta = u_n - 3\delta,$$
. . . . allgemein
$$u_{n-r} = u_{n-r+1} - \delta = u_n - r\mathrm{d}.$$

Die Formel $u_n = u_1 + (n-1)\delta$, wo δ positiv oder negativ sein mag, enthält das Bildungsgesetz der arithmetischen Progressionen, und zwar in der independenten Form; für die rekurrirende Form erhält man $u_n = u_{n-1} + \delta$.

§. 248.

Aufgabe.

Zwischen zwei Zahlen a und b eine beliebige Anzahl (z. B. p) Glieder so einzuschalten, daß diese mit den gegebenen Zahlen eine arithmetische Progression bilden.

Auflösung.

In der allgemeinen Formel

$$u_n = u_1 + (n - 1)\delta \text{ setze man}$$

$$u_n = b,\ u_1 = a,\ n = p + 2,\ \text{also}\ n - 1 = p + 1,$$

denn da p Glieder eingeschaltet werden sollen, und zwei Glieder, nämlich das erste a und das letzte b gegeben sind, so ist die Anzahl der Glieder $n = p + 2$. Mittelst dieser Substitution erhält man

$$b = a + (p + 1)\delta, \text{ woraus } \delta = \frac{b - a}{p + 1}$$

gefunden wird. Da nun das erste Glied a und die Differenz δ bekannt sind, so wird die Progression folgende sein:

$$\div\, a \,.\, a + \frac{b - a}{p + 1} \,.\, a + \frac{2(b - a)}{p + 1} \,.\, a + \frac{3(b - a)}{p + 1} \ldots$$

oder

$$\div\, a \,.\, \frac{ap + b}{p + 1} \,.\, \frac{a(p - 1) + 2b}{p + 1} \,.\, \frac{a(p - 2) + 3b}{p + 1} \ldots$$

Beispiel.

Zwischen 1 und 2 sollen neun mittlere arithmetische Proportionalen eingeschaltet werden. Setzt man $a = 1$, $b = 2$ und $p = 9$, so ist $\delta = \frac{1}{10}$, und daher

$$\div\, 1 \,.\, 1 + \tfrac{1}{10} \,.\, 1 + \tfrac{2}{10} \,.\, 1 + \tfrac{3}{10} \,.\, 1 + \tfrac{4}{10} \,.\, 1 + \tfrac{5}{10} \,.$$
$$1 + \tfrac{6}{10} \,.\, 1 + \tfrac{7}{10} \,.\, 1 + \tfrac{8}{10} \,.\, 1 + \tfrac{9}{10} \,.\, 2, \text{ oder}$$
$$\div\, 1 \,.\, 1{\cdot}1 \,.\, 1{\cdot}2 \,.\, 1{\cdot}3 \,.\, 1{\cdot}4 \,.\, 1{\cdot}5 \,.\, 1{\cdot}6 \,.\, 1{\cdot}7 \,.\, 1{\cdot}8 \,.\, 1{\cdot}9 \,.\, 2.$$

§. 249.

Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Progression mit einer begrenzten Anzahl von Gliedern ist die Summe der beiden äußersten Glieder gleich der Summe von je zwei andern, deren eines so weit vom ersten Gliede, als das andere vom letzten absteht.

Beweis.

Bezeichnet man in einer arithmetischen Progression von n Gliedern das : te Glied vom ersten gegen das letzte hin mit x, und das pte Glied vom letzten gegen das erste gerechnet mit y, so ist

$$x = u_1 + (p - 1)\delta \text{ und}$$
$$y = u_n - (p - 1)\delta \text{ (§. 247); folglich}$$
$$x + y = u_1 + u_n.$$

Schreibt man unter eine begrenzte arithmetische Progression dieselbe Reihe von Größen in umgekehrter Ordnung, und addirt die über einander stehenden Glieder, so wird die obige Wahrheit anschaulich. Z. B.:

	1 .	3 .	5 .	7 .	9 .	11 .	13
	13 .	11 .	9 .	7 .	5 .	3 .	1
Summen	14,	14,	14,	14,	14,	14,	14:

Zusatz.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, z. B. $= 2m + 1$, so hat man ein mittleres Glied M, nämlich das $(m + 1)$te, und zwar ist $M = u_1 + m\delta$. In diesem Falle ist $u_n = u_1 + 2m\delta$, also

$$u_1 + u_n = 2 . M \text{ oder } M = \frac{u_1 + u_n}{2},$$

d. i. die Summe der beiden äußersten Glieder ist gleich dem doppelten mittleren Gliede, oder das mittlere Glied ist gleich der halben Summe der beiden äußersten Glieder.

Ist aber die Anzahl der Glieder gerade, z. B. $n = 2r$, so hat man zwei mittlere Glieder $M' = u_r = u_1 + (r - 1)\delta = u_1 + \frac{n-2}{2}\delta$ und $M'' = u_{r+1} = u_1 + r\delta = u_1 + \frac{n}{2}\delta$.

§. 250.

Aufgabe.

Die Summe einer arithmetischen Progression von n Gliedern zu finden.

Auflösung.

Sei S_n die Summe der arithmetischen Reihe

$$\div u_1 . u_2 . u_3 . u_4 \ldots u_{n-1} . u_n,$$

nämlich es sei

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u^n,$$

also auch

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + \ldots + u_2 + u_1;$$

so ist durch Addition

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + (u_4 + u_{n-3}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1).$$

Nun ist aber

$$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \ldots \text{ (§. 249)},$$

und da n solche Summenausdrücke vorkommen, so ist

$$2S_n = n(u_1 + u_n), \text{ folglich } S_n = (u_1 + u_n) \cdot \frac{n}{2},$$

d. h. die Summe einer arithmetischen Progression wird gefunden, wenn man das Produkt aus der Anzahl der Glieder in die Summe der beiden äußersten Glieder durch 2 dividirt, oder wenn man die Summe der beiden äußersten Glieder mit der halben Anzahl der Glieder, oder die halbe Summe der beiden äußersten Glieder mit der Anzahl der Glieder multiplicirt.

Zusatz.

1. Sei $m < n$, so ist

$$S_n - S_m = (u_1 + u_n) \cdot \frac{n}{2} - (u_1 + u_m) \cdot \frac{m}{2},$$

$$\text{oder } S_n - S_m = \frac{n-m}{2} \cdot u_1 + \frac{n}{2} \cdot u_n - \frac{m}{2} \cdot u_m,$$

oder weil

$$u_n = u_1 + (n-1)\delta \text{ und } u_m = u_1 + (m-1)\delta \text{ ist,}$$

$$S_n - S_m = \frac{n-m}{2} \cdot u_1 + \frac{n}{2} \cdot u_1 + \frac{n}{2}(n-1)\delta - \frac{m}{2} \cdot u_1 - \frac{m}{2}(m-1)\delta$$

$$= (n-m)u_1 + \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}\right] \cdot \delta$$

$$= (n-m)u_1 + \frac{(n-m)(n+m-1)}{2}\delta,$$

durch welche Formel man die Summe der Progression vom $(m+1)^{\text{ten}}$ bis zum n^{ten} Gliede erhält.

2. Man findet ferner $S_n - S_{n-1} = u_n$; folglich läßt sich aus der Summenformel das allgemeine Glied der arithmetischen Progression durch eine ganz einfache Rechnung ableiten.

Beispiele.

I.) Man bestimme die Summe folgender Progression:

$$\div 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots (n-1) \cdot n.$$

Hier ist $u_1 = 1$, $\delta = 1$ und $u_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$, also

$$S_n = \frac{(1+n)\,n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

II.) Welches ist die Summe der Progression

$$\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)?$$

Hier ist wieder $u_1 = 1$, $\delta = 2$, $u_n = 1 + (n-1)\,2 = 2n - 1$, daher

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1)\,n}{2} = n^2.$$

III.) Man soll die Summe der Progression

$$\div 0 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2n-2)$$

bestimmen.

Hier ist $u_1 = 0$, $\delta = 2$, $u_n = 2\,(n-1)$, folglich

$$S_n = \frac{2\,(n-1)\,n}{2} = n\,(n-1).$$

Substituirt man in der Formel $S_n = (u_1 + u_n) \cdot \frac{n}{2}$ statt u_n den Werth $u_1 + (n-1)\,\delta$, so findet man

$$S_n = [u_1 + u_1 + (n-1)\,\delta]\,\frac{n}{2} = [2u_1 + (n-1)\,\delta]\,\frac{n}{2} = nu_1 + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\delta.$$

§. 251.

Die beiden Formeln

$$\text{I.)}\; u_n = u_1 + (n-1)\,\delta \quad \text{und} \quad \text{II.)}\; S_n = \frac{(u_1 + u_n)\,n}{2}$$

enthalten die fünf unbestimmten Größen u_1, δ, u_n, n und S_n. Sind nun drei von jenen fünf Größen gegeben, so können die zwei andern mit Hülfe jener Formeln bestimmt werden. Durch Elimination von u_n haben wir schon im vorigen Paragraphe die Gleichung

$$\text{III.)}\; S_n = nu_1 + \frac{n\,(n-1)\,\delta}{2}$$

gefunden. Substituirt man nun den Werth für u_1 aus I. in der Gleichung II., so findet man $2S_n = [u_n - (n-1)\,\delta + u_n]\,n$, oder

$$\text{IV.)}\; S_n = nu_n - \frac{n\,(n-1)}{2}\,\delta,$$

und aus I.) folgt ferner $n = \frac{u_n - u_1 + \delta}{\delta}$, welcher Werth in II.) gesetzt, folgende Gleichung gibt:

$$\text{V.)}\quad S_n = \frac{(u_1 + u_n)}{2} \cdot \frac{(u_n - u_1 + \delta)}{\delta}.$$

Man sieht hier, daß jede der fünf unbestimmten Größen in vier verschiedenen Gleichungen vorkomme, und demnach läßt sich auch jede derselben auf vier verschiedene Arten ausdrücken, wodurch wir 20 Gleichungen bilden können, deren Ableitung wir dem Fleiße des Anfängers überlassen.

Zusatz.

Da von den fünf Größen u_1, δ, u_n, n, S_n immer drei gegeben sein müssen, um die zwei andern aus den beiden Hauptgleichungen $u_n = u_1 + (n-1)\delta$ und $S_n = (u_1 + u_n)\frac{n}{2}$ bestimmen zu können, und weil sich fünf Größen zu zweien nur $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ mal, d. i. 10mal verbinden lassen, so sind überhaupt nur 10 verschiedene Probleme möglich.

§. 252.

Aufgabe.

Die Summe der gleichnamigen Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe zu berechnen, wenn die beiden äußersten Glieder und die Differenz der Reihe bekannt sind.

Auflösung.

Sei

$$\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots \cdot k \cdot l$$

eine arithmetische Progression von n Gliedern, deren beständige Differenz $b - a = c - b = d - c = \ldots = l - k = \delta$ und a und l gegeben; man verlangt die Summe Σ_r der r^{ten} Potenzen der Glieder jener Reihe, nämlich

$$\Sigma_r = a^r + b^r + c^r + \ldots + k^r + l^r.$$

Zu diesem Ende setzen wir

$$a^{r+1} = a^{r+1}$$

$$b^{r+1} = (a+\delta)^{r+1} = a^{r+1} + \binom{r+1}{1}\delta a^r + \binom{r+1}{2}\delta^2 a^{r-1} + \binom{r+1}{3}\delta^3 a^{r-2} + \ldots$$

$$c^{r+1} = (b + \delta)^{r+1} = b^{r+1} + \binom{r+1}{1} \delta b^r + \binom{r+1}{2} \delta^2 b^{r-1} + \binom{r+1}{3} \delta^3 b^{r-2} + \ldots$$

$$d^{r+1} = (c + d)^{r+1} = c^{r+1} + \binom{r+1}{1} \delta c^r + \binom{r+1}{2} \delta^2 c^{r-1} + \binom{r+1}{3} \delta^3 c^{r-2} + \ldots$$

. . . .

$$l^{r+1} = (k + \delta)^{r+1} = k^{r+1} + \binom{r+1}{1} \delta k^r + \binom{r+1}{2} \delta^2 k^{r-1} + \binom{r+1}{3} \delta^3 k^{r-2} + \ldots$$

Summiren wir dieses ganze System von Gleichungen und nehmen mit Rücksicht auf die gewählte Bezeichnung die in vertikaler Richtung stehenden Theile zusammen, so erhalten wir folgende allgemeine Gleichung

$$\Sigma_{r+1} = a^{r+1} + [\Sigma_{r+1} - l^{r+1}] + \binom{r+1}{1} \delta [\Sigma_r - l^r] + \binom{r+1}{2} \delta^2 [\Sigma_{r-1} - l^{r-1}] + \binom{r+1}{3} \delta^3 [\Sigma_{r-2} - l^{r-2}] + \ldots$$

und hieraus folgt

$$\frac{l^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)\delta} = \Sigma_r - l^r + \frac{r}{2} \delta [\Sigma_{r-1} - l^{r-1}] + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \delta^2 [\Sigma_{r-2} - l^{r-2}] + \ldots$$

folglich erhält man

$$\Sigma_r = \frac{l^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)\delta} + l^r - \tfrac{1}{2} \binom{r}{1} \delta [\Sigma_{r-1} - l^{r-1}] - \tfrac{1}{3} \binom{r}{2} \delta^2 [\Sigma_{r-2} - l^{r-2}] - \tfrac{1}{4} \binom{r}{3} \delta^3 [\Sigma_{r-3} - l^{r-3}] - \ldots \odot$$

woraus durch eine leichte Rechnung die Werthe von Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 ... bestimmt werden können.

Zusatz.

Will man die Summen der r^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 .... (n — 1), n berechnen, so hat man in der Gleichung ($\odot$) nur $a = 1$, $\delta = 1$ und $l = n$ zu setzen, und man findet dann

$$\Sigma_r = 1^r + 2^r + 3^r + 4^r + \ldots + (n-1)^r + n^r$$
$$= \frac{n^{r+1}-1}{r+1} + n^r - \tfrac{1}{2}\binom{r}{1}[\Sigma_{r-1} - n^{r-1}] -$$
$$- \tfrac{1}{3}\binom{r}{2}[\Sigma_{r-2} - n^{r-2}] - \tfrac{1}{4}\binom{r}{3}[\Sigma_{r-3} - n^{r-3}] - \ldots (\mathfrak{C})$$

in welcher Gleichung statt r successive nur die Werthe 0, 1, 2, 3, 4... gesetzt werden dürfen, um Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 ... zu erhalten.

§. 253.

Anwendung auf die Auflösung einiger Aufgaben.

I.) Es setzt jemand in die Lotterie $\frac{1}{2}$ fl., und verliert. Das zweite Mal setzt er 1 fl., das dritte Mal $1\frac{1}{2}$ fl., und so immer um $\frac{1}{2}$ fl. mehr. Wenn er nun auf diese Art 40 Mal setzt und verspielt, wie viel hat er im Ganzen verspielt, und wie viel hat er das letzte Mal gesetzt?

Hier ist $u_1 = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{2}$, $n = 40$, und man findet

$$\Sigma_n = \tfrac{1}{2} \cdot 40 + \frac{40\,(40-1)}{2} \times \tfrac{1}{2} = 20 + 10 \cdot 39 = 410 \text{ fl.}$$

$$\text{und } u_n = \tfrac{1}{2} + (40-1)\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{39}{2} = 20 \text{ fl.}$$

II.) Auf einem Dache liegen 3825 Ziegeln. In der obersten Reihe liegen 3, und in jeder folgenden Reihe 3 mehr als in der vorhergehenden. Wie viel Reihen liegen auf dem Dache, und wie viel Ziegeln liegen auf der letzten Reihe?

Hier ist $\Sigma_n = 3825$, $u_1 = 3$, $\delta = 3$. Man findet durch eine leichte Rechnung $n = 50$ und $u_n = 150$.

III.) Ein Bergmann versprach seinen Bergleuten bei Anlegung eines Schachtes für die erste Klafter in die Länge 10 Gulden, und für jede folgende Klafter, wegen immer schwererer Arbeit 1 fl. mehr, und so mußte er für die letzte Klafter 109 fl. zahlen. Wie viel mußte er im Ganzen zahlen, und wie lang war der Schacht?

Hier ist gegeben $u_1 = 10$, $\delta = 1$ und $u_n = 109$. Eine einfache Rechnung gibt $n = 100^0$ und $S_n = 5950$ fl.

§. 254.

Von den vieleckigen oder Polygonal-Zahlen.

Setzt man in der allgemeinen Formel für die arithmetischen Progressionen $u_1 = 1$, so erhält man

$$\div\ 1 \,.\, (1+\delta) \,.\, (1+2\delta) \,.\, (1+3\delta) \ldots [1+(n-1)\delta].$$

Sucht man nach und nach die Summe von 1, 2, 3, 4, . . . Gliedern dieser Progression, so findet man folgende Reihe von Größen:

$$\text{A. } 1,\ 2+\delta,\ 3+3\delta,\ 4+6\delta,\ 5+10\delta,\ 6+15\delta, \ldots \left(n+\frac{n(n-1)}{2}\delta\right).$$

Setzt man nun in dieser Reihe successive $\delta=1$, $\delta=2$, $\delta=3$, $\delta=4$ u. s. f., so erhält man nachstehende verschiedene Zahlenreihen:

$$\text{I.) } 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{II.) } 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36, \ldots n^2,$$

$$\text{III.) } 1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51, \ldots \frac{n(3n-1)}{2},$$

$$\text{IV.) } 1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ 66, \ldots n(2n-1),$$

u. s. w.,

welche man allgemein Reihen der figurirten, Polygonal- oder vieleckigen Zahlen zu nennen pflegt. Die Zahlen der Reihe I. nennt man dreieckige Zahlen oder Triangularzahlen, weil sich so viele Puncte, als eine solche Zahl Einheiten hat, immer in der Form von Dreiecken darstellen lassen. Z. B.:

1, 3, 6, 10, . . .



u. s. f.

Aus ähnlichem Grunde heißen die Zahlen der Reihe II. viereckige, Tetragonal- oder Quadratzahlen, weil sich immer so viele Punkte, als eine dieser Zahlen Einheiten enthält, durch Quadrate, oder regelmäßige Vierecke darstellen lassen.

Nun wird man leicht einsehen, warum man die Zahlen der Reihe III. fünfeckige, oder Pentagonalzahlen, und jene der Reihe IV. sechseckige oder Hexagonalzahlen nennt.

Wir haben demnach folgende allgemeine Formeln, wenn wir im allgemeinen Gliede $n+\frac{n(n-1)}{2}\delta$ nach und nach $\delta=1$, $=2$, $=3$, $=4$, ... setzen;

a) für die Dreiecks-Zahlen $\frac{n(n+1)}{2}$,

b) „ „ Vierecks- „ n^2,

c) „ „ Fünfecks- „ $\frac{3n^2-1.n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$,

d) „ „ Sechsecks- „ $\frac{4n^2-2n}{2}=n(2n-1)$,

e) für die Siebenecks-Zahlen $\frac{5n^2 - 3n}{2} = \frac{n(5n - 3)}{2}$,

f) „ „ Achtecks- „ $\frac{6n^2 - 4n}{2} = n(3n - 2)$,

g) „ „ Neunecks- „ $\frac{7n^2 - 5n}{2} = \frac{n(7n - 5)}{2}$,

h) „ „ Zehnecks- „ $\frac{8n^2 - 6n}{2} = n(4n - 3)$,

und allgemein N ecks- „ $\frac{(N - 2)n^2 - (N - 4)n}{2}$,

wo N die Anzahl der Winkel bezeichnet, nach welcher das Vieleck (Polygon) benannt wird, und wo n die Zahl ausdrückt, die anzeigt, die wievielste eine figurirte Zahl in der Ordnung ihrer Art sei. Z. B. wenn die 20ste zwölfeckige Zahl verlangt würde, so setze man in der Formel $\frac{(N - 2)n^2 - (N - 4)n}{2}$ nur $N = 12$ und $n = 20$, und man findet

$$x = \frac{(12 - 2)20^2 - (12 - 4)20}{2} = \frac{10.20^2 - 8.20}{2} = 5.400 - 4.20 = 1920.$$

Zweites Kapitel.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 255.

Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, von welchen jede nächstfolgende durch die vorhergehende dividirt, immer denselben Quotienten gibt (§. 246). So bilden z. B. die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... und 625, 125, 25, 5, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, ... geometrische Reihen, weil man bei der ersten Reihe immer den Quotienten 2, und bei der zweiten den beständigen Quotienten $\frac{1}{5}$ findet, wenn man irgend ein Glied durch das unmittelbar vorhergehende dividirt. Hieraus folgt nun von selbst, daß jedes Glied der Progression erhalten werde, wenn man das nächst vorhergehende mit jenem beständigen Quotienten (oder Exponenten) der Reihe multiplicirt.

Ist daher das erste Glied u_1, und der beständige Quotient q gegeben, so kann die Progression nach Belieben fortgesetzt werden, und man erhält als allgemeinen Ausdruck einer geometrischen Reihe:

Indices,	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Glieder,	u_1,	$u_1 q$,	$u_1 q^2$,	$u_1 q^3$,	$u_1 q^4$,	$u_1 q^5$, . . .

wo $q > 1$ oder < 1 sein wird, je nachdem die Progression steigend oder fallend ist (§. 246).

Ein wenig Aufmerksamkeit zeigt, daß jedes Glied der Progression ein Produkt aus dem ersten Gliede in jene Potenz des Quotienten der Reihe sei, deren Exponent um eine Einheit kleiner ist, als der Index des Gliedes. Dieß zeigt sich auch schon beim ersten Gliede $u_1 = u_1 \cdot q^0$. Bezeichnen wir nun das nte Glied der Progression mit u_n; so ist das allgemeine Glied

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$$

Die geometrische Progression wird allgemein auf folgende Art bezeichnet:

$$\div\!\div u_1 \div u_1 q \div u_1 q^2 \div u_1 q^3 \div u_1 q^4 \div \ldots \div u_1 q^{n-2} \div u_1 q^{n-1}$$

oder auch bloß durch

$$\div\!\div u_1, u_1 q, u_1 q^2, u_1 q^3, \ldots$$

Aus der Gleichung $u_n = u_1 q^{n-1}$ erhält man

$$u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}} \text{ und } q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}.$$

Die Gleichung $u_n = u_1 q^{n-1}$ ist die independente, die Formel $u_n = u_{n-1} q$ aber die recurrirende Form des allgemeinen Gliedes einer jeden geometrischen Progression. Schreibt man $n - 1$ statt n in der Gleichung $u_n = u_1 q^{n-1}$, so erhält man $u_{n-1} = u_1 q^{n-2}$, folglich $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_1 q^{n-1}}{u_1 q^{n-2}} = q$, mithin $u_n = u_{n-1} q$. Es läßt sich demnach aus der independenten Form des allgemeinen Gliedes die Recursionsformel ableiten.

§. 256.

a) Weil $u_1 \div u_1 q = u_1 q \div u_1 q^2 = u_1 q^2 \div u_1 q^3 = \ldots.$, so sieht man, daß jedes Glied der geometrischen Reihe die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem vorhergehenden und nachfolgenden Gliede sei.

b) Bezeichnet man das erste Glied einer geometrischen Progression mit u_1, das zweite mit u_2, das pte mit u_p, und den Exponenten mit q, so ist

$$u_1 : u_2 = u_1 : u_1 q, \text{ oder}$$
$$u_1 : u_2 = 1 : q, \text{ also auch}$$
$$u_1^{p-1} : u_2^{p-1} = 1 : q^{p-1} \text{ (§. 183), oder}$$
$$u_1^{p-1} : u_2^{p-1} = u_1 : u_1 q^{p-1}, \text{ d. i.}$$
$$u_1^{p-1} : u_2^{p-1} = u_1 : u_p, \text{ oder}$$
$$u_1 : u_p = u_1^{p-1} : u_2^{p-1};$$

d. h. in jeder geometrischen Progression verhält sich das erste Glied zum pten, wie die $(p-1)$te Potenz des ersten Gliedes zu derselben Potenz des zweiten Gliedes.

Sind demnach die beiden ersten Glieder einer Progression gegeben, so kann jedes beliebige andere Glied gefunden werden.

c) Wenn in einer geometrischen Reihe a, t, v, z gleichweit abstehende Glieder bezeichnen, und es ist $t = a q^{p-1}$, also $v = t \,.\, q^{p-1}$ und $z = v \,.\, q^{p-1}$, so verhält sich $a : t = v : z$, denn es ist durch Substitution $a : a q^{p-1} = v : v q^{p-1}$.

Hieraus folgt nun, daß das Produkt der beiden äußersten Glieder einer begrenzten geometrischen Reihe gleich sei dem Produkte aus je zwei andern Gliedern, von welchen das eine so weit vom ersten, als das andere vom letzten absteht. Denn es sei u_r das rte Glied von der Linken gegen die Rechte gezählt, und $_r u$ das rte Glied von der Rechten gegen die Linke, so gehen dem $_r u$ offenbar $n - r$ Glieder voran, wenn n der Zeiger des letzten Gliedes ist, oder es ist $_r u$ das $(n - r + 1)$te Glied vom ersten an gerechnet, und daher

$$_r u = u_{n-r+1} = u_1 q^{n-r}, \text{ folglich}$$
$$u_r \,.\, {}_r u = u_1 q^{r-1} \,.\, u_1 q^{n-r} = u_1^2 q^{n-1};$$

aber es ist auch

$$u_1 \,.\, u_n = u_1 \,.\, u_1 q^{n-1} = u_1^2 \,.\, q^{n-1}, \text{ also}$$
$$u_r \,.\, {}_r u = u_1 \,.\, u_n.$$

§. 257.

Aufgabe.

Zwischen zwei Zahlen a und b sollen r mittlere geometrische Proportionalen interpolirt oder eingeschaltet werden, d. i. r Zahlen, welche mit den gegebenen a und b eine geometrische Progression bilden.

Auflösung.

Da r Glieder eingeschaltet werden sollen, so besteht die ganze Progression aus (r + 2) Gliedern, weil zu jenen Gliedern die beiden gegebenen hinzu gezählt werden müssen. Das erste Glied der Reihe ist a, und das letzte $b = a \cdot q^{r+1}$.

Aus dieser Gleichung folgt $q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}$, und demnach erhält man die Progression:

$$\div\!\!\div\, a \div a\sqrt[r+1]{\frac{b}{a}} \div a\sqrt[r+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} \div a\sqrt[r+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^3} \div \ldots \div a\sqrt[r+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^r} \div b$$

oder

$$\div\!\!\div\, a \div \sqrt[r+1]{a^r b} \div \sqrt[r+1]{a^{r-1} b^2} \div \sqrt[r+1]{a^{r-2} b^3} \div \ldots \div \sqrt[r+1]{a\, b^r} \div b.$$

Sollten z. B. zwischen 1 und 729 fünf Glieder eingeschaltet werden, so setze man $a = 1$, $r = 5$ und $b = 729$, so ist

$$q = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt{9} = 3, \text{ mithin}$$

$$\div\!\!\div\, 1 \div 3^1 \div 3^2 \div 3^3 \div 3^4 \div 3^5 \div 729,$$

oder

$$\div\!\!\div\, 1 \div 3 \div 9 \div 27 \div 81 \div 243 \div 729.$$

Sollten zwischen 1 und $\frac{1}{16}$ drei Glieder eingeschaltet werden, so ist

$$\tfrac{1}{16} = 1 \cdot q^{r-1} = q^{5-1} = q^4, \text{ also}$$

$$q = \sqrt[4]{\tfrac{1}{16}} = \tfrac{1}{2}, \text{ daher die verlangte Reihe}$$

$$\div\!\!\div\, 1 \div \tfrac{1}{2} \div \tfrac{1}{4} \div \tfrac{1}{8} \div \tfrac{1}{16}.$$

Zusatz.

Interpolirt man zwischen je zwei Gliedern einer geometrischen Progression

$$\div\!\!\div\, 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ a^n,\ a^{n+1},\ \ldots$$

(r — 1) Glieder, so findet man den Quotienten $x = \sqrt[r]{a}$, und die neue (interpolirte) Reihe ist:

$$\div\!\!\div\, 1,\ \sqrt[r]{a},\ \sqrt[r]{a^2},\ \sqrt[r]{a^3},\ \ldots\ \sqrt[r]{a^{r-1}},\ a,\ a\sqrt[r]{a}\ \ldots,$$

oder

$$\div\!\!\div\, 1,\ a^{\frac{1}{r}},\ a^{\frac{2}{r}},\ a^{\frac{3}{r}},\ \ldots\ a^{\frac{r-1}{r}},\ a^{\frac{r}{r}},\ a^{\frac{r+1}{r}},\ \ldots\ a^{\frac{n-1}{r}},\ a^{\frac{n}{r}},\ a^{\frac{n+1}{r}},\ \ldots$$

mithin $a^{\frac{n}{r}}$, oder die Wurzelgröße $\sqrt[r]{a^n}$ das nte eingeschaltete Glied der Reihe, welche aus der angeführten Progression entsteht, wenn man zwischen je zwei Glieder derselben $r - 1$ Glieder interpolirt, wodurch die Bezeichnung dieser Wurzelgröße durch $a^{\frac{n}{r}}$ gerechtfertigt wird. Daß man aber die Progression $\div\!\!\div 1, a, a^2, a^3, \ldots$ auch rückwärts fortgesetzt denken kann, versteht sich von selbst. — Man gibt den interpolirten Gliedern sehr schicklich gebrochene Zeiger. Kommen nämlich zwischen die Glieder u_n und u_{n+1}, $(r - 1)$ neue Glieder, so werden diese durch die Zeichen

$$u_{n+\frac{1}{r}},\ u_{n+\frac{2}{r}},\ u_{n+\frac{3}{r}},\ u_{n+\frac{4}{r}},\ \ldots\ u_{n+\frac{r-1}{r}}$$

dargestellt, an welche sich die Zeichen u_n und u_{n+1} sehr gut anschließen, weil $u_n = u_{n+\frac{0}{r}}$ und $u_{n+1} = u_{n+\frac{r}{r}}$ ist.

§. 258.

Aufgabe.

Die Summe der geometrischen Reihe

$$\div\!\!\div a, b, c, d, \ldots w, x, y, z,$$

welche n Glieder haben mag, zu bestimmen.

Auflösung.

1. Es sei

$$s = a + b + c + d + \ldots + w + x + y + z.$$

Da nun

$$a:b = b:c = c:d = \ldots = w:x = x:y = y:z,$$

so ist auch

$$(a+b+c+d+\ldots+w+x+y):(b+c+d+\ldots+w+x+y+z) = a:b$$

(§. 170), und weil

$$a + b + c + d + \ldots + w + x + y = s - z \text{ und}$$
$$b + c + d + \ldots + w + x + y + z = s - a,$$

so ist auch durch Substitution

$$s - z : s - a = a:b = a:aq = 1:q,$$

wenn $\frac{b}{a} = q$ gesetzt wird. Daher ist $(s - z)\,q = s - a$, woraus $s = \frac{qz - a}{q - 1}$ gefunden wird.

2. Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende Art: Man multiplicire die Gleichung:

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

mit q, so ist

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n,$$

und hiervon die erstere Gleichung abgezogen, erhält man

$$s(q-1) = -a + aq^n = a(q^n - 1),$$

folglich

$$s = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{q \,.\, aq^{n-1} - a}{q-1} = \frac{q \,.\, z - a}{q-1} \text{ wie vorhin.}$$

§. 259.

1. Setzt man das erste Glied $a = 1$, und den Quotienten $= q$, so erhält man die geometrische Reihe

$$\div\!\div\; 1 \div q \div q^2 \div q^3 \div q^4 \div \ldots \div q^{n-2} \div q^{n-1},$$

deren Summe $s = \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Beispiele.

1. Setzt man $q = 2$, so ist

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} \text{ oder}$$

$$s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1},$$

$$\text{demnach } s = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Eben so wird für $q = 3$,

$$s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-2} + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2},$$

und für $q = 4$ wird

$$s = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

Für $q = 1$ wird

$$s = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1,$$

und durch Substitution in der Summenformel wird

$$s = \frac{1-1}{1-1} = \tfrac{0}{0},$$

welches wieder ein Zeichen der Unbestimmtheit ist. Da aber hier die Einheit n mal zu sich selbst addirt worden ist, so muß nothwendig $s = n \,.\, 1 = n$ und daher $s = \frac{0}{0} = n$ sein.

Aus der Formel

$$s = \frac{a \,.\, q^n - a}{q - 1} = a \,.\, \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \,.\, \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

findet man durch wirkliche Division

$$s = a\,(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n-1})$$
$$= a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1},$$

d. i. man findet wieder die Reihe, durch deren Summation jener Ausdruck entstanden ist.

2. Soll man die Progression

$$\div\!\div\, 1 \div \frac{1}{p} \div \frac{1}{p^2} \div \frac{1}{p^3} \div \ldots \div \frac{1}{p^{n-1}}$$

summiren, so setze man in der Formel $s = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ nur $q = \frac{1}{p}$, so wird

$$s = \frac{\frac{1}{p^n} - 1}{\frac{1}{p} - 1} = \frac{1 - p^n}{p^n} : \frac{1 - p}{p} = \frac{1 - p^n}{p^{n-1}\,(1 - p)} = \frac{p^n - 1}{p^{n-1}\,(p - 1)}$$

$$= \frac{p^n}{p^{n-1}\,(p - 1)} - \frac{1}{p^{n-1}\,(p - 1)} = \frac{p}{p - 1} - \frac{1}{p^{n-1}\,(p - 1)}.$$

Je größer nun p und n werden, desto kleiner wird der Bruch $\frac{1}{p^{n-1}\,(p - 1)}$, und desto mehr nähert sich s dem Werthe von $\frac{p}{p - 1}$, so daß man, wenn n sehr groß wird, $s = \frac{p}{p - 1}$ ohne bedeutenden Fehler setzen kann.

So z. B. ist

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}$$
$$= \frac{10}{10 - 1} - \frac{1}{10^{n-1}\,(10 - 1)} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9 \,.\, 10^{n-1}}.$$

Wäre nun $n = 7$, und man setzte $s = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$, so würde man nur einen Fehler $= \frac{1}{9 \,.\, 10^6} = 0{\cdot}00000011\ \ldots$ begehen, der in der Ausübung $= 0$ gesetzt werden kann.

Aus der Gleichung

$$s = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots + \frac{1}{p^{n-1}} \text{ folgt}$$

$$s - 1 = s' = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^{n-1}} = \frac{p^n - 1}{p^{n-1}(p-1)} - 1 \text{ (Nr. 2)}$$

$$= \frac{p^n - 1 - p^{n-1}(p-1)}{p^{n-1}(p-1)} = \frac{p^{n-1} - 1}{p^{n-1}(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}.$$

4. Geht die Reihe ohne Ende fort, d. i. wird n unendlich groß ($n = \infty$), so wird der Bruch

$$\frac{1}{p^{n-1}(p-1)} = \frac{1}{p^{n-1}} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^{\infty-1}} \cdot \frac{1}{p-1} = 0 \cdot \frac{1}{p-1} = 0,$$

das ist verschwindend oder unendlich klein, und demnach $s' = \frac{1}{p-1}$.

In diesem Falle wird also

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \ldots \text{ ohne Ende} = \frac{1}{p-1}.$$

So z. B. ist

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2-1} = 1,$$

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{3-1} = \tfrac{1}{2},$$

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} + \ldots = \frac{1}{4-1} = \tfrac{1}{3} \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots = \frac{1}{10-1} = \tfrac{1}{9}.$$

Ist $S = \frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^3} + \frac{a}{p^4} + \ldots$ ohne Ende, so ist

$$S = a\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \ldots\right) = a \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{a}{p-1}.$$

Es sei z. B. $S = 0{\cdot}636363\ldots = \frac{63}{10^2} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} + \ldots$ Man setze $a = 63$ und $p = 10^2$, so wird $s = \frac{63}{10^2 - 1} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$.

Wenn S_n die Summe der Reihe $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{m-1}, u_m, u_{m+1}, \ldots u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \ldots$ vom ersten bis einschließlich dem nten Gliede bezeichnet, so ist $S_{m-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{m-1}$ die Summe der ersten $(m-1)$ Glieder und daher

$$S_n - S_{m-1} = u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

die Summe der Reihe vom mten bis nten Gliede, welche wir durch $S_{m,n} = S_n - S_{m-1}$ bezeichnen wollen. — Für $m = n - 1$ wird daher $S_{n-1,n} = S_n - S_{n-1} = u_n$.

Diese Gleichung lehrt uns, das allgemeine Glied einer Reihe mit Hülfe der Summenformel auf eine höchst einfache Art zu berechnen.

Die Auflösung des umgekehrten Problemes, aus dem allgemeinen Gliede die Summenformel abzuleiten, nennt man die **Summirung** der Reihen; diese Auflösung ist aber gewöhnlich mit großen Schwierigkeiten verbunden.

b) Ist die Summe einer Reihe

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$

so beschaffen, daß sie sich einer bestimmten Grenze G ohne Ende nähert, wenn n ohne Ende wächst, so kann man ohne merklichen Fehler

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = G$$

setzen, oder G als die Summe der Reihe betrachten. Eine Reihe, welche so beschaffen ist, daß man sich bei dem Addiren ihrer Anfangsglieder einer bestimmten Größe um so mehr nähert, je mehr solche Glieder in Anspruch genommen werden, heißt eine **summirbare** Reihe, oder man sagt, die Reihe **convergire**, oder sei **convergent**, und beurtheilt den Grad der Convergenz nach der Genauigkeit, mit welcher sich der Grenzwerth G durch die Addition einiger weniger Anfangsglieder erreichen läßt. Solche convergente Reihen sind die in Nr. 4 angeführten Progressionen.

Man betrachtet in der Analysis eine Größe als berechnet, wenn man dieselbe als eine convergente Reihe dargestellt hat, weil man durch eine solche Reihe eine bestimmte Größe G darzustellen im Stande ist.

Nähert sich aber die Summe einer Reihe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

bei dem unendlichen Wachsen von n keiner fixen Grenze, sondern wird S_n selbst unendlich groß, oder schwankt die Summe S_n zwischen zwei bestimmten Größen, so heißt die Reihe **divergent**, und ist demnach auch nicht fähig, eine bestimmte Größe zu bezeichnen, denn sie ist **nicht summirbar**. Solche divergente Reihen sind alle ohne Ende fortlaufende geometrische Progressionen, bei welchen der Quotient $q \overline{\overline{>}} 1$ ist; z. B.

$$a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots \text{ ohne Ende,}$$

und

$$b + b + b + b + \ldots \text{ ohne Ende.}$$

Bei der Reihe

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{ ohne Ende}$$

schwankt die Summe zwischen den Werthen a und 0 oder sie wird $= a$ oder $= 0$, je nachdem man eine ungerade oder eine gerade An-

zahl von Gliedern nimmt. Eine solche Reihe kann demnach keine bestimmte Größe bezeichnen.

§. 260.

In den Gleichungen I) $u_n = u_1 q^{n-1}$ (§. 255) und II) $S_n = \frac{q u_n - n_1}{q-1}$ (§. 258) kommen fünf verschiedene Größen vor, nämlich u_1, q, n, u_n und S_n. Sind demnach drei von diesen Größen gegeben, so können die beiden andern mit Hülfe der angeführten Gleichungen bestimmt werden. Jedoch wird man in einigen Fällen auf Gleichungen stoßen, die wir entweder erst in der Folge mit Hülfe der Logarithmen aufzulösen im Stande sein werden, oder die sich nur nach der Theorie der höheren Gleichungen auflösen lassen, und also außer den Grenzen dieses Lehrbuches liegen.

Substituirt man den Werth für u_n aus I. in II., so wird

$$\text{III.)}\ S_n = \frac{u_1 q^n - u_1}{q-1} = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Aus I. folgt ferner $u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}}$ und dieser Werth in II. gesetzt gibt

$$\text{IV.)}\ S_n = \frac{q u_n - \frac{u_n}{q^{n-1}}}{q-1} = \frac{u_n(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}.$$

Endlich folgt aus I.) $q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}$, und dieser Werth in II.) gesetzt, gibt

$$\text{V.)}\ S_n\left(\sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}} - 1\right) = u_n \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}} - u_1.$$

Jede dieser fünf Gleichungen erhält vier verschiedene Größen, und demnach kann jede derselben durch die drei andern ausgedrückt werden, wodurch man, so wie §. 251, zwanzig verschiedene Gleichungen erhält, deren Aufsuchung dem eigenen Fleiße des Anfängers überlassen bleibt.

Da sich fünf Größen zu zweien 10mal verbinden lassen, so sind auch hier wieder nur 10 verschiedene Fälle möglich, die aus nachstehendem Schema zu ersehen sind:

Nr.	Gegeben.	Gesucht.
1	u_1, q, n	u_n, S_n
2	u_1, q, u_n	n, S_n
3	u_1, q, S_n	n, u_n
4	u_1, n, u_n	q, S_n
5	u_1, n, S_n	q, u_n
6	u_1, u_n, S_n	n, q
7	n, q, u_n	u_1, S_n
8	n, q, S_n	u_1, u_n
9	q, u_n, S_n	u_1, n
10	n, u_n, S_n	u_1, q,

wobei u_1 das erste, u_n das letzte Glied, q den Quotienten, n die Anzahl der Glieder, und S_n die Summe der geometrischen Reihe von n Gliedern bezeichnet.

Beispiel.

Es gewann ein junger Mensch 3 fl., mit denen er einen kleinen Handel anfing, und war so glücklich, seine Summe am Ende eines jeden Jahres verdoppelt zu sehen. Wie reich war er wohl nach Verlauf von 12 Jahren?

Hier ist $u_1 = 3$, $q = 2$ und $n = 12$, also durch Substitution

$$s = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 3\,(2^{12} - 1) = 3 \cdot 4095 = 12285.$$

§. 261.

Aufgabe.

Die Summe der Progression

$$a - am + am^2 - am^3 + am^4 - am^5 + \ldots \pm am^{n-1}$$

zu bestimmen.

Auflösung.

1. Setzt man in der Summenformel $S_n = \frac{q u_n - u_1}{q - 1}$ für unsern Fall $q = -m$ und $u_n = \pm a m^{n-1}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n ungerade oder gerade ist; so wird

$$S_n = \frac{-m \cdot \pm am^{n-1} - a}{-m - 1} = \frac{a \pm am^n}{m + 1} = a\left(\frac{1 \pm m^n}{m + 1}\right).$$

2. Es ist

$$a - am + am^2 - am^3 + \ldots \pm am^{n-1}$$
$$= (a + am^2 + am^4 + \ldots) - m\,(a + am^2 + am^4 + \ldots) = s' - s''.$$

Ist nun n eine ungerade Zahl, z. B. $n = 2\mu + 1$, also $n - 1 = 2\mu$, so ist

$$s' = a\,(1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots + m^{2\mu-2} + m^{2\mu}) \text{ und}$$
$$s'' = am\,(1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots + m^{2\mu-4} + m^{2\mu-2}).$$

Ist aber n eine gerade Zahl, z. B. $n = 2\nu$, so wird das letzte Glied negativ, und dann ist

$$s' = a\,(1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots + m^{2\nu-4} + m^{2\nu-2}) \text{ und}$$
$$s'' = am\,(1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots + m^{2\nu-4} + m^{2\nu-2}),$$

also

$$S_n = s' - s'' = a\,(1 - m)\,(1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots + m^{2\nu-4} + m^{2\nu-2}).$$

Welche Form wird S_n erhalten, wenn $m = \frac{u}{r}$? und welche, wenn $n = \infty$?

Zur Uebung.

Setzt man $m = \frac{-1}{p}$, so wird

$$a - am + am^3 - am^3 + am^4 \ldots = a + \frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^3} + \ldots,$$

also $s = ?$

§. 262.

Erklärung.

Hat man eine Folge von Größen von der Beschaffenheit, daß je drei unmittelbar auf einander folgende harmonisch proportionirt sind; so bilden jene Größen eine *harmonische* Reihe.

Verhält sich z. B.:

$$a : c = b - a : c - b$$
$$b : d = c - b : d - c$$
$$c : e = d - c : e - d$$
$$d : f = e - d : f - c$$

u. s. f.

so bilden die Zahlen $a, b, c, d, e, f \ldots\ldots$ eine *harmonische* Reihe.

Zusatz 1.

Setzt man die hier angegebenen Proportionen zusammen, und denkt sich f als das letzte Glied der harmonischen Reihe a, b, c, ... f; so findet man die Proportion:

$$ab : ef = (b - a) : (f - e)$$

d. h. das Produkt der beiden ersten Glieder verhält sich zum Produkte der beiden letzten Glieder der harmonischen Reihe, wie die Differenz der beiden ersten Glieder zum Unterschiede der beiden letzten Glieder.

Zusatz 2.

Wenn die Zahlen $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_{n-1}, u_n$ eine harmonische Reihe bilden, so ist

$$u_1 : u_3 = (u_2 - u_1) : (u_3 - u_2), \text{ also auch}$$

$$[u_1 + (u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = [u_3 + (u_3 - u_2)] : [u_3 - u_2], \text{ d. i.}$$

$$u_2 : (u_2 - u_1) = (2u_3 - u_2) : (u_3 - u_2), \text{ also auch}$$

$$[u_2 - (u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_3 : (u_3 - u_2),$$

und durch nochmaliges Abziehen

$$[u_2 - 2(u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_2 : (u_3 - u_2) \ldots (\alpha).$$

Eben so ist auch

$$u_2 : (u_3 - u_2) = u_4 : (u_4 - u_3)$$

oder statt des ersten Verhältnisses das gleiche aus (α) gesetzt:

$$[u_2 - 2(u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_4 : (u_4 - u_3)$$

mithin durch Subtraktion

$$[u_2 - 3(u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_3 : (u_4 - u_3) \ldots (\beta).$$

Ferner ist

$$u_3 : (u_4 - u_3) = u_5 : (u_5 - u_4)$$

oder statt des ersten Verhältnisses das ihm gleiche aus (β) gesetzt,

$$[u_2 - 3(u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_5 : (u_5 - u_4)$$

also auch

$$[u_2 - 4(u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_4 : (u_5 - u_4).$$

Ganz auf dieselbe Art findet man

$$[u_2 - 5(u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_5 : (u_6 - u_5)$$

und allgemein

$$[u_2 - (n - 1)(u_2 - u_1)] : (u_2 - u_1) = u_{n-1} : (u_n - u_{n-1})$$

welche Proportion sich leicht mit Worten ausdrücken läßt.

Zusatz 3.

Für die im Zusatz 2 aufgestellte harmonische Reihe ist:

$$u_3 = \frac{u_1 u_2}{2 \cdot u_1 - u_2} = \frac{u_1 u_2}{u_2 - 2(u_2 - u_1)}$$

$$u_4 = \frac{u_2 u_3}{2u_3 - u_3} = \frac{u_2 \cdot \frac{u_1 u_2}{2u_1 - u_2}}{2u_2 - \frac{u_1 u_2}{2u_1 - u_2}} = \frac{u_1 u_2}{3u_1 - 2u_2}$$

oder $u_4 = \frac{u_1 u_2}{u_2 - 3(u_2 - u_1)}$.

Ferner finden wir mit Hülfe dieser beiden Werthe nach einer leichten Rechnung

$$u_5 = \frac{u_3 u_4}{2u_3 - u_4} = \frac{u_1 u_2}{4u_1 - 3u_2} = \frac{u_1 u_2}{u_2 - 4(u_2 - u_1)}$$

u. s. f. und allgemein

$$u_n = \frac{u_{n-2} u_{n-1}}{2n_{n-2} - u_{n-1}} = \frac{u_1 u_2}{(n-1)u_1 - (n-2)u_2} = \frac{u_1 u_2}{u_2 - (n-1)(u_2 - u_1)}.$$

Es läßt sich demnach jedes beliebige Glied u_n einer harmonischen Reihe berechnen, wenn die beiden ersten Glieder derselben gegeben sind.

Eben so leicht kann man den Index n eines gegebenen Gliedes u_n bestimmen, wenn die beiden ersten Glieder der Reihe nach bekannt sind.

Welche Folgerungen lassen sich noch aus der letzten Gleichung ziehen? — Kann der Zeiger n jede Grenze überschreiten, oder ist er an eine fixe Grenze gebunden, und unter welchen Bedingungen wird dieß der Fall sein?

Zusatz 4.

Die obige harmonische Reihe kann nach Zusatz 3 auch auf folgende Art dargestellt werden:

$$\frac{u_1 u_2}{u_2}, \frac{u_1 u_2}{u_2 - 1(u_2 - u_1)}, \frac{u_1 u_2}{u_2 - 2(u_2 - u_1)}, \frac{u_1 u_2}{u_2 - 3(u_2 - u_1)}, \text{ u. s. f.}$$

oder auch auf folgende Art:

$$\frac{u_1 u_2}{u_2}, \frac{u_1 u_2}{u_2 + 1 \cdot (u_1 - u_2)}, \frac{u_1 u_2}{u_2 + 2(u_1 - u_2)}, \frac{u_1 u_2}{u_2 + 3(u_1 - u_2)}, \ldots$$

wobei das Produkt $u_1 u_2$ eine beliebige Zahl bezeichnen kann.

Die Nenner der Glieder unserer Reihe bilden offenbar eine arithmetische Progression, und demnach ergibt sich die merkwürdige Wahrheit, daß, wenn man eine beliebige unveränderliche Zahl durch die auf einander folgenden Glieder einer arithmetischen Progression dividirt, die erhaltenen Quotienten eine harmonische Reihe bilden.

Die reciproken Werthe der Glieder einer arithmetischen Progression bilden daher eine harmonische Reihe.

Jene Glieder einer harmonischen Reihe, welche beziehungsweise gleich weit von einander abstehen, bilden selbst wieder eine harmonische Reihe. Ist nämlich

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots$$

eine harmonische Reihe, so müssen auch die Zahlen

$$u_1, u_{r+1}, u_{2r+1}, u_{3r+1}, u_{4r+1}, \ldots$$

eine harmonische Reihe bilden.

Der fleißige Anfänger wird diese Behauptung ohne Schwierigkeit rechtfertigen.

Drittes Kapitel.

Von den Logarithmen.

---

§. 263.

1. Die verschiedenen Exponenten, welche man einer unveränderlichen (beständigen) Zahl geben muß, um dadurch stufenweise alle möglichen Zahlen zu erhalten, nennt man Logarithmen.

Man denkt sich nämlich alle Zahlen durch Potenziren einer und derselben Größe entstehen, und nennt die Zahlen, welche anzeigen, auf welche Potenz jene beständige Größe erhoben werden muß, um bestimmte Zahlen zu erhalten, die Logarithmen der erzeugten Potenzen. Nimmt man z. B. 2 als jene unveränderliche Größe an, und will man aus ihr die Zahl 256 erzeugen, so hat man die Gleichung $2^x = 256$, und dem Gesagten zur Folge ist x der Logarithmus von 256, welches man kurz so zu schreiben pflegt: $x = \log. 256$, oder $x = l. 256$.

Nun weiß man aber, daß $2^8 = 256$, und daher ist $8 = x = \log. 256$. Eben so würde $6 = \log. 64$ sein, weil $2^6 = 64$.

2. Die unveränderliche Größe g, durch deren Potenziren alle Zahlen erhalten werden sollen, nennt man Grundzahl oder Basis, und die für dieselbe Basis berechneten Logarithmen der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen bilden ein logarithmisches System. — Als Basis aber kann jede beliebige positive Zahl außer der Einheit angenommen werden (denn $1^m = 1$, was auch m für einen Werth haben mag), und daher leuchtet ein, daß unendlich viele verschiedene logarithmische Systeme möglich seien.

Ob und wie es möglich sei, alle denkbaren positiven Zahlen als Potenzen einer und derselben unveränderlichen Zahl darzustellen, werden wir später deutlicher einsehen lernen.

3. Da jede Zahl g als Exponent des geometrischen Verhältnisses $g:1$ betrachtet, also auch g^n (wo n eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bezeichnen mag) als Exponent des Verhältnisses $g^n:1$ angesehen werden kann, so nennt man jene Exponenten der Grundzahl g mit Recht Verhältnißzahlen (Logarithmen — *λογῶν ἀριθμοί*), und das Verhältniß $g:1$ das Grundverhältniß.

4. Es sei allgemein g die Grundzahl eines logarithmischen Systemes und y eine beliebige Zahl, so kann die Gleichung $g^x = y$ (also $x = \log. y$) als allgemeine Formel für alle möglichen Zahlen angesehen werden, in welcher Gleichung x und y von der Art sind, daß jeder bestimmte Werth von x einen zugehörigen von y gibt, oder wo sich die Werthe von x und y wechselweise bestimmen, und also von einander abhängen, oder Funktionen von einander sind.

5. Die Gleichung $x = \log. y$ heißt mit Worten: x ist der Logarithmus der Zahl (numeri) y, und steht also abgekürzt statt $x = \log. \text{num}. y$. Hieraus folgt umgekehrt: $y = \text{num}. \log. x$, oder $y = \text{num}. \log. (= x)$, d. h. y ist eine Zahl (numerus), deren Logarithmus $= x$ ist.

§. 264.

Betrachtungen über die Gleichung $g^x = y$.

I. α) Ist $g > 1$, so muß g^x oder y um so größer werden, je größer x wird. Setzt man nach und nach

$$y = g^0 = 1,\quad y = g^1,\quad y = g^2,\quad y = g^3,\quad y = g^4, \text{ etc.}$$

so erhält man

$$x = 0,\qquad x = 1,\quad x = 2,\quad x = 3,\quad x = 4, \text{ etc.}$$

als die entsprechenden Werthe. Läßt man nun x von 0 bis 1 allmählig wachsen, so erhält man so viele verschiedene Zahlen zwischen 1 und g, als man nur immer will; und gibt man der veränderlichen Größe x alle möglichen Werthe zwischen 1 und 2, so erhält man alle möglichen zwischen g und g^2 liegenden Zahlen. Erhält ferner x successive alle Werthe, die > 2 und < 3 sind, so wächst y von g^2 bis g^3, d. h. dann erhält y alle möglichen Werthe, die $> g^2$ und $< g^3$ sind, u. s. w.

β) Für $x = 0$ wird $y = 1$, daher ist in jedem Systeme $\log. 1 = 0$. Für $x = 1$ wird $y = g$, also $\log. g = 1$, d. i. der Logarithmus der Grundzahl ist in jedem Systeme $= 1$. Wird x unendlich groß, so muß auch y größer werden, als jede angebbare Zahl, oder es ist $g^\infty = \infty$, also $\infty = \log. \infty$, d. i. der Logarithmus einer unendlich großen Zahl ist selbst unendlich groß.

γ) Wird in der Gleichung $g^x = y$ der Exponent x negativ, so erhält man $g^{-x} = y$ oder $y = \frac{1}{g^x}$. Je größer hier x wird, desto kleiner muß y werden, und zwar für

$$x = 0,\ x = -1,\ x = -2,\ x = -3,\ x = -4, \text{ꝛc.}$$

wird,

$$y = 1,\ y = \frac{1}{g},\ y = \frac{1}{g^2},\ y = \frac{1}{g^3},\ y = \frac{1}{g^4}, \text{ꝛc.}$$

Die Werthe zwischen 0 und -1 für x gesetzt geben alle Zahlen zwischen 1 und $\frac{1}{g}$, und die Werthe von x zwischen -1 und -2 geben alle Brüche zwischen $\frac{1}{g}$ und $\frac{1}{g^2}$, so wie man alle Brüche zwischen $\frac{1}{g^2}$ und $\frac{1}{g^3}$ erhält, wenn man x von -2 durch alle möglichen Werthe bis -3 abnehmen läßt.

Da nun durch das Wachsen des negativen x der Werth von y immer kleiner und kleiner wird, so muß y unendlich klein werden, wenn x unendlich groß wird. Nämlich für $x = \infty$ geht die Gleichung $y = g^{-x}$ über in $y = g^{-\infty} = \frac{1}{g^\infty} = 0$; also $-\infty = \log. 0$, d. h. der Logarithmus von Null ist dem negativen Unendlichen gleich. Ich bemerke hier jedoch, daß man diese Nulle nicht für ein absolutes Nichts, sondern als eine verschwindend kleine Größe, d. i. als eine Größe, die kleiner, als jede mögliche angebbare Zahl ist, betrachten

müsse; denn denkt man sich gleichwohl x über alle Vorstellung fortwachsen, so läßt sich doch kein Werth für x denken, der

$$y = g^{-\infty} = \frac{1}{g^{\infty}} = 0,$$

d. i. gleich dem absoluten Nichts hervorbringen könnte.

δ) Aus dem bereits Gesagten ziehen wir folgenden Schluß. Ist die Basis eines logarithmischen Systemes positiv, und > 1, so sind die Logarithmen aller Zahlen, die > 1 sind, ganze oder gebrochene positive Zahlen; die Logarithmen der ächten Brüche aber sind negativ.

II. Ist aber $g > 1$, d. i. ist g ein ächter Bruch, z. B. $\frac{1}{\alpha}$, so lassen sich zwar auch alle möglichen Zahlen durch Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$ darstellen (wiewohl in den meisten Fällen, wie in I., nur näherungsweise), aber das Verhalten wird das umgekehrte des vorigen sein. In diesem Falle hat man die Gleichung

$$y = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x} = \frac{1}{\alpha^{x}} = \alpha^{-x}.$$

Je größer hier x wird, desto kleiner wird y, und umgekehrt. Wird aber x negativ, oder hat man

$$y = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-x} = \alpha^{x},$$

so wird y desto größer, je größer das negative x wird. Daher müssen in diesem Falle die Logarithmen der ächten Brüche positiv, und die Logarithmen aller Zahlen, die > 1 sind, negativ sein.

III. Eine negative Zahl läßt sich nicht als Grundzahl eines logarithmischen Systemes annehmen, weil durch das successive Potenziren derselben bald positive, bald negative Resultate erhalten werden. Es sei z. B. $y = (-2)^x$, nämlich die Grundzahl $g = -2$, so ist für

$x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{4}$, ... $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, ꝛc.

$y = 1$, $y = \sqrt{-2}$, $y = \sqrt[3]{-2}$, $y = \sqrt[4]{-2}$, ... $y = 4$, $y = -8$, $y = 16$, ꝛc.

woraus man sieht, daß für y bald positive, bald negative, bald reelle, bald unmögliche Größen gefunden werden. Dasselbe zeigt sich bei weiterer Untersuchung, wenn man für x negative Werthe annimmt. Hieraus leuchtet nun die Unmöglichkeit ein, alle denkbaren Zahlen durch Potenzen irgend einer negativen ganzen oder gebrochenen Zahl darzustellen.

IV. Auch wird man leicht begreifen, daß die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich seien, weil die Gleichung $g^x = y$ nur positive Werthe gibt, was man auch immer der Variablen x für einen Werth beilegen mag.

§. 265.

1. Wenn in der Gleichung $g^x = a$ der Exponent x einen rationalen Werth hat, welchen wir durch $\frac{m}{n}$ bezeichnen wollen, wo m und n ganze Zahlen sind, die wir als relative Primzahlen betrachten können, so ist

$$g^{\frac{m}{n}} = a, \text{ oder } \sqrt[n]{g^m} = a, \text{ folglich } g^m = a^n.$$

Wenn nun α ein einfacher Faktor von a ist, so muß a^n, folglich auch g^m durch α theilbar sein, d. h. a und g müssen, wenn x einen rationalen Werth hat, einerlei einfache Faktoren haben. Nun seien α und β die einfachen Faktoren von a und g, und z. B. $a = \alpha^p \beta^q$ und $g = \alpha^r \beta^s$, so geht die obige Gleichung $g^m = a^n$ über in

$$(\alpha^r \beta^s)^m = (\alpha^p \beta^q)^n, \text{ oder in}$$
$$\alpha^{mr} \beta^{ms} = \alpha^{np} \beta^{nq}.$$

Soll diese Gleichung bestehen, so muß, weil α und β Primzahlen sind, nothwendig

$$mr = np \text{ und } ms = nq \text{ sein, also}$$
$$\frac{m}{n} = \frac{p}{r} \text{ und } \frac{m}{n} = \frac{q}{s}, \text{ daher } \frac{p}{r} = \frac{q}{s} \text{ oder}$$
$$p : r = q : s \text{ oder } p : q = r : s.$$

Hat demnach x einen rationalen Werth, so haben die Basis g und die aus ihr erzeugte Potenz a einerlei einfache Faktoren α und β, und die Verhältnisse der Exponenten der gleichen Faktoren sind einander gleich.

Der Beweis bleibt derselbe, wenn g und a aus mehr als zwei einfachen Faktoren zusammengesetzt sind.

2. Der umgekehrte Satz ist auch gültig, nämlich wenn $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$ ist, so ist x rational, und zwar $x = \frac{p}{r} = \frac{q}{s}$, denn es ist dann

$$g^x = (\alpha^r \beta^s)^{\frac{p}{r}} = (\alpha^r)^{\frac{p}{r}} (\beta^s)^{\frac{p}{r}} = (\alpha^r)^{\frac{p}{r}} (\beta^s)^{\frac{q}{s}} = \alpha^p \beta^q = a.$$

Findet diese Bedingung nicht Statt, so muß x incommensurabel sein; woraus einleuchtet, daß die Logarithmen der meisten Zahlen irrational seien, und demnach nur annäherungsweise bestimmt werden können.

§. 266.

Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen.

I. Es bezeichne allgemein g die Basis irgend eines logarithmischen Systemes, und es sei $A = g^m$ und $B = g^n$, so ist $AB = g^{m+n}$, und daher $m + n = \log. AB$ (§. 263). Es ist aber $m = \log. A$ und $n = \log. B$, folglich $m + n = \log. A + \log. B$, und durch Substitution $\log. AB = \log. A + \log. B$; d. h. der Logarithmus eines Produktes wird gefunden, wenn man die Logarithmen der Faktoren desselben addirt.

Eben so ist auch

$$\lg. ABC = \lg. (A \times BC) = \lg. A + \lg. BC = \lg. A + \lg. B + \lg. C,$$

z. B.:

$$\log. 105 = \log. 3 . 5 . 7 = \log. 3 + \log. 5 + \log. 7.$$

Wären demnach die Logarithmen der Primzahlen für irgend ein System bekannt, so könnte man die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen durch bloße Addition finden.

Zusatz.

Aus der Gleichung $g^x = y$, wo $x = \log. y$, folgt durch Substitution $g^{\log. y} = y$. Da also $A = g^{\log. A}$, $B = g^{\log. B}$ und $C = g^{\log. C}$, so ist auch

$$ABC = g^{\log. A} \times g^{\log. B} \times g^{\log. C} = g^{\log. A + \log. B + \log. C},$$

und daher

$$\log. ABC = \log. A + \log. B + \log. C.$$

II. Aus den Gleichungen $A = g^m$ und $B = g^n$ folgt auch

$$\frac{A}{B} = \frac{g^m}{g^n} = g^{m-n}, \text{ also } \log. \frac{A}{B} = m - n.$$

Aber $m = \log. A$ und $n = \log. B$, daher ist durch Substitution

$$\log \frac{A}{B} = \log. A - \log. B;$$

d. h. der Logarithmus eines Quotienten oder Bruches wird gefunden, wenn man vom Logarithmus des Di-

vidends oder Zählers den Logarithmus des Divisors oder Nenners abzieht. Z. B.:

$$\log. \tfrac{45}{19} = \log. 45 - \log. 19 = \log. 9 + \log. 5 - \log. 19.$$

Eben so ist auch

$$\log. \frac{a^2 - x^2}{m^2 + mn} = \log. (a^2 - x^2) - \log. m (m + n)$$
$$= \log. (a + x) + \log (a - x) - \log. m - \log. (m + n).$$

Zusatz.

1. Man könnte den obigen Satz auch so beweisen:

$$A = g^{\log. A}, \ B = g^{\log. B}, \text{ also } \frac{A}{B} = \frac{g^{\log. A}}{g^{\log. B}} = g^{\log. A - \log. B};$$

$$\text{folglich } \log. \frac{A}{B} = \log. A - \log. B.$$

2. Es ist

$$\log. \frac{1}{a} = \log. 1 - \log. a = 0 - \log. a \ (\S.\ 264,\ I.\ \beta) = -\log. a,$$

und daher auch umgekehrt:

$$-\log. a = +\log. \frac{1}{a},$$

wobei wir $a > 1$ voraussetzen.

Jeder ächte Bruch aber läßt sich auf die Form $\frac{1}{a}$ bringen, mithin sind die Logarithmen der ächten Brüche negativ, wenn die Basis > 1 genommen wird, wie wir oben bereits gesehen haben.

III. Wenn $A = g^m$, so ist auch $A^n = (g^m)^n = g^{mn}$; also $\log. A^n = mn = n . m = n . \log. A$, denn $m = \log. A$. Es wird demnach der Logarithmus einer Potenz gefunden, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem Potenzexponenten multiplicirt.

Diese Regel ist auch dann noch gültig, wenn der Potenzexponent negativ ist. Denn es ist

$$\log. A^{-n} = \log. \frac{1}{A^n} = -\log. A^n \ (\text{Nr. II. Zusatz 2}) = -n . \log. A.$$

Zum Beispiel:

$$\log. 9 = \log. 3^2 = 2 \log. 3,$$
$$\log. 392 = \log. 2^3 . 7^2 = \log. 2^3 + \log. 7^2 = 3 \log. 2 + 2 \log. 7,$$

und $\log. \frac{a^3}{b^4} = \log. a^3 - \log. b^4 = 3 \log. a - 4 \log. b$; endlich
$\log. \left(\frac{4a^2}{x}\right)^3 = 3 l. \frac{4a^2}{x} = 3 (l. 4a^2 - l. x) = 3 (2 l. 2 + 2 l. a - l. x)$.

Zusatz.

Da $A = g^{\log. A}$, so ist auch $A^n = (g^{\log. A})^n = g^{n \log. A}$, daher $\log. A^n = n \log. A$.

IV. Ist $A = g^m$, so ist auch $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{g^m} = g^{\frac{m}{n}}$, also

$$\log. \sqrt[n]{A} = \frac{m}{n} = \frac{\log. A}{n}, \text{ weil } m = \log. A;$$

d. h. der Logarithmus einer Wurzelgröße $\sqrt[n]{A}$ wird gefunden, wenn man den Logarithmus der Potenz A durch den Wurzelexponenten n dividirt.

Diese Regel gilt auch für einen negativen Wurzelexponenten; denn es ist

$$\log. \sqrt[-n]{A} = \log. A^{-\frac{1}{n}} = \log. \left(\frac{1}{\sqrt[n]{A}}\right) = -\log. \sqrt[n]{A} = -\frac{1}{n} \log. A.$$

Zum Beispiel:

$$\log. \sqrt{7} = \tfrac{1}{2} \log. 7,$$

$$l. \sqrt[3]{54a^2} = \tfrac{1}{3} l. 54a^2 = \tfrac{1}{3} (l. 2. 27 + l. a^2) = \tfrac{1}{3} (l. 2 + 3 l. 3 + 2 l. a)$$

und $\log. \sqrt[n]{\frac{x^2}{y^3}} = \frac{1}{n} (\log. x^2 - \log. y^3) = \frac{1}{n} (2 \log. x - 3 \log. y)$.

Zusatz.

1. Weil $A = g^{\log. A}$, so ist auch $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{g^{\log. A}} = g^{\frac{\log. A}{n}}$, daher ist $\log. \sqrt[n]{A} = \frac{\log. A}{n}$.

2. Es ist also allgemein $\log. A^{\frac{p}{q}} = \log. \sqrt[q]{A^p} = \frac{p}{q} \log. A$; denn weil $A = g^{\log. A}$, so ist $\sqrt[q]{A^p} = \sqrt[q]{(g^{\log. A})^p}$, oder $A^{\frac{p}{q}} = g^{\frac{p}{q} \log. A}$, und demnach $\log. A^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \log. A$, wo p und q was immer für positive oder negative Zahlen bezeichnen mögen.

V. Wenn a und b die Grundzahlen zweier verschiedenen logarithmischen Systeme bezeichnen, und es ist $a^m = A$, $b^m = B$, so müssen A und B offenbar auch verschiedene Zahlen bezeichnen. Ist aber $a = b$, also auch $a^m = b^m$, so muß nothwendig $A = B$ sein. Ist endlich $a^m = A$, und sind a und b verschieden, so kann nicht auch $b^m = A$ sein, sondern es wird z. B. $b^n = A$ sein, wo $n \gtrless m$, je nachdem $b \lessgtr a$ ist. Hieraus folgen nun von selbst die Sätze: Gleiche Größen haben in einerlei Systemen auch gleiche Logarithmen, in verschiedenen Systemen aber verschiedene Logarithmen; und umgekehrt: in demselben Systeme entsprechen gleichen Logarithmen auch gleiche Zahlen, in verschiedenen Systemen aber entsprechen gleichen Logarithmen verschiedene Zahlen.

Ist also $A = B$, so muß auch $\log. A = \log. B$ sein, und umgekehrt, wenn $\log. A = \log. B$ ist, so muß auch

$$\text{num. log. } A = \text{num. log. } B, \text{ d. i. } A = B \text{ sein.}$$

Da der Logarithmus einer jeden Zahl selbst eine Zahl ist, so läßt sich auch von dieser Zahl (Logarithmus) wieder der Logarithmus nehmen, wenn nämlich $n = \log. A$ ist, so ist

$$\log. n = \log. (\log. A) = \log. \log. A;$$

und so werden nun die Ausdrücke $\log. \log. \log. A$, $\log. \log. \log. \log. A$ u. s. w. verständlich sein.

VI. Es seien a und b die Grundzahlen zweier verschiedenen logarithmischen Systeme, und zwar sei $A = a^m$ und $A = b^n$ im andern Systeme, wo m und n verschiedene Zahlen sein müssen (Nr. V.), den einzigen Fall, wenn $A = 1$, ausgenommen.

Die für die Basis a berechneten Logarithmen bezeichne man durch log., und die für die Grundzahl b berechneten mit Log., so ist $\log. A = m$ und $\text{Log. } A = n$. Da aber $A = A$, so ist auch $a^m = b^n$, also $m \log. a = n \log. b$ und $\log. b = \frac{m}{n} \log. a = \frac{\log. A}{\text{Log. } A} \log. a = \frac{\log. A}{\text{Log. } A}$, weil $\log. a = 1$ ist.

Eben so folgt aus der Gleichung $a^m = b^n$ auch $m \,\text{Log. } a = n \,\text{Log. } b$, und durch Substitution

$$\log. A \,\text{Log. } a = \text{Log. } A \,\text{Log. } b; \text{ d. i.}$$

$$\log. A \,\text{Log. } a = \text{Log. } A, \text{ weil Log. } b = 1.$$

Setzt man unter denselben Bedingungen, wie vorhin, $B = a^p$ und $B = b^q$, so ist $p = \log. B$ und $q = \text{Log. } B$; weil aber $a^p = b^q$, so ist auch $p \,.\, \log. a = q \,.\, \log. b$, also

$$\log. b = \frac{p}{q} \log. a = \frac{\log. B}{\mathrm{Log.} B} \log. a = \frac{\log. B}{\mathrm{Log.} B} \text{ und}$$

$$p \,\mathrm{Log.}\, a = q \,\mathrm{Log.}\, b = q,$$

oder durch Substitution

$$\log. B \,\mathrm{Log.}\, a = \mathrm{Log.}\, B,$$

woraus $\mathrm{Log.}\, a = \frac{\mathrm{Log.}\, B}{\log. B}$ gefunden wird.

Da nun

$$\log. b = \frac{\log. A}{\mathrm{Log.}\, A} = \frac{\log. B}{\mathrm{Log.}\, B}, \text{ so ist}$$

$$\mathrm{Log.}\, A : \log. A = \mathrm{Log.}\, B : \log. B, \text{ oder}$$
$$\mathrm{Log.}\, A : \mathrm{Log.}\, B = \log. A : \log. B,$$

und daher haben die Logarithmen derselben Zahlen in verschiedenen Systemen dasselbe Verhältniß zu einander.

Aus der Gleichung $\log. b = \frac{\log. A}{\mathrm{Log.}\, A}$ folgt $\mathrm{Log.}\, A = \log. A \,.\, \frac{1}{\log. b}$. Ist also das System für die Basis a berechnet, so können die Logarithmen für die Basis b aus jenem leicht berechnet werden, indem man die Logarithmen für die Basis a nur durch den Logarithmus von b für dieselbe Basis dividirt. Der Quotient $\frac{1}{\log. b}$, den wir der Kürze wegen mit m bezeichnen wollen, heißt Modul, welcher also die Zahl bedeutet, mit welcher die Logarithmen eines Systemes multiplicirt werden müssen, um ein anderes neues System zu erhalten (nämlich m ist der Modul dieses neuen Systemes).

Zusatz.

1. Wenn $m > n$ und die Grundzahl $a > 1$, so ist auch $a^m > a^n$ oder $A > B$, wenn $a^m = A$ und $a^n = B$ gesetzt wird.

Also entspricht in jedem logarithmischen Systeme, dessen Basis > 1 ist, der größeren Zahl ein größerer Logarithmus, und umgekehrt.

Das Gegentheil findet Statt, wenn die Basis des Systemes < 1 genommen wird.

2. Wenn $A = a^m = b^n$ oder $A = a^{\log. A} = b^{\mathrm{Log.}\, A}$, so ist für irgend ein anderes System, dessen Grundzahl g heißen mag, und dessen Logarithmen wir durch $\lambda o \gamma.$ andeuten wollen,

$$\lambda o\gamma.\ a^m = \lambda o\gamma.\ b^n, \text{ also}$$
$$m\ .\ \lambda o\gamma.\ a = n\ .\ \lambda o\gamma.\ b \text{ (III.), oder}$$
$$\log.\ A\ \lambda o\gamma.\ a = \text{Log. } A\ .\ \lambda o\gamma.\ b, \text{ folglich}$$
$$\log.\ A : \text{Log. } A = \lambda o\gamma.\ b : \lambda o\gamma.\ a.$$

Es verhalten sich demnach die Logarithmen einer und derselben Zahl aus zwei verschiedenen Systemen umgekehrt wie die Logarithmen, welche den Grundzahlen jener beiden Systeme in irgend einem dritten Systeme zugehören.

Die Logarithmen der Zahlen sind demnach um so kleiner, je größer die Grundzahl des Systemes ist, und umgekehrt.

Die Logarithmen der Zahlen hängen also von der Grundzahl ab, der Logarithmus der Einheit aber ist constant, denn er ist in jedem Systeme $= 0$.

VII. Die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Proportion bilden eine arithmetische Proportion. Denn es sei z. B. $a \div b = c \div d$, so ist $ad = bc$, also auch $\log.\ ad = \log.\ bc$, oder $\log.\ a + \log.\ d = \log.\ b + \log.\ c$, und daher $\log.\ a \div \log.\ b = \log.\ c \div \log.\ d$. Ist nun $\div\!\!\div a : b : c$, so ist auch $\div \log.\ a \div \log.\ b \div \log.\ c$.

Bilden demnach mehrere Zahlen eine geometrische Progression, so müssen die Logarithmen derselben, weil je drei auf einander folgende Glieder derselben in stätiger Proportion sind, eine arithmetische Progression bilden. Ist nämlich

$$\div\!\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots : aq^{n-1}, \text{ so ist}$$
$$\div \log.\ a \div \log.\ aq \div \log.\ aq^2 \div \log.\ aq^3 \div \ldots \div \log.\ aq^{n-1}, \text{ oder}$$
$$\div \log.\ a \div \log.\ a + \log.\ q \div \log.\ a + 2\log.\ q \div \log.\ a + 3\log.\ q \div \ldots$$
$$\div \log.\ a + (n-1)\log.\ q.$$

Hat man ferner

$$\div\!\!\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots : a^{n-1}, \text{ so ist auch}$$
$$\div \log.\ a^0 \div \log.\ a \div \log.\ a^2 \div \log.\ a^3 \div \log.\ a^4 \div \ldots \div \log.\ a^{n-1} \text{ und}$$
$$\div 0 \div 1 \div 2 \div 3 \div 4 \div \ldots \div (n-1),$$

wenn man a als logarithmische Basis annimmt: ideoque ait Adr. Vlacq: „Logarithmi sunt quantitatum continue proportionalium comites aequi differentes.“

Aus dem bereits Gesagten erhellt die Wichtigkeit der Logarithmen von selbst, und ihren ungemeinen Nutzen, welchen sie in allen Zweigen der reinen und angewandten Mathematik gewähren, wird man in der Folge noch mehr einsehen

lernen. Wir wollen im folgenden Paragraphe nur noch des besondern Vortheiles erwähnen, den die Logarithmen bei der Auflösung von Gleichungen gewähren, in welchen die unbekannte Größe als Exponent erscheint.

Anmerkung.

1) Neuere Analysten stellen die Theorie der Logarithmen auf folgende Weise dar.

Man denke sich eine beliebige geometrische Progression, in welcher irgend ein Glied $= 1$ ist, und auch eine beliebige arithmetische Progression, in welcher eines ihrer Glieder $= 0$ ist, und schreibe die arithmetische Reihe so unter die geometrische, daß 0 genau unter 1 zu stehen kommt; so heißen dann die Glieder der arithmetischen Progression die Logarithmen der entsprechenden Glieder der geometrischen Reihe. Sind nämlich

$\div\!\!\cdot \ldots q^{-3} \div q^{-2} \div q^{-1} \div 1 \div q^{1} \div q^{2} \div q^{3} \div \ldots \div q^{n} \div \ldots$

und $\div \ldots - 3\delta \cdot\!\!- - 2\delta \cdot\!\!- - \delta \cdot\!\!- 0 \cdot\!\!- \delta \cdot\!\!- 2\delta \cdot\!\!- 3\delta \ldots \cdot\!\!- n\delta \cdot\!\!- \ldots$

so ist $n\delta = \log. q^{n}$.

2) Jede gegebene Zahl N kann als Glied einer geometrischen Progression betrachtet werden, in welcher eines der Glieder $= 1$ ist. Denn es sei die Progression gegeben $\div\!\!\cdot 1 \div a \div a^{2} \div a^{3} \div a^{4} \div \ldots$ so läßt sich aus ihr eine andere ableiten, in welcher der beständige Quotient q so nahe bei der Einheit liegt, als man nur immer will. Zu diesem Ende wollen wir zwischen 1 und a eine hinreichend große Menge von Gliedern einschalten, z. B. $(n - 1)$ Glieder, so wird der Exponent der neuen Progression $q = \sqrt[n]{a}$ und wir denken uns n so groß genommen, daß $q = \sqrt[n]{a} < 1 + \alpha$, wo α eine beliebig kleine Größe bezeichnen soll.

Aus dieser Annahme folgt dann

$$a < (1 + \alpha)^{n} = 1 + n\alpha + \binom{n}{2} \alpha^{2} + \ldots;$$

und wenn wir nun $a \doteq 1 + n\alpha$, mithin $n \doteq \frac{a-1}{\alpha}$ setzen, so wird zuverläßig $q = \sqrt[n]{a} < 1 + \alpha$, und es wird die gegebene Zahl N einem Gliede der Progression

$$\div\!\!\cdot 1 \div \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a^{2}} : \sqrt[n]{a^{3}} : \ldots : \sqrt[n]{a^{n-1}} : a : a\sqrt[n]{a} : a\sqrt[n]{a^{2}} : \ldots$$

sehr nahe gleich werden.

Entspricht der Progression $\div\div 1 : a : a^2 : a^3 : \ldots$ die arithmetische $\div 0 \cdot \delta \cdot 2\delta \cdot 3\delta \cdot \ldots$ und wir schalten auch zwischen je zwei Glieder der letztern $(n-1)$ Glieder ein, so erhalten wir die der Progression $\div\div 1 : \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a^2} : \sqrt[n]{a^3} : \ldots : \sqrt[n]{a^m}$ entsprechende arithmetische $\div 0 \cdot \frac{\delta}{n} \cdot \frac{2\delta}{n} \cdot \frac{3\delta}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{m\delta}{n}$.

Wäre demnach $N = \sqrt[n]{a^m}$, so würde $\log. N = \frac{m}{n}\delta$ für die Basis a sein.

3) Seien

$$\div\div 1 : a : a^2 : a^3 : \ldots : a^n : a^{n+1} : a^{n+2} : \ldots \text{ und}$$
$$\div 0 \cdot \delta \cdot 2\delta \cdot 3\delta : \ldots \cdot n\delta \cdot (n+1)\delta \cdot (n+2)\delta \cdot \ldots$$

zwei korrespondirende Progressionen, von welchen die arithmetische ganz willkürlich angenommen werden darf, so können wir $n\delta = 1$, mithin $n = \frac{1}{\delta}$ setzen, also $a^n = a^{\frac{1}{\delta}}$.

Für $a^{\frac{1}{\delta}} = b$, wird $a = b^{\delta}$, und wir erhalten

$$b^0 = 1$$
$$b = a^{\frac{1}{\delta}} = a^n$$
$$b^{\delta} = a$$
$$b^{2\delta} = a^2$$
$$b^{3\delta} = a^3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$b^{m\delta} = a^m.$$

Erheben wir sonach die Zahl $b = a^{\frac{1}{\delta}}$ auf die Potenzen, deren Exponenten die Logarithmen der Zahlen 1, a, a^2, a^3, ... sind, so erhalten wir diese Zahlen selbst, und hierin liegt der Grund, warum wir im §. 263 den Logarithmus einer Zahl N als den Exponenten der Potenz betrachteten, zu welcher eine unveränderliche Zahl erhoben werden muß, um die gegebene Zahl N selbst zu erhalten.

Die Zahl $b = a^{\frac{1}{\delta}} = a^n$, deren Logarithmus $= n\delta = 1$ ist, heißt die Basis des logarithmischen Systemes, und wenn diese gegeben ist, so sind auch die Logarithmen bestimmte Zahlen. — Ist

umgekehrt der Logarithmus irgend einer Zahl gegeben, so ist auch die Basis des logarithmischen Systemes nothwendig eine bestimmte Zahl.

Setzen wir $a = 1 + \alpha$ und $\delta = \mu\alpha$ wo $\mu = \frac{\delta}{\alpha}$ der Modul des Systems genannt wird, sonach $n\delta = n \,.\, \mu\alpha = 1$ oder $n = \frac{1}{\mu\alpha}$.

so wird die Basis $b = a^n = (1 + \alpha)^n = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\mu\alpha}} = [(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\mu}}$.

Für den Modul $\mu = 1$ erhält man die Grundzahl $b' = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, welche stets durch e bezeichnet und die Basis der natürlichen oder der Neper'schen Logarithmen genannt wird. Es ist demnach für jedes andere System die Grundzahl $b = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\mu\alpha}} = [(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\mu}} = e^{\frac{1}{\mu}}$, und $e = b^{\mu}$. — Jede logarithmische Basis b zu einer Potenz erhoben, deren Exponent ihrem Modul μ gleich ist, gibt sonach die Basis e der natürlichen Logarithmen.

4) Es ist $e = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \left(\begin{matrix}\frac{1}{\alpha}\\ 1\end{matrix}\right)\alpha + \left(\begin{matrix}\frac{1}{\alpha}\\ 2\end{matrix}\right)\alpha^2 + \left(\begin{matrix}\frac{1}{\alpha}\\ 3\end{matrix}\right)\alpha^3 + \ldots$

$$= 1 + 1 + \frac{1\,(1 - \alpha)}{1\,.\,2} + \frac{1\,(1 - \alpha)\,(1 - 2\alpha)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1\,(1 - \alpha)\,(1 - 2\alpha)\,(1 - 3\alpha)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

und wenn wir nun α ohne Ende abnehmen oder unendlich klein werden lassen, so wird

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,(n - 1)\,n} + \ldots$$
$$= 2{\cdot}718281828 \ldots$$

Es ist sonach $b^{\mu} = 2{\cdot}7182818\ldots$, und wenn daher von den zwei Größen b und μ die Eine gegeben ist, so läßt sich die andere berechnen.

5) Nach Nr. 3 ist, wenn b und B zwei beliebige Grundzahlen und μ und μ^1 ihre respektiven Moduli bezeichnen, offenbar $b^{\mu} = B^{\mu^1} = e$; und wenn wir die Logarithmen, deren Grundzahl b ist, durch log., und jene, welche der Basis B entsprechen, durch Log. bezeichnen, so ist

$$\text{log. } b^{\mu} = \text{log. } B^{\mu^1} = \text{log. } e, \text{ oder}$$
$$\mu \,.\, 1 = \mu^1 \text{ log. } B = \text{log. } e, \text{ mithin}$$
$$\frac{\mu^1}{\mu} = \frac{1}{\text{log. } B} = M \text{ Kürze halber.}$$

Diesen Quotienten $M = \frac{\mu^1}{\mu} = \frac{1}{\log. B}$ pflegt man den Umwandlungs-Modul oder auch schlechtweg Modul zu nennen, welcher dazu dient, den Logarithmus einer jeden Zahl Z aus dem bekannten Systeme in den Logarithmus derselben Zahl für das neue System zu verwandeln, es ist nämlich

$$\text{Log. } Z = \frac{1}{\log. B} \log. Z = M . \log. Z.$$

Würde z. B. Log. Z den natürlichen Logarithmus von Z bezeichnen, so wäre

$$M = \frac{1}{\log. e} = \frac{1}{\log. 2{\cdot}718281828 \ldots} = 2{\cdot}30258509 \ldots$$

mithin

$$\text{Log. nat. } Z = 2{\cdot}30258509 \ldots \times \log Z,$$

wo demnach log. Z aus dem bekannten, z. B. dem Brigg'schen System, dessen Grundzahl = 10 ist, zu nehmen wäre.

Umgekehrt folgt hieraus

$$\text{log. Brigg. } Z = \frac{1}{2{\cdot}30258509\ldots} \times \text{log. nat. } Z = 0{\cdot}43420448 \ldots \text{log. nat. } Z,$$

d. h. die natürlichen Logarithmen müssen mit $0{\cdot}43420448 \ldots = \frac{1}{\text{Log. nat. } 10} = M^1$ multiplicirt werden, um sie in gemeine Logarithmen zu verwandeln.

§. 267.

Gleichungen, die sich bloß mittelst Logarithmen auflösen lassen.

α) Aus der Gleichung $a^x = b$ den Werth von x zu bestimmen. Es ist $x \log. a = \log. b$, also $x = \frac{\log. b}{\log. a}$.

β) Man bestimme x aus der Gleichung $12^{x+1} = 27 . 4^{x+1}$. Es ist

$$(x + 1) \log. 12 = \log. 27 + (x + 1) \log. 4, \text{ oder}$$
$$x \log. 12 + \log. 12 = 3 \log. 3 + x \log. 4 + \log. 4,$$
$$x \log. 12 - x \log. 4 = 3 \log. 3 + \log. 4 - \log. 12,$$
$$x (\log. 4 + \log. 3 - \log. 4) = 3 \log. 3 + \log. 4 - \log. 3 - \log. 4$$
$$x \log. 3 = 2 \log. 3, \text{ also}$$
$$x = 2.$$

Diese Gleichung hätte man auch auf folgende Art behandeln können: Aus $12^{x+1} = 27 \,.\, 4^{x+1}$ folgt auch

$$12^x \,.\, 12 = 27 \,.\, 4^x \,.\, 4, \text{ also } \frac{12^x}{4^x} = \frac{27 \,.\, 4}{12} = 9,$$

oder $(\frac{12}{4})^x = 9$, d. i. $3^x = 9$, also $x \log. 3 = \log. 9 = 2 \log. 3$, mithin $x = 2$, wie vorhin.

γ) Aus der Gleichung $\sqrt[x]{a} = \alpha$, folgt $a = \alpha^x$, $\log. a = x \log. \alpha$, und daher $x = \frac{\log. a}{\log. \alpha}$.

δ) Es sei aus der Gleichung $p\, a^{x+m} = q\, b^{x-n}$ der Werth von x zu bestimmen.

Hier ist

$$\log. p + (x + m) \log. a = \log. q + (x - n) \log. b, \text{ also}$$
$$x (\log. a - \log. b) = \log. q - n \log. b - \log. p - m \log. a,$$

und daher

$$x = \frac{\log. q - n \log. b - \log. p - m \log. a}{\log. a - \log. b}.$$

ε) Es sei $\sqrt{2} = (\sqrt[4]{3})^x$, also $\log. \sqrt{2} = x \log. \sqrt[4]{3}$, oder

$$\tfrac{1}{2} \log. 2 = x \,.\, \tfrac{1}{4} \log. 3, \text{ also } x = \frac{2 \log. 2}{\log. 3}.$$

ζ) Man bestimme x aus der Gleichung $\alpha^{x^2} = b$.

Es ist hier $x^2 \log. a = \log. b$, also $x = \sqrt{\frac{\log. b}{\log. a}}$, und will man $\sqrt{\frac{\log. b}{\log. a}}$ logarithmisch bestimmen, so ist

$$\log. x = \tfrac{1}{2} \log. \frac{\log. b}{\log. a} = \frac{\log. (\log. b) - \log. (\log. a)}{2}.$$

η) Aus der Gleichung $4 \,.\, 5^{4x} - 3 \,.\, 5^{2x} = 85$ soll x gefunden werden.

Betrachten wir 5^{2x} als die unbekannte Größe, so ist $5^{4x} = (5^{2x})^2$, und daher nach §. 221

$$5^{2x} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1360}}{8} = \frac{3 \pm 37}{8}, \text{ also}$$

$$2x \log. 5 = \log. (3 \pm 37) - \log. 8 \text{ und}$$

$$x = \frac{\log. (3 \pm 37) - \log. 8}{2 \log. 5}. \text{ Es ist daher}$$

$$x = \frac{\log. 40 - \log. 8}{2 \log. 5} = \frac{\log. 5 + \log. 8 - \log. 8}{2 \log. 5} = \tfrac{1}{2}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{\log. (-34) - \log 8}{2 \log. 5},$$

welcher Werth imaginär ist (§. 264, IV.), wovon man sich auch auf folgende Art überzeugen kann. Aus der Gleichung

$$5^{2x} = \frac{-34}{8} = \frac{-17}{4} \text{ folgt } \sqrt{5^{2x}} = \sqrt{\frac{-17}{4}}, \text{ d. i.}$$

$$5^x = \tfrac{1}{2} \sqrt{-17}, \text{ also unmöglich.}$$

ϑ) Aus der Gleichung $a^{mx+n} = b^{\mu x + \nu}$ den Werth von x zu bestimmen.

Aus der gegebenen Gleichung folgt

$$a^{\frac{mx+n}{\mu x + \nu}} = b, \text{ also}$$

$$\frac{mx+n}{\mu x + \nu} \log. a = \log. b, \text{ mithin}$$

$$\frac{mx+n}{\mu x + \nu} = \frac{\log. b}{\log. a},$$

woraus nun x nach den bekannten Regeln gesucht werden kann.

ι) Die Gleichung $a^{mx+n} \cdot b^{\mu x + \nu} = c$ aufzulösen.

Man erhält hier sogleich

$$(mx + n) \log. a + (\mu x + \nu) \log. b = \log. c, \text{ oder}$$

$$(m \log. a + \mu \log. b)\, x = \log. c - (n \log. a + \nu \log. b),$$

$$\text{also } x = \frac{\log. c - (n \log. a + \nu \log. b)}{m \log. a + \mu \log. b}.$$

Oder man verfahre auf folgende Art. Aus der gegebenen Gleichung ergibt sich

$$a^{mx} \cdot a^n \cdot b^{\mu x} \cdot b^\nu = c, \text{ oder } (a^m b^\mu)^x = \frac{c}{a^n b^\nu} = c \cdot a^{-n} \cdot b^{-\nu},$$

also

$$x \log. (a^m b^\mu) = \log. c - n \log. a - \nu \log. b,$$

und daher

$$x = \frac{\log. c - n \log. a - \nu \log. b}{m \log. a + \mu \log. b}, \text{ wie vorhin.}$$

ϰ) Man suche x aus der Gleichung

$$a^{mx+n} \cdot \sqrt[x]{b^{\mu x + \nu}} = c.$$

Man findet hier durch Potenziren

$$a^{mx^2 + nx} \cdot b^{\mu x + \nu} = c^x, \text{ und hieraus}$$

$$(mx^2 + nx) \log. a + (\mu x + \nu) \log. b = x \log. c, \text{ oder}$$

$$mx^2 \log. a + (n \log. a + \mu \log. b - \log. c) \cdot x = - \nu \log. b,$$

daher

$$x^2 + \frac{n \log. a + \mu \log. b - \log. c}{m \log. a} . x = - \frac{\nu \log. b}{m \log. a},$$

welche Gleichung nun (nach §. 219) aufgelöst werden kann.

λ) Die Gleichung $a^{\alpha x} = b^{\beta x}$ aufzulösen.

Man erhält $\alpha^x \log. a = \beta^x \log. b$, also auch

$$\frac{\alpha^x}{\beta^x} = \frac{\log. b}{\log. a}, \text{ oder } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\log. b}{\log. a}, \text{ daher}$$

$$x (\log. \alpha - \log. \beta) = \log. \frac{\log. b}{\log. a} = \log. \log. b - \log. \log. a,$$

$$\text{und demnach } x = \frac{\log. \log. b - \log. \log. a}{\log. \alpha - \log. \beta}.$$

§. 268.

Vom Brigg'schen oder gemeinen logarithmischen Systeme.

1. Stiefel scheint der erste gewesen zu sein, der einen richtigen Begriff von Logarithmen hatte, wie aus seiner Arithmetica integra Norimb. 1544 erhellt. Aber Johann Neper, Baron von Merchiston, gab zuerst ein Logarithmensystem zu Edinburg 1614 heraus. Die Basis dieses Systemes war .9999999, oder weil jede Zahl schon an und für sich das Verhältniß zu der Einheit involvirt, 10000000:9999999 das Grundverhältniß dieses Systemes.

Heinrich Brigg, Professor zu Oxford, berechnete auf Nepers Aufmunterung die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalstellen für die Grundzahl 10 oder das Grundverhältniß 1 : 10 (in seiner Arithm. logarithm. 1624). Die Lücke von 20000 bis 90000 füllte Adrian Blacq, ein holländischer Mathematiker (in seiner Arithmetica Briggii 1628), mit 10 Decimalstellen aus.

Dieses für die Grundzahl 10 berechnete Logarithmensystem nennt man das Briggische, oder das gemeine, weil der Gebrauch desselben allgemein eingeführt ist.

2. In dem gemeinen Logarithmensystem ist $0 = \lg. 1$, $1 = \lg. 10$, $2 = \lg. 10^2 = \lg. 100$, $3 = \lg. 10^3 = \lg. 1000$, $4 = \lg. 10^4 = \lg. 10000$, u. s. w. Also haben nur die rationalen Potenzen von 10 ganze Zahlen als Logarithmen, die Logarithmen der irrationalen Potenzen von 10 aber sind rationale Brüche, denn es ist allgemein

$$\frac{m}{n} = \log. \sqrt[n]{10^m},$$

wo n und m Primzahlen gegen einander sein sollen.

3. Die Logarithmen der ganzen Zahlen, welche zwischen 1, 10, 100, 1000, ꝛc. liegen, können nicht commensurabel sein. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus dem im §. 265 aufgestellten allgemeinen Prinzipe; man kann dieselbe aber auch direkt auf folgende Art beweisen: Sei x der Logarithmus der ganzen positiven Zahl a, so hat man die Gleichung (1) . : . $10^x = a$. Es handelt sich nun darum, zu zeigen, daß die rationalen Werthe von x nothwendig ganze Zahlen sein müssen. Wenn x commensurabel ist, so hat man $x = \frac{m}{n}$; m und n sind ganze Zahlen, die wir als relative Primzahlen ansehen können, und die Gleichung (1) geht über in

$$10^{\frac{m}{n}} = a, \text{ oder } 2^m . 5^m = a^n \ldots (2).$$

Die einfachen Faktoren von a^n sind demnach 2 und 5, so daß also a die Form $2^r . 5^s$ hat, wo r und s ganze Zahlen bezeichnen.

Die Gleichung (2) verwandelt sich demnach in

$$2^m . 5^m = (2^r . 5^s)^n = 2^{nr} . 5^{ns},$$

und daher ist $m = nr = ns$, also $\frac{m}{n} = r = s$, folglich auch $x = r = s$, d. h. der commensurable Werth von x ist nothwendig eine ganze Zahl, also 10^x eine der Zahlen 1, 10, 100, 1000, ꝛc. Es kann demnach keine ganze Zahl, die zwischen diesen liegt, einen rationalen Logarithmus haben.

4. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10, d. i. die Logarithmen der einzifferigen Zahlen liegen also zwischen 0 und 1, die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10 und 100 sind > 1 und < 2. die Logarithmen aller dreizifferigen Zahlen liegen zwischen 2 und 3, und allgemein die Logarithmen aller $m + 1$ zifferigen Zahlen zwischen 10^m und 10^{m+1} sind $> m$ und $< m + 1$, folglich gleich einer ganzen Zahl m, die man Kennziffer oder Charakteristik nennt, mehr einem Bruche in Decimalen ausgedrückt, welchen man Mantissa zu nennen pflegt. Die Charakteristik ist also immer um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern, mit welchen die zu einem Logarithmus gehörige Zahl geschrieben ist.

Aus dem Vorhergehenden sieht man auch leicht ein, daß die Logarithmen der Zahlen immer weniger von einander verschieden sein

müssen, je größer jene Zahlen sind; denn zwischen 10 und 100 liegen mehr Zahlen, als zwischen 1 und 10, zwischen 100 und 1000 mehr, als zwischen 10 und 100, u. s. w. Die logarithmischen Differenzen werden also kleiner, je größer die entsprechenden Zahlen werden.

Die leichtesten Methoden, die Logarithmen zu berechnen, lehrt die höhere Mathematik. Allein Neper, Brigg und Blacq kannten jene bequemen Methoden nicht, sondern waren gezwungen, auf einem äußerst beschwerlichen Wege die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen, wie ich im folgenden Paragraphe an einigen Aufgaben zeigen werde.

§. 269.

Aufgabe 1.

Man berechne den gemeinen Logarithmus von 5, oder was dasselbe ist, man bestimme aus der Gleichung $10^x = 5$ den Werth von x.

Da 5 zwischen 1 und 10 liegt, so suche man die mittlere geometrische Proportionale zwischen jenen Zahlen. Es sei $\div\!\div 1 : p : 10$, also $p = \sqrt{10} = 3\cdot1622776601$ und $\log. p = \log. \sqrt{10} = \frac{1}{2} = \cdot5$. Da nun $p < 5$ und $10 > 5$, so suche man wieder die mittlere geometrische Proportionale q zwischen p und 10, so ist

$$q = \sqrt{10p} = \sqrt{10 \times 3\cdot1622\ldots} = \sqrt{31\cdot622\ldots} = 5\cdot623413251$$

und

$$\log. q = \tfrac{1}{2} \log. 10p = \tfrac{1}{2} \log. 10^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{4} = 0\cdot75.$$

Nun ist $p < 5$ und $q > 5$; man setze demnach $\div\!\div p : r : q$, also

$$r = \sqrt{pq} = \sqrt{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{10^{\frac{5}{4}}} = 10^{\frac{5}{8}} = 4\cdot216965034\ldots,$$

und $\log. r = \frac{5}{8} = 0\cdot625$. Die Zahl 5 liegt demnach zwischen r und q. Je öfter man zwischen zwei solchen nächstgelegenen bekannten Potenzen von 10 die mittlere geometrische Proportionale sucht, desto näher kömmt man der Zahl 5, so daß man, wenn jene Operation etliche 20 Mal wiederholt wird, endlich einen solchen Werth für x findet, daß 10^x nicht mehr um $0\cdot0000001$ von 5 verschieden ist, wo man dann jenen für x gefundenen Werth, der $= 0\cdot6989700\ldots$ und bis in die 7te Decimale noch richtig ist, als den Logarithmus der Primzahl 5 ohne merklichen Fehler in der Praxis annehmen kann. Daß man übrigens die Genauigkeit so weit treiben könne, als man nur immer will, erhellt von selbst.

Das außerordentlich Mühsame dieser Operation wird man noch mehr einsehen, wenn man bedenkt, daß, um z. B. nur $\sqrt[16]{10} = \sqrt[8]{\sqrt{10}}$ bis in die 7te Decimalstelle richtig zu erhalten, $\sqrt{10}$ auf 56 Decimalstellen genau angegeben werden müßte, und daß die Arbeit immer beschwerlicher werde, je größer der Wurzelexponent wird.

Bequemer könnte man auf folgende Art verfahren. Aus der Gleichung $10^x = 5$ folgt, daß $x > 0$ und < 1 sein müsse; man setze deßhalb a) $x = \frac{1}{x'}$, wo $\frac{1}{x'}$ was immer für einen ächten Bruch bezeichnet, so ist durch Substitution

$$10^{\frac{1}{x'}} = 5 \text{ oder } 5^{x'} = 10.$$

Der Werth von x' liegt zwischen 1 und 2, denn $5^1 = 5$ und $5^2 = 25$, also $5^1 < 10$ und $5^2 > 10$. Setzt man nun b) $x' = 1 + \frac{1}{x''}$, so wird

$$5^{1 + \frac{1}{x''}} = 10 \text{ oder } 5.5^{\frac{1}{x''}} = 10, \text{ also}$$

$$5^{\frac{1}{x''}} = 2 \text{ oder } 5 = 2^{x''}.$$

Hier ist nun $x'' > 2$ und < 3; denn $2^2 = 4$ und $2^3 = 8$. Es sei also c) $x'' = 2 + \frac{1}{x'''}$, so ist durch Substitution

$$5 = 2^{2 + \frac{1}{x'''}} = 2^2 . 2^{\frac{1}{x'''}} \text{ und}$$

$$2^{\frac{1}{x'''}} = \tfrac{5}{4} \text{ oder } 2 = (\tfrac{5}{4})^{x'''} = (1{\cdot}25)^{x'''}.$$

Da nun $(1{\cdot}25)^3 = 1{\cdot}953125$ und $(1{\cdot}25)^4 = 2{\cdot}4414\ldots$, so liegt der Werth von x''' zwischen 3 und 4; man setze demnach d) $x''' = 3 + \frac{1}{x^{IV}}$, so ist durch Substitution in der letzten Gleichung

$$2 = (1{\cdot}25)^{3 + \frac{1}{x^{IV}}} = (1{\cdot}25)^3 . (1{\cdot}25)^{\frac{1}{x^{IV}}}, \text{ also}$$

$$(1{\cdot}25)^{\frac{1}{x^{IV}}} = \frac{2}{(1{\cdot}25)^3} = 1{\cdot}024 \text{ oder } 1{\cdot}25 = (1{\cdot}024)^{x^{IV}}.$$

Durch Versuche findet man, daß $x^{IV} > 9$, aber < 10 sein müsse, und man setze deßhalb e) $x^{IV} = 9 + \frac{1}{x^V}$, so ist durch Substitution

$$(1{\cdot}024)^{9 + \frac{1}{x^V}} = 1{\cdot}25 \text{ oder } (1{\cdot}024)^9 . (1{\cdot}024)^{\frac{1}{x^V}} = 1{\cdot}25,$$

also

$$(1{\cdot}024)^{\frac{1}{x^V}} = \frac{1{\cdot}25}{(1{\cdot}024)^9} = (1{\cdot}0097420) \text{ oder } 1{\cdot}024 = (1{\cdot}0097420)^{x^V}.$$

Da nun

$$(1{\cdot}00974\ldots)^2 = 1{\cdot}0195\ldots \text{ und } (1{\cdot}00974\ldots)^3 = 1{\cdot}0295\ldots,$$

so liegt x^V zwischen 2 und 3; deßhalb setze man f) $x^V = 2 + \frac{1}{x^{VI}}$, u. s. f.

Substituirt man diese in a, b, c, . . . gefundenen Werthe in den auf einander folgenden Ausdrücken, so erhält man

$$x = \frac{1}{x'} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x''}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x'''}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x^{IV}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{x^V}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+ \text{ic.}}}}}}$$

Bestimmt man die Näherungsbrüche, so erhält man

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 9,\quad 2,\quad \ldots$$

$$\tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{65}{93},\ \tfrac{137}{196},\ \ldots$$

Bleibt man nun bei dem fünften Näherungswerthe $\frac{137}{196}$ stehen, so ist $10^{\frac{137}{196}} = 10^{0{\cdot}6989795\ldots} = 5$ sehr nahe, also $\log. 5 = 0{\cdot}6989795\ldots$ In den Logarithmen-Tafeln findet man $\log. 5 = 0{\cdot}6989700$, und unser Resultat ist demnach nur noch um $0{\cdot}0000095$ zu groß. Je weiter man diese Operation fortsetzt, desto genauer findet man den verlangten Logarithmus.

Aufgabe 2.

Man berechne den Logarithmus von 2 für das gemeine System.

Da $10^x = 2$ sein soll, so muß x ein echter Bruch, z. B. $\frac{1}{x'}$, sein;

also $10^{\frac{1}{x'}} = 2$ oder $10 = 2^{x'}$, wo $x' > 3$ und < 4, also z. B. $= 3 + \frac{1}{x''}$ ist. Hieraus folgt

$$2^{3 + \frac{1}{x''}} = 10 \text{ oder } 2^3 . 2^{\frac{1}{x''}} = 10; \text{ also}$$

$$2^{\frac{1}{x''}} = \tfrac{10}{8} = \tfrac{5}{4} \text{ oder } 2 = (\tfrac{5}{4})^{x''} = (1{\cdot}25)^{x''}.$$

Durch dieselben Untersuchungen, wie oben, zeigt sich's, daß x'' zwischen 3 und 4, x''' zwischen 9 und 10, x^{IV} zwischen 2 und 3, und x^{V} zwischen 2 und 3 falle; und daher ist auch näherungsweise

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{ıc.}}}}}}$$

Nimmt man hier wieder den fünften Näherungswerth, welcher $= \frac{146}{485} = 0{\cdot}3010309\ldots$ gefunden wird, so ist $10^{0{\cdot}3010309\ldots} = 2$, also $\log. 2 = 0{\cdot}3010309\cdots$, welcher Logarithmus in den sechs ersten Stellen vollkommen richtig ist. In den Tafeln findet man

$$\log. 2 = 0{\cdot}3010300.$$

Ungefähr nach der bei der ersten Aufgabe angegebenen Methode haben Brigg und Vlacq die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000 berechnet, und dieselben in Tafeln eingetragen, so daß man in derselben zu jeder Zahl, welche die Grenzen der Tafel nicht überschreitet, den dazu gehörigen Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl sogleich finden kann. Solche Tafeln nun sind unter dem Namen Logarithmen-Tafeln bekannt, deren es jetzt sehr viele gibt, unter denen die Vega'schen und Callet'schen am meisten im Gebrauche sind. Die Art des Gebrauches solcher Tafeln ist gewöhnlich in den ihnen vorausgeschickten Einleitungen aus einander gesetzt; das Nöthigste jedoch soll in den folgenden Paragraphen gesagt werden.

Sehr empfehlenswerth ist die vom Hrn. Dr. J. A. Hülsse herausgegebene, in der Weidmann'schen Buchhandlung zu Leipzig 1849 verlegte Sammlung mathematischer Tafeln.

Die von mir herausgegebenen, und bei Carl Gerold erschienenen logarithmischen Tafeln, Wien 1827, dürften theils wegen ihrer Correctheit, theils wegen ihrer Vollständigkeit und wegen der vielen Hülfstabellen, die sie enthalten, dem mathematischen Publikum nicht mit Unrecht empfohlen werden.

Zusatz.

Die oben gelehrten zwei Methoden zur Berechnung der Logarithmen sind äußerst mühsam und zeitraubend; wir wollen deßhalb

hier zeigen, wie man den Logarithmus einer beliebigen Zahl u bequemer berechnen könne.

Da in jedem Systeme Log. $1 = 0$, so sei $u = 1 + z$, und man nehme an, es sei

$$\log.(1+z) = A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \ldots \quad (\alpha)$$

weil für $z = 0$, $\log.(1+z) = \log. 1 = 0$ werden muß.

Setzen wir in (α) nun $-z$ statt $+z$, so wird

$$\log.(1-z) = -A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + A_4 z^4 - A_5 z^5 + \ldots \quad (\beta)$$

Durch Subtraktion der Gleichung (β) von (α) erhält man

$$\log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2A_1 z + 2A_3 z^3 + 2A_5 z^5 + 2A_7 z^7 + \ldots\ldots$$

$$= \log.\left[1 + \frac{2z}{1-z}\right] \ldots (\gamma).$$

Setzt man nun in (α) $\frac{2z}{1-z}$ statt z, so wird

$$\log.\left(1 + \frac{2z}{1-z}\right) = \log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{2A_1 z}{1-z} + \frac{4A_2 z^2}{(1-z)^2} + \frac{8A_3 z^3}{(1-z)^3}$$

$$+ \frac{16A_4 z^4}{(1-z)^4} + \ldots + \frac{2^r A_r z^r}{(1-z)^r} + \ldots$$

und entwickelt man die Ausdrücke von der Form

$$\frac{2^r A_r z^r}{(1-z)^r} = 2^r A_r z^r (1-z)^{-r}$$

nach dem binomischen Lehrsatze und ordnet das ganze Aggregat nach den steigenden Potenzen von z; so erhält man

$$\log.\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = 2A_1 z + \left.\begin{matrix}2A_1\\4A_2\end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix}2A_1\\8A_2\\8A_3\end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix}2A_1\\12A_2\\24A_4\\16A_4\end{matrix}\right\} z^4 +$$

$$+ \left.\begin{matrix}2A_1\\16A_2\\48A_3\\64A_4\\32A_5\end{matrix}\right\} z^5 + \left.\begin{matrix}2A_1\\20A_2\\80A_3\\160A_4\\160A_5\\128A_6\end{matrix}\right\} z^6 + \ldots (\delta)$$

Da nun diese Entwicklung mit der Reihe (γ) identisch werden soll, so müssen die gleichnamigen Potenzen von z gleiche Koefficienten besitzen, und dann ergibt sich durch die wirkliche Gleichstellung jener Koefficienten nach einer leichten Rechnung

$A_2 = -\frac{1}{2} A_1$, $A_3 = +\frac{1}{3} A_1$, $A_4 = -\frac{1}{4} A_1$, $A_5 = +\frac{1}{5} A_1$, $A_6 = -\frac{1}{6} A_1, \ldots$ allgemein

$$A_r = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r} A_1.$$

Durch Substitution dieser Werthe in der Relation (α) erhält man

$$\log.(1+z) = A_1 z - \tfrac{1}{2} A_1 z^2 + \tfrac{1}{3} A_1 z^3 - \tfrac{1}{4} A_1 z^4 + \tfrac{1}{5} A_1 z^5 \ldots$$
$$= A_1 \left[z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + \tfrac{1}{5} z^5 - \ldots\right] (\odot).$$

In der Gleichung (γ) substituirt aber

$$\log.\frac{1+z}{1-z} = 2 A_1 \left[z + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{5} z^5 + \tfrac{1}{7} z^7 + \ldots\right] \ldots (\mathfrak{C}),$$

in welchen zwei Gleichungen demnach nur die Größe A_1 unbestimmt ist, wie es die Natur der Sache erfordert, indem wir keine bestimmte Grundzahl angenommen haben. Es läßt sich wohl schon a priori einsehen, daß durch die Annahme einer bestimmten Basis jener Faktor A_1, also auch $\log.(1+z)$, nur einen bestimmten Werth haben könne.

Es ist wohl am natürlichsten und einfachsten, den Faktor $A_1 = 1$ zu setzen, und man nennt dann die dieser Annahme entsprechenden Logarithmen die natürlichen Logarithmen, welche wir bloß durch $l.(1+z)$ bezeichnen wollen. Es ist nämlich

$$\log.\,\text{nat.}(1+z) = l.(1+z) = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + \ldots$$

und $l.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{5} z^5 + \tfrac{1}{7} z^7 + \ldots\right) = lg.\left(1 + \frac{2z}{1-z}\right).$

Sei z. B. $\frac{1+z}{1-z} = 2$, also $z = \frac{1}{3}$, so wird

$$l.2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \ldots\right] = 2.\left\{\begin{array}{l} 0{\cdot}33333333 \\ 0{\cdot}01234568 \\ 0{\cdot}00082305 \\ 0{\cdot}00006532 \\ 0{\cdot}00000565 \\ 0{\cdot}00000051 \end{array}\right\} = 0{\cdot}6931471$$
$$\overline{0{\cdot}3465735}\ 4\times 2$$

wenn man sich mit 6 Decimalen begnügen will: die Reihe convergirt demnach ziemlich schnell.

Um lg. n. 10 mit Hülfe des lg. n. 2 durch eine stark fallende Reihe darzustellen, setzen wir $10 = 8 \cdot \frac{5}{4}$ und $\frac{1+z}{1-z} = \frac{5}{4}$, so wird

$$l.\,10 = l.\,8 + l.\,\tfrac{5}{4} = 3\ l.\,2 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \frac{1}{7.9^7} + \ldots\right]$$
$$= 2{\cdot}0794413 + 0{\cdot}2231435\ldots$$

nämlich es ist log. n. 10 $\doteq$ 2·302585; also ist der Modul des Briggischen Systemes (§. 226)

$$A' = M' = \frac{1}{l.\,10} \doteq \frac{1}{2{\cdot}302585} \doteq 0{\cdot}4342945.$$

§. 277.

1. **Den Logarithmus eines Decimalbruches (z. B. 0·453) zu finden.**

Ist A eine (n + 1)-zifferige Zahl, und bezeichnet o·m jeden echten Decimalbruch, so ist

$$\log.\,A = n + o{\cdot}m = n{\cdot}m \text{ und}$$
$$\log.\left(\frac{A}{10^r}\right) = \log.\,A - \log.\,10^r, \text{ oder}$$
$$\log.\left(\frac{A}{10^r}\right) = n{\cdot}m - r = (n - r) + o{\cdot}m.$$

Es bedeutet aber $\frac{A}{10^r}$ einen Decimalbruch, der r Decimalstellen, oder r Ziffern rechts vom Absonderungszeichen, und n + 1 — r oder n — r + 1 Ziffern in den Stellen für die Ganzen oder links vom Decimalpunkte hat. Soll demnach der Logarithmus eines Decimalbruches gesucht werden, so hat man die Charakteristik nach der Anzahl der Ziffern in den Stellen für die Ganzen und die Mantisse nach dem Zähler A des Decimalbruches zu bestimmen.

Ist n = r, d. h. hat der Decimalbruch $\frac{A}{10^r}$ nur die Stelle der Einser mit einer bedeutenden Ziffer besetzt, so ist $\log.\left(\frac{A}{10^r}\right) = o{\cdot}m$; ist aber $n < r$, also n — r negativ, und z. B. $n - r = -\alpha$, so wird

$$\log.\left(\frac{A}{10^r}\right) = -\alpha + 0{\cdot}m = -(\alpha - 0{\cdot}m)$$

folglich negativ, wie es sein muß. Man könnte nun zwar

$$\log.\left(\frac{A}{10^r}\right) = -(\alpha - 0{\cdot}m) = -(\alpha - 1){\cdot}m'$$

setzen, wenn man die Ergänzung der Mantisse 0·m zur Einheit = m' nimmt, allein man pflegt die negativen Logarithmen zu vermeiden, und schreibt lieber

$$\log. \left(\frac{A}{10^r}\right) = 0{\cdot}m - \alpha,$$

in welcher Form man den Logarithmus einen halbpositiven zu nennen pflegt. Die negative Charakteristik ($-\alpha$) zeigt hier, in der wievielsten Decimalstelle die erste bedeutende Ziffer der Zahl A erscheint.

Es wird demnach der Logarithmus eines ächten Decimalbruches gefunden, wenn man der Mantisse, welche dem Zähler des Bruches zugehört, rechts den Zeiger der ersten bedeutenden Decimalziffer als negative Charakteristik beifügt. — Soll umgekehrt zu einem gegebenen negativen Logarithmus $-(\alpha - 1)\cdot m'$ die entsprechende Zahl aufgefunden werden, so bringe man denselben erst auf die Form $o{\cdot}m - \alpha$ eines halbpositiven Logarithmus, suche die der Mantisse 0·m entsprechende ganze Zahl auf, setze dieser links α Nullen vor, und schneide die letzte Nulle, als Ziffer der Einser, durch das Absonderungszeichen ab.

So findet man nach diesen Regeln z. B. mit Hülfe der Tafeln

$$\begin{aligned}
\log.\ 5376{\cdot}8 &= 3{\cdot}730524\\
\log.\ 537{\cdot}68 &= 2{\cdot}730524\\
\log.\ 53{\cdot}768 &= 1{\cdot}730524\\
\log.\ 5{\cdot}3768 &= 0{\cdot}730524\\
\log.\ 0{\cdot}53768 &= 0{\cdot}730524 - 1\\
\log.\ 0{\cdot}053768 &= 0{\cdot}730524 - 2\\
\log.\ 0{\cdot}0053768 &= 0{\cdot}730524 - 3
\end{aligned}$$

u. s. w.

2. Wenn $\log. A = n{\cdot}m$ ist, so erhält man allgemein

$$\log. A\,.\,10^r = \log. A + r = (n + r)\,m \text{ und}$$

$$\log. \frac{A}{10_r} = \log. A - r = (n - r){\cdot}m.$$

Man mag also eine Zahl A durch eine Potenz von 10 multipliciren oder dividiren, so hat der Logarithmus des Resultates immer dieselbe Mantisse wie die Zahl A.

3. Wie der Logarithmus eines gemeinen Bruches gefunden werde, erhellt aus §. 266, II.; es ist nämlich dort erwiesen worden, daß $\log. \frac{A}{B} = \log. A - \log. B$ sei. Es können aber hier zwei Fälle

Statt finden, nämlich es ist entweder $A \gtrless B$. Ist $A > B$, so muß auch $\log. A > \log. B$ sein, also $\log. A - \log. B = + \delta$, wenn wir die Differenz beider Logarithmen mit δ bezeichnen. So z. B. ist $\log. \frac{5}{2} = \log. 5 - \log. 2 = 0{\cdot}6989700 - 0{\cdot}3010300 = 0{\cdot}3979400$ und

$$\log. \frac{0{\cdot}0876}{{\cdot}0239} = 0{\cdot}9425041 - 2 - (0{\cdot}3783979 - 2)$$
$$= 0{\cdot}9425041 - 2 - 0{\cdot}3783979 + 2 = 0{\cdot}5641062.$$

Ist aber $B > A$, so ist auch $\log. B > \log. A$, und demnach $\log. A - \log. B = - \delta$. So z. B. ist

$$\log. \tfrac{2}{5} = \log. 2 - \log. 5 = 0{\cdot}3010300 - 0{\cdot}6989700$$
$$= -(0{\cdot}6989700 - 0{\cdot}3010300) = -0{\cdot}3979400.$$

Um jedoch auch hier die negativen Logarithmen zu vermeiden, bedient man sich lieber, wegen der Bequemlichkeit im Rechnen, der negativen Charakteristiken (Nr. 1), indem man zum Minuende so viele Einheiten addirt, als nöthig sind, daß die Differenz der gefundenen Logarithmen positiv werde, und dann rückwärts wieder eben so viele Einheiten abzieht. So ist z. B.

$$\log. \tfrac{2}{5} = 0{\cdot}3010300 - 0{\cdot}6989700 = 1{\cdot}3010300 - 0{\cdot}6989700 - 1$$
$$= {\cdot}6020600 - 1.$$

Der Logarithmus eines echten Bruches kann auch dadurch bestimmt werden, daß man den gegebenen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, und dann zu diesem den Logarithmus aufsucht. So z. B. ist

$$\log. \tfrac{2}{5} = \log. 0{\cdot}4 = 0{\cdot}6020600 - 1$$

wie vorhin.

4. Soll der Logarithmus einer gemischten Zahl gefunden werden, so verwandle man diese in einen unechten Bruch, oder in einen Decimalbruch, und verfahre dann, wie oben gelehrt wurde. Z. B.

$$\log. 2\tfrac{1}{2} = \log. \tfrac{5}{2} = \log. 5 - \log. 2 = 0{\cdot}3979400, \text{ oder}$$
$$\log. 2\tfrac{1}{2} = \log. 2{\cdot}5 = 0{\cdot}3979400.$$

§. 271.

Im §. 268 ist schon gezeigt worden, daß die logarithmischen Differenzen immer kleiner werden, je größer die dazu gehörigen Zahlen sind. In den Tafeln sind die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10000 gewöhnlich mit 7 Decimalstellen angegeben. Vergleicht man

nun in solchen Tafeln die Logarithmen von einigen auf einander folgenden Zahlen, so zeigt sichs sogleich, daß die logarithmischen Differenzen immer mehr und mehr sich einander nähern, so daß dieselben, wenn die ihnen entsprechenden Zahlen größer als 1000 sind, nur noch in der letzten Decimale um einige Einheiten von einander unterschieden sind. Liegen aber die Zahlen schon nahe bei 10000, so beträgt der Unterschied ihrer logarithmischen Differenzen in der 7ten Stelle keine ganze Einheit mehr; z. B.

	Logarithm. Differenzen.
log. 1245 = 3·0951694	
	. . . 0·0003486
log. 1246 = 3·0955180	
	. . . 0·0003485
log. 1247 = 3·0958665	
	. . . 0·0003481
log. 1248 = 3·0962146	
	. . . 0·0003478
log. 1249 = 3·0965624	

Es ist ferner

	Logarithm. Differenzen.
log. 9990 = 3·999565$\dot{5}$	
	. . . 0·0000435
log. 9991 = 3·9996090	
	. . . 0·0000434
log. 9992 = 3·9996524	
	. . . 0·0000435
log. 9993 = 3·999695$\dot{9}$	
	. . . 0·0000434
log. 9994 = 3·9997393	

Hier scheinen zwar die Differenzen der angeführten Logarithmen in der 7ten Stelle noch um eine ganze Einheit von einander unterschieden zu sein, welches jedoch nicht der Fall ist, weil die letzten mit einem Puncte versehenen Ziffern corrigirt (indem auf dieselben Ziffern folgen, die > 5), und also etwas zu groß sind.

Vergleicht man endlich die Logarithmen von einigen auf einander folgenden Zahlen, die größer als 1000, aber um keine ganze Einheit von einander verschieden sind, so sind die Differenzen der ihnen entsprechenden Logarithmen in den sieben ersten Decimalen beinahe vollkommen gleich. Z. B.:

	Logarithm. Differenzen.
log. 1245 = 3·095169$\dot{4}$	
	. . . 0·0000697
log. 1245·2 = 3·0952391	
	. . . 0·0000698
log. 1245·4 = 3·095308$\dot{9}$	
	. . . 0·0000697
log. 1245·6 = 3·0953786	
	. . . 0·0000697
log. 1245·8 = 3·0954483	
	. . . 0·0000697
log. 1246 = 3·0955180	

Die mit Punkten bezeichneten Ziffern sind wieder corrigirte.

Aus dem Gesagten folgt nun, daß bei Zahlen, welche größer als 1000, und um keine Einheit mehr von einander verschieden sind, die Differenzen der Zahlen sich (beinahe) zu einander verhalten, wie die Unterschiede der dazu gehörigen Logarithmen. Z. B.:

$$(1246 - 1245) : (1245{\cdot}6 - 1245) = (\log. 1246 - \log. 1245) : (\log. 1245{\cdot}6 - \log. 1245);$$ d. i.

$$1 : 0{\cdot}6 = (3{\cdot}0955180 - 3{\cdot}0951694) : (3{\cdot}0953786 - 3{\cdot}0951694),$$

oder $1 : 0{\cdot}6 = 0{\cdot}0003486 : 0{\cdot}0002092.$

Da nun $0{\cdot}6 \times 0{\cdot}0003486 = 0{\cdot}00020916 = 0{\cdot}0002092$, wenn man bei 7 Decimalstellen stehen bleibt, so beträgt der Fehler nur $\frac{4}{10^8}$.

Mit Hülfe dieses Satzes ist man nun im Stande, den Logarithmus einer Zahl zu finden, welche die Grenze der Tafeln übersteigt. Gesetzt, man hätte eine Tafel, in welcher nur die Logarithmen von 1 bis 10000 mit sieben Decimalstellen enthalten wären, und man sollte aus jener Log. 478569 bestimmen, so verfahre man auf folgende Art: Man schneide von der gegebenen Zahl so viele Ziffern als Decimalen ab, daß die von den übrigen Ziffern bezeichnete ganze Zahl noch in der Tafel gefunden wird. Zu dieser so veränderten Zahl suche man nach §. 270 den entsprechenden Logarithmus, woraus dann jener der unveränderten gegebenen Zahl durch bloße Aenderung der Charakteristik gefunden wird. Man suche also in unserem gegebenen Falle log. 4785·69. Es ist aber

$$\log. 4785{\cdot}69 > \log. 4785 \text{ und } < \log. 4786,$$

es sei also

$$\log. 4785{\cdot}69 = \log. 4785 + x;$$

und da diese drei auf einander folgenden Zahlen um keine ganze Einheit von einander unterschieden sind, so ist nach obigem Satze

$$(4786 - 4785) : (4785{\cdot}69 - 4785) = (\log. 4786 - \log. 4785) : (\log. 4785{\cdot}69 - \log. 4785),$$ oder

$$1 : 0{\cdot}69 = (3{\cdot}6799727 - 3{\cdot}6798819) : x,$$

wenn man statt log. 4785·69 seinen Werth setzt, oder

$$1 : 0{\cdot}69 = 0{\cdot}0000908 : x,$$

woraus $x = 0{\cdot}000062652$ gefunden wird; und weil man nur sieben Decimalen beibehalten will, so ist $x = 0{\cdot}0000627$, und daher durch Substitution

$$\log.\ 4785{\cdot}69 = 3{\cdot}6798819 + 0{\cdot}0000627 = 3{\cdot}6799446;$$
folglich $\log.\ 478569 = 5{\cdot}6799446$ (§. 268).

Hierauf beruht die Berechnung der Proportionaltheile, welche in guten Logarithmen-Tafeln, um der Bequemlichkeit willen, auf jedem Blatte für die dort herrschenden Differenzen beigefügt sind.

Ist umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmus q, welcher in den Tafeln nicht genau enthalten ist, die entsprechende Zahl x zu finden, so suche man den nächst kleineren Logarithmus p, dessen entsprechende Zahl $= a$ sein soll, und den nächst größeren r, welchem demnach die Zahl $a + 1$ entspricht. Da nun $x > a$ und $x < a + 1$ sein muß, so wird $x = a + y$ sein, wo $y < 1$, und man findet y aus folgender Proportion, deren Gültigkeit nun von selbst erhellt:

$$r - p : q - p = 1 : y;$$

also

$$y = \frac{q-p}{r-p} \text{ und daher } x = a + \frac{q-p}{r-p}.$$

Es sei z. B. $\log. x. = 4{\cdot}4590264 = q$. Nun findet man in den Tafeln

$$p = 4{\cdot}4590153 = \log.\ 28775 = \log.\ a \text{ und}$$
$$r = 4{\cdot}4590304 = \log.\ 28776 = \log.\ (a + 1),$$

also ist, weil $x > a$ und $< a + 1$ sein muß,

$$0{\cdot}0000151 : 0{\cdot}0000111 = 1 : y \text{ oder } 151 : 111 = 1 : y,$$
$$\text{also } y = \tfrac{111}{151} = 0{\cdot}735\ldots; \text{ folglich}$$
$$x = 28775{\cdot}735\ldots$$

§. 272.

Von der decadischen Ergänzung.

Die decadische Ergänzung, oder das arithmetische Complement ist die Differenz zwischen einer gegebenen Zahl und der nächst höheren decadischen Einheit. So z. B. ist 4 das arithmetische Complement von 6, weil $10 - 6 = 4$, oder $6 + 4 = 10$ ist, und eben so ist $25 =$ dec. Erg. von 75, weil $100 - 75 = 25$, oder $75 + 25 = 100$. Die decadische Ergänzung eines Logarithmus ist demnach der Unterschied zwischen 10 und dem gegebenen Logarithmus. So z. B. ist $\log.\ 347 = 2{\cdot}5403295$, und daher

$$\text{dec. Erg. log. } 347 = 10 - 2{\cdot}5403295 = 7{\cdot}4596705,$$

also auch umgekehrt

$$\log. 347 = 10 - \text{dec. Erg. } \log. 347 = 10 - 7.4596705.$$

Da nun

$$\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b \text{ und } \log. b = 10 - \text{dec. Erg. } \log. b,$$

so ist auch

$$\log. \frac{a}{b} = \log. a - (10 - \text{dec. Erg. } \log. b) = \log. a + \text{dec. Erg. } \log. b - 10;$$

woraus man sieht. daß durch diesen Kunstgriff die Subtraction in eine Addition verwandelt wird. So z. B. ist

$$\log. \tfrac{7}{36} = \log. 7 - \log. 36 = \log. 7 + \text{dec. Erg. } \log. 36 - 10,$$

$$\begin{array}{rcl} = 0{\cdot}8450980 & \text{oder} & 0{\cdot}8450980 \ldots = \log. 7 \\ -\ 1{\cdot}5563025 & + & 8{\cdot}4436975 - 10 = \log. 36 \\ \hline -\ 0{\cdot}7112045 & = & 0{\cdot}2887955 - 1. \end{array}$$

Eben so, wenn $x = \frac{349 \times 70829}{4567 \times 9{\cdot}8346}$, ist

$$\log. x = \log. 349 + \log. 70829 - \log. 4567 - \log. 9{\cdot}8346,$$

und weil

$$\begin{array}{lcl} \log. \ 349 = 2{\cdot}5428254 \\ \log. 70829 = 4{\cdot}8502111 \end{array} \Big\} \quad \begin{array}{lcl} \text{oder} & & \\ \ldots\ldots & = & 7{\cdot}3930365 \\ -\ \log. 4567 & = & -\ 3{\cdot}6596310 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{dec. Erg. } \log. \ 4567 = 6{\cdot}3403690 \\ \text{dec. Erg. } \log. 9{\cdot}8346 = 9{\cdot}0072433 \end{array} \Big\} \quad -\ \log. 9{\cdot}8346 = -\ 0{\cdot}9927567$$

$$\text{so ist } \log. x = 22{\cdot}7406488 - 2 \,.\, 10 \qquad = +\ 2{\cdot}7406488$$

Es wurden hier von der Charakteristik der gefundenen Summe so viele Zehner abgezogen, wie viele decadische Ergänzungen addirt wurden.

Zieht man einen Logarithmus mit einer negativen Charakteristik von 10 ab, so wird diese positiv, und muß demnach zum Complemente addirt werden.

So z. B. ist, da

$$\log. 0{\cdot}00748 = 0{\cdot}8739016 - 3,$$

$$\text{dec. Erg. } \log. 0{\cdot}00784 = 10 - (0{\cdot}8739016 - 3),$$

$$= 12{\cdot}1260984.$$

Wäre nun $x = \frac{9 \ 33504}{0{\cdot}00748}$, so ist, weil

$$\begin{aligned}
& \log.\ 9{\cdot}33504 = 0{\cdot}9701162 \quad \text{und} \\
\text{dec. Erg.}\ & \log.\ 0{\cdot}00748 = 12{\cdot}1260984, \\
\hline
& \log.\ x = 13{\cdot}0962146 - 10 = 3{\cdot}0962146 \\
& x = 1248.
\end{aligned}$$

Wäre $x = \frac{378749 \times 0{\cdot}8695}{8324 \times 729 \times 5{\cdot}683}$, so ist, weil

$$\begin{aligned}
& \log.\ 378749 = 5{\cdot}5783515 \\
& \log.\ 0{\cdot}8695 = 0{\cdot}9392696 - 1 \\
\text{dec. Erg.}\ & \log.\ 8324 = 6{\cdot}0796679 \\
\text{dec. Erg.}\ & \log.\ 729 = 7{\cdot}1372725 \\
\text{dec. Erg.}\ & \log.\ 5{\cdot}683 = 9{\cdot}2454223 \\
\hline
& \log.\ x = 28{\cdot}9799838 - 31 \\
& \quad = 0{\cdot}9799838 - 3 = \log.\ {\cdot}00954957 \\
& \quad 9806 \\
\hline
& \quad 32, \text{ folglich} \\
& x = 0{\cdot}00954957.
\end{aligned}$$

Ohne Gebrauch der decadischen Ergänzung steht die Rechnung also:

$$\begin{aligned}
\log.\ 378749 &= 5{\cdot}5783515 \\
\log.\ 0{\cdot}8695 &= 0{\cdot}9392696 - 1 \\
&\quad\ 6{\cdot}5176211 - 1 \\
&\quad + 2 \qquad\qquad - 2 \\
- \log.\ 8324 &= - 3{\cdot}9203321 \\
- \log.\ 729 &= - 2{\cdot}8627275 \\
- \log.\ 5{\cdot}683 &= - 0{\cdot}7545777 \\
\hline
\log.\ x &= 0{\cdot}9799838 - 3.
\end{aligned}$$

Meiner Meinung nach gewährt der Gebrauch des arithmetischen Complements nicht die große Bequemlichkeit im Rechnen, welche man demselben beizulegen pflegt.

§. 273.

Zur Uebung im Rechnen mit Logarithmen mögen noch folgende Beispiele dienen.

I. Den Werth des Bruches

$$\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{123}{17}\right)^4}{\left(\frac{8}{17}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{17}\right)^2} = x$$

zu bestimmen.

Es ist

$$x = \frac{5^3 \cdot 123^5 \cdot 17^2 \cdot 13^4}{8^2 \cdot 7^4 \cdot 7^5 \cdot 17^3} = \frac{5^3 \cdot 123^5 \cdot 13^4}{8^2 \cdot 7^7 \cdot 17^3}.$$

Weil nun

$$\begin{array}{lcl} 3 \log. 5 & = 3 \times 0{\cdot}6989700 = & 2{\cdot}0969100 \\ 5 \log. 123 & = 5 \times 2{\cdot}0899051 = & 10{\cdot}4495255 \\ 4 \log. 13 & = 4 \times 1{\cdot}1139434 = & 4{\cdot}4557736, \end{array}$$

also $3 \log, 5 + 5 \log, 123 + 4 \log. 13 = 17{\cdot}0022091 = S$ und

$$\begin{array}{l} -2 \log. 8 = -2 \times 0{\cdot}9030900 = -1{\cdot}8061800 \\ -7 \log. 7 = -7 \times 0{\cdot}8450980 = -5{\cdot}9156860 \\ -3 \log. 17 = -3 \times 1{\cdot}2304489 = -3{\cdot}6913467 \end{array}$$

so ist $\log. x = 5{\cdot}5889964 = \log. 388147{\cdot}2$

$$\begin{array}{r} -\ 9884 \\ \hline 80 \\ -\ 78 \\ \hline 20 \end{array}$$

, folglich

$$x = 388147{\cdot}2.$$

Gebraucht man die arithmetische Ergänzung, so steht die Rechnung also:

$$\begin{array}{lcl} & S = & 17{\cdot}0022091 \\ \text{dec. Erg. log. } 8^2 & = & 8{\cdot}1938200 \\ \text{dec. Erg. log. } 7^7 & = & 4{\cdot}0843140 \\ \text{dec. Erg. log. } 17^3 & = & 6{\cdot}3089533 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. x = 35{\cdot}5889964 - 30 = 5{\cdot}5849964$$

II. Aus der Zahl 3756 die Kubikwurzel mittelst Logarithmen zu bestimmen.

Es ist

$$\log. \sqrt[3]{3756} = \tfrac{1}{3} \log. 7356 = \tfrac{1}{3} . 3{\cdot}5747256 = 1{\cdot}1915752,$$

zu welchem Logarithmus die Zahl 15·5444 . . . gehört, nämlich es ist

$$\sqrt[3]{3756} = 15{\cdot}5444 \ldots\ldots$$

III. Aus der Zahl 0·07894 die fünfte Wurzel zu ziehen.

Es ist

$$\log. \sqrt[5]{0{\cdot}07894} = \tfrac{1}{5} \log. 0{\cdot}07894 = \tfrac{1}{5}(0{\cdot}8972971 - 2) = 0{\cdot}1794594 - \tfrac{2}{5}.$$

Weil nun beim Gebrauche der Logarithmentafeln vorausgesetzt wird, daß die Charakteristiken immer ganze Zahlen seien, so muß man die negative Charakteristik um so viele Einheiten vermehren, daß sie durch den gegebenen Divisor theilbar werde, und damit der Logarithmus unverändert bleibe, so hat man den positiven Theil desselben um eben so viele Einheiten zu vermehren.

Es ist daher

$$\log. \sqrt[5]{0\cdot07894} = \frac{3\cdot8972971 - 5}{5} = 0\cdot7794594 - 1 = \log. 0\cdot60181,$$

d. i.

$$\sqrt[5]{0\cdot07894} = 0\cdot60181.$$

IV. Es sei

$$x = 47^3 \left(\tfrac{13}{19}\right)^{\frac{6}{7}};$$

man bestimme x mittelst Logarithmen.

Es ist hier

$$\log. x = 3 \log. 47 + \tfrac{6}{7} (\log. 17 - \log. 19).$$

Da nun

$$\begin{array}{rcrl} \log. 13 & = & 1\cdot1139434 & \\ -\log. 19 & = & -1\cdot2787536 & \\ \hline \log. \frac{13}{19} & = & 0\cdot8351898 & -1 \\ 6. \log. \frac{13}{19} & = & 5\cdot0111388 & -6 \\ & & +1 & -1 \\ \hline & = & 6\cdot0111388 & -7, \end{array}$$

also

$$\tfrac{6}{7} \log. \tfrac{13}{19} = \frac{6\cdot0111388 - 7}{7} = 0\cdot8587341 - 1; \text{ hierzu addirt}$$

$$\begin{array}{rcl} 3 \log. 47 & = & 5\cdot0162937, \text{ so ist} \\ \hline \log. x & = & 4\cdot8750278 = \log. 74994\cdot2, \\ & & 0265 \\ \hline & & 13 \end{array}$$

nämlich es ist $x = 74994\cdot2$.

V. Es sei $x = \dfrac{2\sqrt[3]{5\sqrt{7}}}{3\sqrt{\dfrac{3}{3\sqrt{2}}}}$, welcher Werth mit Hilfe der Logarithmen zu entwickeln ist.

Es ist hier

$$\log. x = \log. 2 + \tfrac{1}{3}(\log. 5 + \tfrac{1}{2}\log. 7) - [\log. 3 + \tfrac{1}{2}(\log. 3 + \tfrac{1}{3}\log. 2)].$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\log. 5 &= 0{\cdot}6989700,\ \log. 7 = 0{\cdot}8450980,\ \text{also}\\
\tfrac{1}{2}\log. 7 &= 0{\cdot}4225490\\
\hline
\log. 5 + \tfrac{1}{2}\log. 7 &= 1{\cdot}1215190\ \text{und}\\
\tfrac{1}{3}(\lg. 5 + \tfrac{1}{2}\lg. 7) &= 0{\cdot}3738396\\
+ \log. 2 &= 0{\cdot}3010300\\
\hline
\text{daher}\ 0{\cdot}6748696 &= A.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\log. 3 &= 0{\cdot}4771213\ \text{und}\ \log. 2 = 0{\cdot}3010300,\ \text{also}\\
\tfrac{1}{3}\log. 2 &= 0{\cdot}1003433,\\
\hline
\log. 3 + \tfrac{1}{3}\log. 2 &= 0{\cdot}5774646\ \text{und}\\
\tfrac{1}{2}(\lg. 3 + \tfrac{1}{3}\lg. 2) &= 0{\cdot}2887323\\
+ \log. 3 &= 0{\cdot}4771213\\
\hline
\text{daher}\ 0{\cdot}7658536 &= B\\
0{\cdot}6748696 &= A\\
+1 \qquad &-1\\
\hline
\text{also}\ \log. x = 0{\cdot}9090160 - 1 &= \log. 0{\cdot}810991\\
-\ 0155 &\\
\hline
5. &
\end{aligned}$$

Man könnte hier, weil nur kleine Zahlen gegeben sind, auch auf folgende Art verfahren. Es ist

$$x = \frac{2\sqrt[3]{5\sqrt{7}}}{3\sqrt{3\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt[3]{40\sqrt{7}}}{\sqrt{27\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt[6]{1600\ .\ 7}}{\sqrt[6]{19683\ .\ 2}} = \sqrt[6]{\frac{5600}{19683}};\ \text{also}$$

$$\log. x = \frac{\log. 5600 - \log. 19683}{6};\ \text{aber es ist}$$

$$\begin{aligned}
& \qquad\qquad +1 \qquad\qquad -1\\
\log.\ 5600 &= \quad 3{\cdot}7481880\\
-\log.\ 19683 &= -\ 4{\cdot}2940913\\
\hline
\log. 5600 - \log. 19683 &= \quad 0{\cdot}4540967 - 1\\
& \qquad +5 \qquad\qquad -5\\
\hline
&= \quad 5{\cdot}4540967 - 6,\ \text{also}
\end{aligned}$$

$$\log. x = \frac{5{\cdot}4540967 - 6}{6} = 0{\cdot}9090161 - 1.$$

§. 274.

Aufgabe.

Man habe die logarithmische Gleichung

$$\log. y = \tfrac{2}{3}\log.(a+x) - \log. 5 - \tfrac{7}{2}\log. a + \tfrac{2}{3}\log.(a-x) - \tfrac{1}{2}\log. x;$$

man soll die Gleichung finden, durch deren logarithmische Darstellung dieser gegebene Ausdruck gefunden wurde.

Auflösung.

Es ist

$$\log. y = \tfrac{2}{3}[\log.(a+x) + \log.(a-x)] - (\log. 5 + \tfrac{7}{2}\log. a + \tfrac{1}{2}\log. x)$$

$$= \tfrac{2}{3}\log.(a+x)(a-x) - (\log. 5 + \log.\sqrt{a^7} + \log.\sqrt{x})$$

$$= \log.\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2} - \log. 5\sqrt{a^7 x}$$

$$= \log.\frac{\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}{5\sqrt{a^7 x}} = \log.\frac{\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}{5a^3\sqrt{ax}};\text{ also}$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}{5a^3\sqrt{ax}}.$$

Der Anfänger thut wohl daran, sich in der Auflösung solcher Aufgaben zu üben, um sich die gegebenen Regeln geläufig zu machen.

Zur Uebung noch folgende Aufgabe.

Aus welcher Gleichung wurde folgender Ausdruck erhalten?

$$x = \frac{\log.(n \pm \sqrt{n^2+4mp}) - \log. a - \log. 2}{3\log. a}.$$

Viertes Kapitel.

Anwendung der Progressionen und der Logarithmen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 275.

Aufgabe.

Es hat jemand ein Gefäß, dessen Rauminhalt $= A$ ist, welches mit einer Mischung von Wein und Wasser angefüllt ist. Wenn er nun immer a Theile der Mischung hinwegnimmt, und den Abgang jedesmal mit Wasser ergänzt, so entsteht die Frage, wie viel reiner Wein ist noch in der Mischung vorhanden, wenn jene Operation nmal wiederholt wurde.

Auflösung.

Man nehme an, es seien Anfangs W Theile Wein in der ganzen Mischung A vorhanden gewesen. Weil wir nun eine durchaus gleichförmige Mischung voraussetzen, d. i. weil wir annehmen, daß das quantitative Verhältniß des Weines zum Wasser in jedem einzelnen Theile der Mischung dasselbe sei, wie in der ganzen Mischung, so müssen die in A und a enthaltenen Theile Weines sich direkte wie diese Volumina verhalten, d. i. es muß $A : a = W : y$ sein, woraus $y = \frac{a . W}{A}$ gefunden wird, nämlich das erste Mal wurden $\frac{aW}{A}$ Theile reinen Weines hinweggenommen, und demnach blieben nur

$$W - \frac{aW}{A} = \frac{W(A-a)}{A}$$

Theile Weines zurück. Da nun der ganze Abgang mit Wasser ersetzt wird, also das Volumen der Mischung unverändert bleibt, so ist

$$A : a = \frac{W(A-a)}{A} : y', \text{ also}$$

$$y' = \frac{aW(A-a)}{A^2},$$

d. i. in der Quantität a, die zum zweiten Male hinweggenommen

wurde, sind nur $\frac{aW(A-a)}{A^2}$ Theile reinen Weines. Der Rest des Weines im Gefäße ist daher

$$= \frac{W(A-a)}{A} - \frac{aW(A-a)}{A^2} = \frac{AW(A-a) - aW(A-a)}{A^2} = \frac{W(A-a)^2}{A^2}.$$

Auf ähnliche Art wird man finden, daß

nach der dritten Wegnahme von a Theilen noch $\frac{W(A-a)^3}{A^3}$,

" " vierten " " " " $\frac{W(A-a)^4}{A^4}$,

" " fünften " " " " $\frac{W(A-a)^5}{A^5}$,

. . . .

" " nten " " " " $\frac{W(A-a)^n}{A^n}$

Theile reinen Weines vorhanden seien.

Bezeichnet man den letzten Rest mit R, so hat man die Gleichung

$$R = \frac{W(A-a)^n}{A^n} = W\left(\frac{A-a}{A}\right)^n = W\left(1 - \frac{a}{A}\right)^n.$$

Weil $a < A$, also $\frac{a}{A} < 1$, so ist auch $1 - \frac{a}{A} < 1$, und daher wird $\left(1 - \frac{a}{A}\right)^n$ desto kleiner werden, je größer n wird (§. 121, Zus. 2), ohne jedoch verschwinden zu können, d. i. wenn auch $\left(1 - \frac{a}{A}\right)^n$ noch so klein ist, so läßt sich doch kein Werth denken, der für n gesetzt den Werth $R = 0$ machen könnte; folglich wird immer noch etwas Wein in der Mischung vorhanden sein, wenn man auch unendlich oft dieselbe um das Volumen a vermindert, und den Abgang wieder durch Wasser ersetzt.

Ist das ganze Gefäß Anfangs mit Wein gefüllt, so setze man nur $W = A$, und es ist dann $R = W\left(1 - \frac{a}{W}\right)^n$.

Zur Erläuterung unserer Formel folgendes Beispiel:

Ein Wirth hat ein Faß Wein von 100 Eimern, wovon jeder p fl. (= 36 fl.) werth ist. Er verkauft mehrmals einen Eimer aus jenem Fasse, und ergänzt den Abgang jederzeit mit Wasser. Wie oft kann er dieses thun, damit der Eimer der ganzen Mischung noch q fl. (= 24 fl.) werth ist?

Man setze in der Formel $W\left(1 - \frac{a}{A}\right)^n$ hier $W = A = 100$ und $a = 1$, so ist $R = 100\,(1 - \frac{1}{100})^n = 100\,(0{\cdot}99)^n$, d. i. nach dem nten Abzapfen befinden sich noch $100\,(0{\cdot}99)^n$ Eimer reinen Weines in der Mischung, deren Volumen $= 100$ Eimer. Da nun 1 Eimer des reinen Weines p fl. werth ist, so ist der Werth von R offenbar $= 100\,p\,(0{\cdot}99)^n$, und weil der Eimer der letzten erhaltenen Mischung q fl. werth sein soll, so ist deren gesammter Werth $= 100 \,.\, q$; folglich muß

$$100\,p\,(0{\cdot}99)^n = 100\,q \text{ sein, oder}$$
$$p\,(0{\cdot}99)^n = q, \text{ und durch Substitution}$$
$$36\,(0{\cdot}99)^n = 24, \text{ oder}$$
$$(0{\cdot}99)^n = \tfrac{2}{3}, \text{ also}$$
$$n \log. 0{\cdot}99 = \log. 2 - \log. 3,$$
$$n = \frac{\log. 2 - \log. 3}{\log. 0{\cdot}99} = \frac{0{\cdot}3010300 - 0{\cdot}4771213}{0{\cdot}9956352 - 1} \text{ oder}$$
$$n = \frac{0{\cdot}4771213 - 0{\cdot}3010300}{1 - 0{\cdot}9956352} = \frac{0{\cdot}1760913}{0{\cdot}0043648} = 40{\cdot}34\ldots$$

Wiederholt man also jenes Abzapfen 40 Mal, so ist der Eimer noch etwas mehr werth als 24 fl.; wird es aber 41 Mal wiederholt, so ist der Eimer nicht mehr 24 fl. werth.

§. 276.

Aufgabe.

Man zerlege jedes Glied einer geometrischen Progression in m solche Theile, daß alle diese Theile wieder in einer zusammenhängenden Progression stehen, und folglich eine Reihe von mmal so vielen Gliedern erhalten werde, als die gegebene hat.

Auflösung.

Die gegebene Progression sei

$$\div\!\!\div\; a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots$$

das erste Glied der gesuchten Reihe sei $= x$, und der Exponent derselben $= y$, also

$$\div\!\!\div\; x : xy : xy^2 : xy^3 : \ldots : xy^{m-1} : xy^m : xy^{m+1} : xy^{m+2} : \ldots$$
$$\ldots : xy^{2m-1} : xy^{2m} : \ldots,$$

so ist den Bedingungen der Aufgabe zur Folge

$$\text{A. } x + xy + xy^2 + xy^3 + \ldots + xy^{m-1} = a,$$

$$\text{B. } xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{2m-1} = aq, \text{ oder}$$

$$y^m (x + xy + xy^2 + \ldots + xy^{m-1} = aq,$$

welche Gleichung durch A dividirt folgende gibt:

$$\frac{y^m (x + xy + xy^2 + \ldots)}{x + xy + xy^2 + \ldots} = y^m = \frac{aq}{a} = q;$$

also $y = \sqrt[m]{q}$. Aus A. folgt $\frac{x(y^m - 1)}{y - 1} = a$ (§. 260, III.), also

$$x = \frac{a(y-1)}{y^m - 1}, \text{ oder durch Substitution}$$

$$x = \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)}{q - 1}.$$

Die gesuchte Reihe ist demnach folgende:

$$\div \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)}{q - 1} : \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q}}{q - 1} : \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q^2}}{q - 1} : \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q^3}}{q - 1} : \ldots$$

Folgendes Beispiel diene zur Erläuterung:

Man soll jedes Glied der Progression

$$\div 1 : 81 : 81^2 : 81^3 : 81^4 : \ldots$$

in vier Theile zerlegen, so daß diese zusammengenommen wieder eine geometrische Progression bilden.

Hier ist $a = 1$, $q = 81$, $m = 4$, also $\sqrt[m]{q} = \sqrt[4]{81} = 3$, $q - 1 = 80$ und $\sqrt[m]{q} - 1 = 3 - 1 = 2$; also ist die gesuchte Progression folgende:

$$\div \tfrac{1}{40} : \tfrac{3}{40} : \tfrac{9}{40} : \tfrac{27}{40} : \tfrac{81}{40} : \tfrac{243}{40} : \ldots\ldots$$

Sucht man die Summe s von n Gliedern der Reihe

$$\div \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)}{q - 1} : \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q}}{q - 1} : \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q^2}}{q - 1} : \ldots : \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q^{n-1}}}{q - 1},$$

so ist

$$s = \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)}{q - 1} \cdot \frac{\sqrt[m]{q^n} - 1}{\sqrt[m]{q} - 1} = \frac{a(\sqrt[m]{q^n} - 1)}{q - 1} \text{ oder}$$

$$s = \frac{a(q^{\frac{n}{m}} - 1)}{q - 1},$$

welche Formel auch erhalten wird, wenn man in der allgemeinen Summenformel für geometrische Progressionen (§. 260) nur $\frac{n}{m}$ statt n substituirt. So ist z. B. in dem vorhin angeführten besonderen Falle die Summe von acht Gliedern

$$s = \frac{1 . (81^{\frac{8}{4}} - 1)}{81 - 1} = \frac{81^2 - 1}{81 - 1} = 81 + 1 = 82,$$

oder was dasselbe ist,

$$s = \frac{\frac{1}{40}(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{6560}{40 . 2} = \frac{656}{8} = 82.$$

Ist demnach in der allgemeinen Summenformel einer geometrischen Progression n eine gebrochene Zahl, so zeigt dieß an, daß jedes Glied der gegebenen Reihe in so viele Theile zerlegt werden soll, als der Nenner jenes Bruches anzeigt, und daß in der so gefundenen Reihe so viele Glieder zu summiren seien, als der Zähler eben jenes Bruches andeutet.

Zur Uebung noch folgendes Beispiel.

Ein Edelmann kaufte von einem Goldarbeiter einen sehr schönen Becher auf folgende Art: Für das erste Loth zahlte er 1 fl., für das zweite Loth 2 fl., und so für jedes folgende Loth zweimal so viel, als für das vorhergehende. Wenn nun der Becher $10\frac{1}{2}$ Loth wog, wie viel mußte der Edelmann bezahlen?

Hier ist $a = 1$, $q = 2$, $\frac{n}{m} = 10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$, nämlich $n = 21$ und $m = 2$; folglich ist durch Substitution

$$s = \frac{1\,(2^{21:2} - 1)}{2 - 1} = \sqrt{2^{21}} - 1 = 2^{10}\sqrt{2} - 1 = 1448{\cdot}155 - 1$$
$$= 1447{\cdot}155 \text{ fl.}$$

Da nämlich die Werthe der ganzen Lothe in einer geometrischen Progression wachsen, so müssen auch die Werthe ihrer Theile nach einem solchen Gesetze steigen: z. B. die Werthe der einzelnen Quentchen, oder die Werthe der halben Lothe.

Man hüte sich vor der irrigen Vorstellung, als wenn der gebrochene Exponent $\frac{21}{2}$ ausdrücke, daß man $10\frac{1}{2}$ Glieder, d. i. 10 Glieder und die Hälfte des 11ten Gliedes summiren sollte, und erinnere sich der oben angegebenen Bedeutung dieses gebrochenen Exponenten.

Hätte der Becher gerade nur 10 Lothe gewogen, so würde er, den angegebenen Bedingungen gemäß, 1023 fl. gekostet haben, und demnach beträgt der Werth des nächsten halben Lothes

$$1447{\cdot}155 - 1023 = 424{\cdot}155 \text{ fl.}$$

Hätte man aber die Hälfte des Werthes des 11ten Lothes, welcher = 1024 fl. gefunden wird, nehmen wollen, so würde der Werth des letzten (21sten) halben Lothes 512 fl., und daher um 87·845 fl. zu viel betragen.

§. 277.

Aufgabe.

Ein Kapital a liegt zu p Prozenten an, und die jährlichen Interessen werden jedesmal zum Kapitale geschlagen. Wie groß wird auf diese Art jenes Kapital nach n Jahren werden?

Auflösung.

Der Aufgabe gemäß hat man die Proportion

$$100 : a = 100 + p : x' \text{ oder}$$

$$1 : a = 1 + \frac{p}{100} : x';$$

d. h. aus 1 fl. Kapital wird in einem Jahre $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ fl., wie viel fl. werden aus dem Kapitale a? Hieraus folgt $x' = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, oder wenn man $1 + \frac{p}{100} = q$ setzt, $x' = aq$. Diese Größe ist nun das Kapital für das zweite Jahr und man hat

$$1 : aq = q : x'', \text{ also } x'' = aq^2,$$

wodurch das Kapital sammt Interessen am Ende des zweiten Jahres bezeichnet wird. Auf dieselbe Art findet man, daß das Kapital sammt Zinsen

am Ende des 3ten Jahres $= aq^3$,
" " " 4ten " $= aq^4$,
" " " 5ten " $= aq^5$,
. . . . und allgemein
" " " nten " $= aq^n$ sein wird.

Bezeichnen wir nun den Werth, zu welchem das Kapital in n Jahren angewachsen ist, durch s, so ist

$$s = aq^n, \text{ also auch}$$

$$\log. s = \log. a + n \log. q, \text{ oder durch Substitution}$$

$$\log. s = \log. a + n \log. (100 + p) - n \log. 100, \text{ d. i.}$$

$$\log. s = \log. a + n \log. (100 + p) - 2n.$$

Sind drei von den Größen s, a, p und n gegeben, so kann die vierte Unbekannte immer mit Hülfe dieser Formel gefunden werden. Wir haben nämlich folgende vier Gleichungen, mittelst welchen alle hierher gehörigen Aufgaben gelöst werden:

$$\text{I.} \quad \log. s = \log. a + n \log. (100 + p) - 2n,$$

$$\text{II.} \quad \log. a = \log. s + 2n - n \log. (100 + p),$$

$$\text{III.} \quad n = \frac{\log. s - \log. a}{\log. (100 + p) - 2)},$$

$$\text{IV.} \quad \log. (100 + p) = \frac{\log. s + 2n - \log. a}{n} = \frac{\log. s - \log. a}{n} + 2.$$

Aus log. (100 + p) wird die entsprechende Zahl 100 + p, und hieraus p gesucht.

Wäre n eine gemischte Zahl, z. B. $n = m + \frac{1}{\mu}$, so ist nach Verlauf von n Jahren nicht

$$s = aq^n = aq^{m + \frac{1}{\mu}} = aq^m \sqrt[\mu]{q},$$

wovon man sich leicht auf folgende Art überzeugen kann.

Nach m Jahren ist das Kapital sammt Zinsen $= aq^m$, und diese Summe liegt nur durch $\frac{1}{\mu}$ Theile eines Jahres an, daher ist

$$1 : aq^m = 1 + \frac{p}{\mu . 100} : y,$$

d. h. nach $n = m + \frac{1}{\mu}$ Jahren ist

$$S = aq^m \left(1 + \frac{p}{100\mu}\right) = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m \left(1 + \frac{p}{100\mu}\right),$$

welcher Ausdruck von dem obigen

$$a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{m + \frac{1}{\mu}} = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m \sqrt[\mu]{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

verschieden ist, wovon man sich auch durch die Berechnung besonderer Beispiele überzeugen kann.

Es ist nicht selten der Fall, daß die Interessen halbjährig, vierteljährig, oder wohl gar monatlich erlegt werden, für welchen Fall unsere Formel auf folgende Art modificirt werden muß. Man setze allgemein, daß die Interessen in kleineren Zeiträumen $= \frac{1}{\nu}$ Jahren zu entrichten seien, so hat man unter den obigen Voraussetzungen

$$100 : a = 100 + \frac{p}{\nu} : x'; \text{ also}$$

$$x' = \frac{a\left(100 + \frac{p}{\nu}\right)}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100\nu}\right),$$

und nach r solchen Zeiträumen ist dann

$$\text{(B)} \quad s = a\left(1 + \frac{p}{100\nu}\right)^{r}.$$

Den Gebrauch dieser Formeln wird man aus folgenden Beispielen kennen lernen.

Beispiel 1.

Ein Vormund legt für seinen Pupillen ein Kapital von 24000 fl. $= a$ zu 5 Proc. so an, daß die jährlich zu entrichtenden Zinsen wieder zum Kapitale geschlagen werden. Wenn nun der Pupille nach 15 Jahren großjährig wird, auf wie viel Vermögen hat er Anspruch zu machen?

Hier ist $a = 240000$, $n = 15$ und $p = 5$, und demnach ist durch Substitution in der Formel I.:

$$\log. s = \log. 2400 0 + 15 \log. 105 - 30,$$

$$\begin{array}{rl} \log. s = & 4{\cdot}3802112 \\ + & 30{\cdot}3178395 - 30 \\ \hline \log. s = & 4{\cdot}6980507 = \log. 49894{\cdot}28 \\ & -0483 \\ \hline & 24 \\ & -17 \\ \hline & 7{\cdot}0, \end{array}$$

also $s = 49894{\cdot}28$ fl.

Beispiel 2.

Wie groß muß das Kapital sein, welches zu 4 Proc. auf Zins von Zins angelegt in 12 Jahren zu 50000 fl. anwächst?

Hier ist a unbekannt, aber $s = 50000$, $p = 4$ und $n = 12$, also durch Substitution in der Formel II.:

$$\begin{aligned}
\log. a &= \log. 50\,000 + 24 - 12 \log. 104, \\
&= 4{\cdot}6989700 \\
&\quad + 24{\cdot} \\
&\quad - 24{\cdot}2043996 \\
\log. a &= 4{\cdot}4945704 = \log. 31229{\cdot}89 \\
&\qquad - 5581 \\
&\qquad\quad 123 \\
&\qquad - 111 \\
&\qquad\quad 12{\cdot}0,
\end{aligned}$$

also $a = 31229{\cdot}89$.

Beispiel 3.

Wenn jemand ein Kapital von 12800 fl. zu 6 Proc. auf Zins von Zins anlegt, in wie viel Jahren wird er die Summe von 30000 fl. zu fordern haben?

Hier ist n unbekannt, aber $s = 30000$, $a = 12800$ und $p = 6$, und diese Werthe in der Formel III. substituirt geben

$$n = \frac{\log. 30000 - \log. 12800}{\log. 106 - 2} = \frac{4{\cdot}4771213 - 4{\cdot}1072100}{2{\cdot}0253059 - 2}$$

$$= \frac{0{\cdot}3699113}{0{\cdot}0253059} = 14{\cdot}617 \ldots \text{ Jahren.}$$

Beispiel 4.

Zu wie viel Procenten muß ein Kapital von 12000 fl. angelegt werden, damit es in 10 Jahren zu einer Summe von 25000 fl. anwächst?

Hier ist p, also auch $100 + p$ unbekannt, $s = 25000$, $a = 12000$ und $n = 10$; demnach ist durch Substitution in der Formel IV.:

$$\log. (100 + p) = \frac{\log. 25000 - \log. 12000}{10} + 2$$

$$= \frac{4{\cdot}3979400 - 4{\cdot}0791812}{10} + 2$$

$$= 2{\cdot}03187588 = \log. 107{\cdot}616,$$

$$\begin{array}{r} -\ 8526 \\ \hline 233;\ \text{d. i.} \end{array}$$

$$100 + p = 107{\cdot}616, \text{ also}$$

$$p = 7{\cdot}616\ \ldots$$

Beispiel 5.

Eine neu entdeckte Insel wurde von 1000 Kolonisten bezogen, und angestellte Beobachtungen zeigten, daß auf 1000 Menschen jeden Monat einer als Zuwachs kam; wie stark war wohl jene Kolonie nach Verlauf von 100 Jahren?

Hier ist

$$s = 1000\ (\tfrac{1001}{1000})^{1200} = 1000\ (1{\cdot}001)^{1200}, \text{ also}$$

$$\log. s = \log. 1000 + 1200 \log. 1{\cdot}001$$

$$= 3 + 0{\cdot}5209200 = \log. 3318{\cdot}334,$$

folglich $s = 3318$, weil hier keine Bruchtheile zugelassen werden können.

Beispiel 6.

A kaufte von B ein Haus um 20845 fl. unter der Bedingung, jene Kaufsumme erst nach Verlauf von 5 Jahren, jedoch ohne Interessen zahlen zu dürfen. Nach einem Jahre kommt B in eine Geldverlegenheit, und verspricht dem A 8 Proc., wenn er ihm die schuldige Summe sogleich bezahlen würde; wie viel hat nun A an B zu zahlen?

Diese Frage ist identisch mit folgender: Wie groß muß das Kapital sein, welches zu 8 Proc. in 4 Jahren = 20845 fl. wird?

Es ist hier

$$20845 = a\ (1 + \tfrac{8}{100})^4 = a\ (1{\cdot}08)^4; \text{ folglich}$$

$$\log. a = \log. 20845 - 4 \log. 1{\cdot}08$$

$$\begin{array}{rl} & = 4{\cdot}3190019 \\ & -\ 0{\cdot}1336952 \\ \hline \log. a & = 4{\cdot}1853067 = \log. 15321{\cdot}69, \\ & -\ 2871 \\ \hline & 196 \\ & -\ 170 \\ \hline & 260, \end{array}$$

nämlich $a = 15321 \cdot 69$ fl., und demnach erhält A von B einen Nachlaß $= 20845 - 15321 \cdot 69 = 5523 \cdot 31$ fl.

Von A, dem Schuldner des B, sagt man, er discontirt das Kapital a, und der Abzug, den er vom Kapitale macht, für unsern Fall 5523·31 fl., heißt der Rabatt oder das zusammengesetzte (Leibnitz'sche) Interusurium.

Das Berechnen des Zinses vom Zinse, welches gewöhnlich im positiven Rechte verboten ist, heißt Anatocismus. Die Beantwortung der Frage, ob der Anatocismus nach den allgemeinen Rechtsprinzipien zuläßig sei oder nicht, gehört in die philosophische Rechtslehre, und die Auseinandersetzung der Gründe für die Zweckmäßigkeit des Verbotes, den Zins vom Zinse zu berechnen, ist Sache der positiven Rechtswissenschaft, und der Politik insbesondere.

Wie wird das Kapital S, welches erst nach n Jahren zu zahlen ist, nach den einfachen Zinsen discontirt? — Setzt man den jetzigen Werth des Kapitals S, welches nach n Jahren erst fällig ist, $= a$, so wächst a in n Jahren nach dem einfachen Zinse so, daß

$$S = a\left(1 + \frac{np}{100}\right) \text{ wird; und daher ist}$$

$$a = \frac{S}{1 + n\frac{p}{100}} = \frac{100 \,.\, S}{100 + np},$$

wo n auch jede beliebige gebrochene Zahl bedeuten kann. Diese Formel ist unter dem Namen der Hofmann'schen Formel bekannt.

Folgende Aufgabe noch zur Uebung.

A hat dem B ein Kapital von 12000 fl. à 4 Proc. auf 8 Jahre geliehen. Nach 3 Jahren wünscht A wieder in den Besitz seines Kapitals zu treten, und B verlangt Schadloshaltung, indem er sagt, daß er das Kapital zu 7 Proc. benützen könne. Wie groß wird der Rabatt sein?

§. 278.

Aufgabe.

Ein Kaufmann legt ein Kapital a zu p Procent auf Zins vom Zinse an, und vermehrt diesen Fond jährlich um b fl. unter denselben Bedingungen. Wie groß wird dieses ganze Kapital nach n Jahren sein?

Auflösung.

Das Kapital a wird nach n Jahren, ohne jene Zuschüsse, $= aq^n$, wo $q = 1 + \frac{p}{100}$, wie §. 277; der erste Zuschuß b am Ende des ersten Jahres liegt nur $(n - 1)$ Jahre an, und daher wird aus diesem eine Summe $= bq^{n-1}$, aus dem zweiten b aber wird bq^{n-2}, und aus dem dritten bq^{n-3}, u. s. f., endlich das letzte b bleibt unverändert, und der ganze Fond ist nach n Jahren

$$S = aq^n + [bq^{n-1} + bq^{n-2} + bq^{n-3} + \ldots + bq^3 + bq + b].$$

Die in der Klammer stehenden Glieder bilden eine geometrische Reihe, deren Summe $= \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}$, und daher wird durch Substitution

$$S = aq^n + \frac{b(q^n - 1)}{q - 1},$$

Wäre b negativ, d. i. würde von dem Fonde jährlich die Größe b hinweggenommen, so wäre

$$S = aq^n - \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ also ist allgemein}$$

$$\text{I. } S = aq^n \pm \frac{b(q^n - 1)}{q - 1},$$

Wäre $b = a$, so würde dann

$$S = aq^n \pm \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

oder wenn man bloß das obere Zeichen nimmt,

$$\text{II. } S = aq^n + \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(q^{n+1} - 1)}{q - 1}.$$

Nimmt man aber bq als letztes Glied der oben angeführten Progression an, d. i. kommt am Ende des nten Jahres kein Zuwachs (b) mehr hinzu, so ist

$$\text{III. } S = aq^n \pm b \,.\, \frac{q(q^{n-1} - 1)}{q - 1},$$

und wenn $b = a$ gesetzt, und bloß das obere Zeichen genommen wird,

$$\text{IV. } S = \frac{aq(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Anmerkung. Auf den hier deducirten Formeln beruht zunächst die Berechnung der Renten. Wenn nämlich A an B ein Kapital a

auf Zins vom Zinse unter der Bedingung gibt, daß letzterer das Kapital a durch die jährliche Abtragung der Summe b in n Jahren abbezahlt, so heißt die Summe b die Annuität, Jahr- oder Zeitrente, und das Kapital a der Einsatz (mise). Der Gläubiger A heißt Rentirer (Rentenier), der die Rente empfängt; der Schuldner B aber, der die Mise erhält, und die Rente zu zahlen hat, heißt Entrepreneur, welcher nach dem Tode des A die Rente an dessen Erben noch bis zur Verfallzeit zu zahlen verbunden ist. Der hierüber bestehende Vertrag heißt Annuitätsvertrag. Von der Annuität unterscheidet sich die Leib- oder Lebensrente, denn der hierüber bestehende Vertrag verliert seine Gültigkeit mit dem erfolgten Tode des Rentirers, der Annuitätsvertrag dagegen dauert bis zur gänzlichen Tilgung der Schuld. Man kann bei Konstituirung des Vertrages die Leibrente als eine Zeitrente betrachten, indem man die Wahrscheinlichkeit für die Lebensdauer des Rentirers nach den Mortalitätstabellen beurtheilt, wobei vorzüglich die individuelle Körperbeschaffenheit des Rentirers, so wie die mehrjährigen Sterbelisten für den Aufenthaltsort desselben zu berücksichtigen sind.

Wir wollen nun den Gebrauch unserer Formeln durch einige Beispiele erläutern.

Beispiel 1.

Ein fleißiger Jüngling machte eine Erbschaft von 1200 fl., welche er zu 6 Proc. anlegte. Gewohnt, aus eigener Kraft seine wenigen Bedürfnisse zu bestreiten, legt er nicht nur die jährlichen Interessen zu seinem Kapitale, sondern vermehrt noch überdieß dasselbe jährlich mit 100 fl., welche er sich von seinem Verdienste ersparte. Wie groß ist wohl sein Vermögen nach 10 Jahren?

Die Auflösung enthält die Formel I., in welcher $a = 1200$, $q = 1 + \frac{6}{100} = 1{\cdot}06$, $b = 100$ und $n = 10$ gesetzt,

$$S = 1200\,(1{\cdot}06)^{10} + \frac{100}{0{\cdot}06}\,[(1{\cdot}06)^{10} - 1]$$

gibt; und hieraus folgt:

$$S = \frac{1{\cdot}06^{10}\,.\,172}{0{\cdot}06} - 1666.\dot{6}.$$

Nun ist

$$\log. \frac{1{\cdot}06^{10} \,.\, 172}{0{\cdot}06} = 10 \log. 1{\cdot}06 + \log. 172 - \log. 0{\cdot}06,$$

$$= 0{\cdot}2530590$$
$$+ 2{\cdot}2355284$$
$$+ 1{\cdot}2218487$$

$$3{\cdot}7104361 = \log. 5133{\cdot}767, \text{ also}$$

$$\frac{1{\cdot}06^{10} \,.\, 172}{0{\cdot}06} = 5133{\cdot}767, \text{ folglich}$$

$$S = 5133.767 - 1666{\cdot}6 = 3467{\cdot}\dot{1} \text{ fl.}$$

Beispiel 2.

A kaufte von B ein Landgut um 20000 fl. = a unter der Bedingung, diese Kapitalsumme binnen 10 Jahren sammt Interessen in gleichen decursiven Raten abzutragen. Wenn nun 5 Proc. bedungen werden, wie viel muß A jährlich bezahlen?

Hätte A gleich die ganze Summe bezahlt, so würde für B dieses Kapital in 10 Jahren $= a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$ geworden sein. Zahlt nun A am Ende des ersten Jahres x fl. ab, so werden diese in 9 Jahren $= x\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{9}$; die am Ende des zweiten Jahres bezahlten x fl. werden nach der Verfallzeit $= x\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{8}$, u. s. w. werden. Es betrugen daher die einzelnen Raten sammt Interessen eine Summe

$$= xq^9 + xq^8 + xq^7 + \ldots + xq^2 + xq + x$$
$$= x\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^7 + q^8 + q^9) = x \,.\, \frac{q^{10} - 1}{q - 1},$$

und wir erhalten die Gleichung

$$aq^{10} = x \,.\, \frac{q^{10} - 1}{q - 1}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{aq^{10}\,(q - 1)}{q^{10} - 1}$$

gefunden wird; folglich durch Substitution

$$x = \frac{20000 \,.\, \frac{5}{100}\,(1{\cdot}05)^{10}}{(1{\cdot}05)^{10} - 1}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{1000\,(1{\cdot}05)^{10}}{(1{\cdot}05)^{10} - 1}, \text{ oder}$$

$$\log. x = \log. 1000 + 10 \log. (1{\cdot}05) - \log. [(1{\cdot}05)^{10} - 1)],$$

und da

$$\log. 1{\cdot}05^{10} = 10 \log. 1{\cdot}05 = 0{\cdot}211893 = \log. 1{\cdot}628895,$$

also

$$1{\cdot}05^{10} = 1{\cdot}628895 \text{ und } 1{\cdot}05^{10} - 1 = 0{\cdot}628895,$$

so ist durch Substitution

$$\log. x = \log. 1000 + 10 \log. 1{\cdot}05 - \log. 0{\cdot}628895,$$

$$\begin{array}{rl} & = 3{\cdot} \\ & + 0{\cdot}2118930 \\ & - 0{\cdot}7985782 + 1 \\ \hline \log. x & = 3{\cdot}4133148 = \log. 2590{\cdot}09 \\ & \quad - 2998 \\ \hline & \quad 150, \end{array}$$

nämlich $x = 2590{\cdot}09$ fl. ist das jährliche decursive Ratum.

Die Gleichung $aq^{10} = \frac{x(q^{10}-1)}{q-1}$ wird auch aus der Formel I. gefunden, wenn man dort $s = 0$ und $b = x$ setzt.

Beispiel 3.

Es hat jemand ein Kapital von 40000 Thaler zu $5\frac{1}{2}$ Proc. anliegen. Da ihm aber die Interessen zur Bestreitung seiner Auslagen nicht zureichen, so läßt er sich vom Kapitale jährlich 3000 Thaler zurückzahlen. Wie lange kann dieser Gläubiger diese Auslagen bestreiten?

Dieser Fall ist ebenfalls nach der Formel I. zu behandeln. Es ist nämlich hier $a = 40000$, $b = 3000$, $\frac{p}{100} = \frac{5\frac{1}{2}}{100} = 0{\cdot}055$, $n = x$ und $s = 0$ zu setzen, weil nach n Jahren das ganze Vermögen aufgezehrt sein wird. Es ist demnach

$$40000\,(1{\cdot}055)^n - \frac{3000}{0{\cdot}055}\,[(1{\cdot}055)^n - 1] = 0, \text{ oder}$$

$$40 \times 1{\cdot}055^n - \frac{3}{0{\cdot}055} \times 1{\cdot}055^n + \frac{3}{0{\cdot}055} = 0,$$

$$\left(\frac{3}{0{\cdot}055} - 40\right) 1{\cdot}055^n = \frac{3}{0{\cdot}055},$$

$$0{\cdot}8 \times 1{\cdot}055^n = 3,$$

$$1{\cdot}055^n = \frac{3}{0{\cdot}8} = \tfrac{30}{8} = 3{\cdot}75, \text{ also}$$

$$n \log. 1{\cdot}055 = \log. 3{\cdot}75 \text{ und}$$

$$n = \frac{\log. 3{\cdot}75}{\log. 1{\cdot}005} = \frac{0{\cdot}5740313}{0{\cdot}0232525} = \frac{5740313}{232525},$$

$n = 24{\cdot}6869$ Jahren $= 24$ Jahren 8 Monaten 7 Tagen beinahe.

Beispiel 4.

Ein Edelmann versprach dem Erzieher seiner Kinder 20 Jahre lang eine jährliche Rente von 1000 fl. Der Erzieher aber reiste in ein fernes Land, und verkaufte jene Rente gegen 6 Proc. an einen Kaufmann. Wie viel hatte also derselbe rechtlicher Weise zu fordern?

Würde der Erzieher seine Rente zu 6 Proc. anlegen, und die Interessen immer wieder zum Kapitale schlagen, so würde er in 20 Jahren (nach Formel II.) ein Vermögen

$$S = \frac{1000}{0{\cdot}06}\left[1{\cdot}06^{20} - 1\right] = \frac{100000}{6}\left[1{\cdot}06^{20} - 1\right]$$

besitzen.

Dieser Werth für S in der Formel II. (§. 277) substituirt, gibt

$$\log. a = \log. \left[\tfrac{100000}{6}(1{\cdot}06^{20} - 1)\right] + 2\,.\,20 - 20 \log. 1{\cdot}06,$$

$$\log. a = \log. 100000 + \log. (1{\cdot}06^{20} - 1) + 40 - \log. 6 - 20 \log. 1{\cdot}06.$$

$$\begin{array}{rl} = & 5{\cdot} \\ & 0{\cdot}3438299 \\ & 40{\cdot} \\ - & 0{\cdot}7781513 \\ - & 40{\cdot}5061180 \\ \hline & 4{\cdot}0595606 = \log. 11469{\cdot}93; \end{array}$$

also hat er die Summe $a = 11469$ fl. 55·8 kr. zu fordern.

Anmerkung. Wenn q unbekannt ist, so sieht man sich auf Gleichungen geführt, deren Auflösung die Grenzen dieses Lehrbuches überschreitet.

§. 279.

Aufgabe.

Ein Staat A schuldet eine Summe $= S$ an verschiedene Gläubiger, welche er mit p Prozenten verzinset. Durch die segenreichen Folgen eines dauerhaften Friedens wird er in den Stand gesetzt, nicht allein die Interessen richtig zu bezahlen, sondern überdieß noch die Schuld jährlich um die Summe a zu vermindern. Um aber die Tilgung jener Kapitalsumme zu beschleunigen, legt er zu der constanten Größe a jährlich die Summe bei, die durch jene successiven Abzahlungen an Interessen erspart wurde, oder die er hätte zahlen müssen, wenn er nichts am Kapitale abgetragen hätte. — In wie viel Jahren wird auf diese Art obige Summe abgetragen sein?

Auflösung.

So verwickelt und schwierig diese Aufgabe zu sein scheint, so wird dennoch das Resultat in einer äußerst einfachen Form erscheinen, und obgleich wir durch Raisonniren die vorgelegte Frage nach dem vorhergehenden Paragraphe beantworten könnten, so wollen wir uns dennoch absichtlich durch den Calcül auf das Endresultat führen lassen.

Dadurch, daß A am Ende des ersten Jahres die Summe a zahlt, wird die rückständige Schuld

$$R_1 = S - a.$$

Am Ende des zweiten Jahres zahlt A wieder a mehr dem Zinse von a, nämlich

$$a + \frac{ap}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right) = aq;$$

demnach ist der schuldige Rest am Ende des zweiten Jahres

$$R_2 = R_1 - aq = S - a - aq \text{ oder}$$
$$R_2 = S - a(1 + q).$$

Mit Ende des dritten Jahres zahlt A wieder die Summe a und den durch Abzahlung von a (1 + q) gewonnenen Zins, nämlich

$$a + a(1+q)\frac{p}{100} = a\left[1 + \frac{p}{100} + q \cdot \frac{p}{100}\right]$$
$$= a\left[q + q \cdot \frac{p}{100}\right] = aq\left(1 + \frac{p}{100}\right) = aq^2,$$

und demnach bleibt für das vierte Jahr noch verzinslich die Summe

$$R_3 = R_2 - aq^2 = S - a(1+q) - aq^2 \text{ oder}$$
$$R_3 = S - a(1 + q + q^2).$$

Am Ende des vierten Jahres zahlt A nebst der unveränderlichen Summe a wieder den Zins, den die bisher abgetragene Summe $a(1 + q + q^2)$ abwirft, also im Ganzen die Summe

$$a + a(1+q+q^2)\frac{p}{100} = a + a \cdot \frac{p}{100} + a(q+q^2)\frac{p}{100}$$
$$= aq + a(q+q^2)\frac{p}{100} = aq + aq \cdot \frac{p}{100} + aq^2 \cdot \frac{p}{100}$$
$$= aq\left(1 + \frac{p}{100}\right) + aq^2 \cdot \frac{p}{100} = aq^2 + aq^2 \cdot \frac{p}{100}$$
$$= aq^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = aq^3,$$

und demnach bleibt am Schlusse des vierten Jahres noch die verzinsliche Schuld

$$R_4 = R_3 - aq^3 = S - a(1 + q + q^2) - aq^3 \text{ oder}$$
$$R_4 = S - a(1 + q + q^2 + q^3).$$

Auf ähnliche Art wird man finden:

$$R_5 = S - a(1 + q + q^2 + q^3 + q^4),$$

u. s. f., und allgemein am Ende des nten Jahres:

$$R_n = S - a(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}) \text{ oder}$$
$$R_n = S - a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

und weil dann die ganze Schuld getilgt sein soll, so muß $R_n = 0$ sein, folglich

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dieses Resultat belehrt uns nun, daß die obige Angabe identisch mit folgender sei: „Wenn A sich jährlich eine Summe a erspart, und diese zu p Procenten auf Zins vom Zinse anlegt; in wie viel Jahren wird sein Kapital die Größe S erreichen?"

Hier ist

$$S = aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \ldots + aq^2 + aq + a,$$
$$\text{also } S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ wie vorhin.}$$

Beispiel.

A schuldet an B 100 Millionen Gulden zu $2\frac{1}{2}$ Proc. verzinslich. Nun sind die Staatseinkünfte des A so groß, daß er nebst den Interessen jährlich 600,000 fl. am Kapitale abtragen kann, und die auf diese Art jährlich ersparten Interessen werden ebenfalls zum Tilgungsfonde geschlagen. In wie viel Jahren wird obige Schuld abgetragen sein?

Hier ist

$$S = 100{,}000{,}000 = 10^8, \quad a = 600{,}000 = 6 \cdot 10^5 \text{ und}$$
$$q - 1 = \frac{p}{100} = \frac{2\frac{1}{2}}{100} = 0{\cdot}025.$$

Aus unserer Formel aber folgt

$$\frac{S(q-1)}{a} + 1 = q^n, \text{ also}$$

$$n \log. q = \log. \left[\frac{S(q-1)}{a} + 1\right] = \log. [S(q-1) + a] - \log. a$$

$$n = \frac{\log. [S(q-1) + a] - \log. a}{\log. q},$$

und durch Substitution:

$$n = \frac{\log.(10^3 . 0\cdot025 + 6 . 10^5) - \log. 6 . 10^5}{\log. 1\cdot025} = \frac{\log. 31 . 10^5 - \log. 6 . 10^5}{\log. 1\cdot025}$$

$$= \frac{\log. 31 - \log. 6}{\log. 1\cdot025}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \log. 31 &= 1\cdot4913617 \\ - \log. 6 &= -0\cdot7781513 \text{ und} \\ \log. 31 - \log. 6 &= 0\cdot7132104 \\ \log. 1\cdot025 &= 0\cdot0107239; \text{ folglich} \\ n = \tfrac{7132104}{107239} &= 66\cdot506 \text{ sehr nahe.} \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß auf diese Art der Staat A jährlich dieselbe Summe, nämlich $s(q-1)+a$ bezahle, wovon ein Theil geradezu zur Interessenzahlung, der andere Theil aber zur Verminderung der Schuld selbst verwendet wird. Die Zweckmäßigkeit eines auf solchen Gründen ruhenden Schuldentilgungsplanes ist wohl unverkennbar.

§. 280.

Aufgabe.

A leiht dem B ein Kapital a zu p Procent, und B cedirt dem A das Nutzungsrecht auf eine Realität, deren jährlicher reiner Ertrag $= b$ ist. Wenn nun diese wechselseitigen Nutzungen n Jahre lang bestanden haben, so entsteht die Frage: wie müssen A und B gegen einander abrechnen, wenn von beiden Theilen möglichst große Nutzung vorausgesetzt wird?

Auflösung.

A hat nach n Jahren zu fordern $S = aq^n$; oder B ist dem A diese Summe schuldig geworden. Dagegen erhielt A von B mit Ende eines jeden Jahres b, deren Werth nach n Jahren

$$S' = bq^{n-1} + bq^{n-2} + \ldots + bq + b = \frac{b(q^n - 1)}{q-1}.$$

Das Resultat der Abrechnung ist demnach

$$S - S' = aq^n - \frac{b(q^n-1)}{q-1} = \frac{aq^n(q-1) - bq^n + b}{q-1}$$

$$= \frac{[a(q-1) - b]q^n + b}{q-1}.$$

Ist nun $S > S'$, so ist B Schuldner des A; ist aber $S < S'$, so ist A Schuldner des B geworden; ist endlich $S = S'$, so ist keiner dem andern etwas schuldig.

Beispiel 1.

Der Graf N gibt einer Dorfgemeinde ein Kapital von 20000 fl. zu 5 Proc., und erhält von dieser die Nutzung eines Salzbergwerkes, dessen jährlicher reiner Ertrag = 1500 fl. ist. Wie viel Jahre kann der Graf dieses Nutzungsrecht billiger Weise ansprechen?

Hier ist $a = 20000$, $b = 1500$, $\frac{p}{100} = 0{\cdot}05$, also $q = 1{\cdot}05$, und da durch Benutzung des Salzbergwerkes die ganze Schuld getilgt sein soll, so ist

$$S - S' = 0 \text{ oder } a q^n = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Hieraus folgt

$$a(q-1)q^n = b q^n - b, \text{ also}$$
$$[b - a(q-1)]\, q^n = b, \text{ oder}$$
$$\log.[b - a(q-1)] + n \log. q = \log. b,$$

und hieraus findet man

$$n = \frac{\log. b - \log.[b - a(q-1)]}{\log. q},$$

und durch Substitution

$$n = \frac{\log. 1500 - \log.(1500 - 20000 \times 0{\cdot}05)}{\log. 1{\cdot}05},$$

$$n = \frac{\log. 1500 - \log. 500}{\log. 1{\cdot}05} = \frac{3{\cdot}1760913 - 2{\cdot}6989700}{0{\cdot}0211893} = \frac{4771213}{211893}$$
$$= 22{\cdot}5171 \text{ Jahren beinahe.}$$

Beispiel 2.

A schuldet an B 50000 fl. à $6\frac{1}{2}$ Proc., welche er dadurch zahlt, daß er dem B die Benützung seines Hauses 18 Jahre lang überläßt. Welches war der jährliche reine Nutzen, den jenes Haus gab, wenn am Ende jener Vertragszeit B an A noch 648 fl. hinauszahlen mußte?

Hier ist $a = 50000$, $b = x$, $\frac{p}{100} = \frac{6\frac{1}{2}}{100} = 0{\cdot}065$, $n = 18$ und $S - S' = 648$. Substituirt man diese Werthe in der allgemeinen Formel, so findet man

$$648 = 50000\,(1{\cdot}065)^{18} - \frac{x}{0{\cdot}065}(1{\cdot}065^{18} - 1), \text{ oder}$$
$$42{\cdot}12 = 3250\,(1{\cdot}065)^{18} - x\,(1{\cdot}065^{18} - 1),$$

und hieraus

$$x = \frac{3250\,(1{\cdot}065)^{18} - 4\,:\,12}{1{\cdot}065^{18} - 1}.$$

Nun ist

$$\log.\ 1{\cdot}065^{18} = 18\ \log.\ 1{\cdot}065 = 0{\cdot}4922928 = \log.\ 3{\cdot}106654,$$

nämlich $1{\cdot}065^{18} = 3{\cdot}106654$, daher

$3250 \times 3{\cdot}106654 = 10096{\cdot}6255$; folglich

$$x = \frac{10054{\cdot}5055}{2{\cdot}106654} = 4772{\cdot}737 \text{ fl.} = 4772 \text{ fl. } 44{\cdot}2 \text{ kr.}$$

§. 281.

Aufgabe.

Es will irgend jemand ein Werk unternehmen, zu dessen Ausführung n Jahre erfordert werden, und zwar verursacht dieselbe im ersten Jahre eine Auslage $= a$, im zweiten eine Auslage $= b$, u. s. f., und im nten eine Auslage $= z$. Nach dem richtigen Urtheile von Sachverständigen gibt das ausgeführte Werk einen jährlichen Nutzen $= A$; jedoch gibt es im ersten Jahre nach seiner Vollendung nur einen Nutzen $= \frac{A}{m}$, im zweiten Jahre aber ist der Nutzen $= \frac{2A}{m}$, im dritten $= \frac{3A}{m}$, u. s. w., und erst im mten Jahre tritt der volle Nutzen ein. Wenn nun der Unternehmer sein Kapital zu p Procent benutzt wissen will, so fragt es sich: ist es vortheilhaft, das Werk auszuführen, oder nicht.

Auflösung.

Wir müssen hier annehmen, daß die für jedes Jahr erforderliche Summe von dem Unternehmer jedesmal im Anfange des Jahres niedergelegt, und demnach als ein todtes Kapital betrachtet werden müsse. Bezeichnen wir nun die ganze Auslage, die auf die Ausführung des Werkes verwendet wird, mit S, so ist

$$S = aq^n + bq^{n-1} + cq^{n-2} + \ldots + yq^2 + zq,$$

welche Formel auf Zins vom Zinse spricht, weil die möglichste Benutzung von Seite des Unternehmers billiger Weise angenommen werden muß.

Nun liegt aber S durch die folgenden $(m - 1)$ Jahre wieder auf Zinsen, folglich ist die gesammte Auslage bis zu dem Jahre, in welchem der volle Nutzen eintritt, angewachsen zu einem Kapitale $S' = S\,(q)^{m-1}$.

Weil aber im (n+1)ten Jahre der Nutzen $\frac{A}{m}$, im (n+2)ten der Nutzen $\frac{2A}{m}$, u. s. f., und im (n+m—1)ten Jahre der Nutzen $\frac{m-1}{m}A$ eingeht, so ist der gesammte Betrag dieser einzelnen Theile beim Eintreten des vollen Nutzens

$$T = \frac{A}{m}(q)^{m-2} + \frac{2A}{m}(q)^{m-3} + \frac{3A}{m}(q)^{m-4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m-2}{m}A(q) + \frac{m-1}{m}A,$$

indem wir annehmen, daß die während eines jeden Jahres bezogene Nutzung erst mit Anfang des folgenden Jahres als zinstragend angesehen werden könne, und demnach ist der Rest $S' - T$ das wahre Kapital, welches durch die Nutzbringung des vollendeten Werkes verzinset werden muß. Da nun das Kapital $S' - T$ jährlich

$$\frac{p}{100}(S' - T) = (q - 1)(S' - T)$$

Zinsen bringen soll, so sieht man ein, daß die Ausführung des Werkes nur dann ohne Nachtheil für den Unternehmer geschehen könne, wenn $(q - 1)(S' - T) = A$, und daß das Unternehmen sehr vortheilhaft sei, wenn

$$A > (q - 1)(S' - T),$$

nachtheilig aber, wenn

$$A < (q - 1)(S' - T).$$

Man wird leicht begreifen, daß bei dieser Berechnung alles auf die richtige Bestimmung der Größen A, a, b, c, . . . ankomme, welche durch reifes Ueberlegen und vieljährige Erfahrungen von Sachverständigen ausgemittelt werden müssen.

Beispiel.

Das Landgut des N gränzt an einen großen Sumpf, dem N' gehörig, welchen N gerne an sich kaufen möchte, um seine Besitzungen besser zu arrondiren. N' will dieses Stück Land nur um 4000 fl. abtreten, wovon die eine Hälfte sogleich bezahlt werden soll, die andere Hälfte aber nach einem Jahre. N kann aber sein Kapital zu 7 Proc. benützen, und untersucht nun, ob jener Kauf wohl vortheilhaft für ihn sein könnte. Nach genauer Erwägung aller Umstände findet er, daß er 6 Jahre hindurch jährlich 2000 fl. auf die Urbarmachung jenes Bezirkes verwenden müsse, und daß im 7ten Jahre der Ertrag nur $\frac{1}{4}$ der vollen Nutzung sei, im 8ten Jahre $\frac{1}{2}$ und im 9ten Jahre $\frac{3}{4}$, bis

im 10ten Jahre erst die volle Nutzung $= 1800$ fl. eintrete, wobei er jedoch die geringe, auf jenem Boden haftende Steuerquote nicht in Anschlag bringt. Ist nun unter diesen Voraussetzungen der Kauf vortheilhaft oder nicht?

Vergleichen wir diesen speciellen Fall mit unserer allgemeinen Aufgabe, so zeigt sich, daß $a = b = 2000 + 2000 = 4000$, $c = d = e = \ldots = 2000$, $n = 6$, $m = 4$, $\frac{p}{100} = 0{\cdot}07$ und $A = 1800$; also $\frac{A}{m} = \frac{A}{4} = 450$ fl. sei.

Durch Substitution dieser Werthe findet man daher

$$S = 4000\,(1{\cdot}07)^6 + 4000\,(1{\cdot}07)^5 + 2000\,(1{\cdot}07)^4 + 2000\,(1{\cdot}07)^3 + 2000\,(1{\cdot}07)^2 + 2000\,(1{\cdot}07),$$ oder

$$S = 4000\,(1{\cdot}07)^5 \times 2{\cdot}07 + 2000\,(1{\cdot}07)\,[1{\cdot}07^3 + 1{\cdot}07^2 + 1{\cdot}07 + 1],$$

oder $$S = 4000\,.\,2{\cdot}07\,(1{\cdot}07)^5 + 2000\,.\,1{\cdot}07\left(\frac{1{\cdot}07^4 - 1}{0{\cdot}07}\right);$$

und da $4000\,.\,2{\cdot}07\,(1{\cdot}07)^5 = 11613{\cdot}13$ und

$2000\,.\,1{\cdot}07\left(\frac{1{\cdot}07^4 - 1}{0{\cdot}07}\right) = 9501{\cdot}48$ gefunden wird,

so ist $S = 21114{\cdot}61$ fl.

Hieraus folgt dann ferner

$$S' = 21114{\cdot}61\,(1{\cdot}07)^3 \text{ also } \log. S' = \log. 21114{\cdot}61 + 3 \log. 1{\cdot}07.$$

$$\begin{aligned} &= 4{\cdot}3245831 \\ &+ 0{\cdot}0881514 \\ \log. S' &= 4{\cdot}4127345 = \log. 25866{\cdot}31 \\ &\quad 7293 \\ &\quad\;\; 52, \end{aligned}$$

nämlich $S' = 25866{\cdot}31$ fl.

Endlich ist

$$T = 450\,(1{\cdot}07)^2 + 900\,(1{\cdot}07) + 1350, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} T &= 515{\cdot}2 \\ &+ 963{\cdot} \\ &+ 1350{\cdot} \\ T &= 2828{\cdot}2 \\ S' &= 25866{\cdot}3, \end{aligned}$$ demnach das wahre Kapital

$$S' - T = 23038{\cdot}1 \text{ fl.}$$

Rechnet man nun 7 Proc., so gibt jenes Kapital

$$23038{\cdot}1 \times 0{\cdot}07 = 1612{\cdot}67 \text{ fl.}$$

jährliche Interessen, und weil die volle Nutzung 1800 fl. beträgt, so zeigt sich nebst der Zinssumme noch ein jährlicher Gewinn von 187·33 fl., und daher ist jener Kauf für N äußerst vortheilhaft.

398